



Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Российский государственный педагогический университет  
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 ДЕКАБРЯ 2011 Г. I ТУР 6 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Выберите 24 клетки в прямоугольнике  $5 \times 8$  и проведите в каждой выбранной клетке одну из диагоналей так, чтобы никакие две проведенные диагонали не имели общих концов.

2. Вдоль прямой дороги живут пятеро друзей: Алик, Боря, Вася, Гриша и Дима, дома которых стоят в алфавитном порядке. Боря подсчитал сумму расстояний от своего дома до домов четырех своих друзей и получил 20 км. Вася же вычислил, что сумма расстояний от его дома до домов его четырех друзей равна 18 км. На каком расстоянии от Бори живет Вася?

3. Натуральное число назовем *хорошим*, если оно делится на двузначное число, образованное его первыми двумя цифрами. Например, число 1365 — хорошее, так как делится на 13. На доске выписано 98 последовательных восьмизначных чисел. Оказалось, что среди них нет ни одного хорошего. Какой может быть вторая цифра наибольшего из выписанных чисел? (Найдите все варианты ответа и докажите, что других нет.)

4. В каждую из трех школ микрорайона записалось по 100 первоклассников. 1 сентября в каждую школу пришло ровно 100 первоклассников. Но при этом некоторые дети перепутали, в какую школу им надо было идти, и ровно 40 детей пришли не в свою школу. Докажите, что можно выбрать двух заблудившихся первоклассников и поменять их местами так, что в результате каждый из них окажется в своей школе.

*Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:*

Фамилия, имя;  
Класс, школа, район школы;  
Домашний адрес или телефон;  
Фамилия, имя, отчество преподавателя математики в школе.  
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.  
Хотите ли Вы заниматься в кружке математики?  
А если уже занимаетесь — Фамилия, имя, отчество преподавателя кружка математики, место занятий.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах [www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)



Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Российский государственный педагогический университет  
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 ДЕКАБРЯ 2011 Г. I ТУР 6 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. Выберите 24 клетки в прямоугольнике  $6 \times 7$  и проведите в каждой выбранной клетке одну из диагоналей так, чтобы никакие две проведенные диагонали не имели общих концов.

2. Вдоль прямой дороги живут пятеро подруг: Аня, Белла, Варя, Галя и Даша, дома которых стоят в алфавитном порядке. Варя подсчитала сумму расстояний от своего дома до домов четырех своих подруг и получила 22 км. Галя же вычислила, что сумма расстояний от ее дома до домов ее четырех подруг равна 25 км. На каком расстоянии от Вари живет Галя?

3. Натуральное число назовем *хорошим*, если оно делится на двузначное число, образованное его первыми двумя цифрами. Например, число 1751 — хорошее, так как делится на 17. На доске выписано 98 последовательных шестизначных чисел. Оказалось, что среди них нет ни одного хорошего. Какой может быть вторая цифра наименьшего из выписанных чисел? (Найдите все варианты ответа и докажите, что других нет.)

4. В каждую из трех школ микрорайона записалось по 80 первоклассников. 1 сентября в каждую школу пришло ровно 80 первоклассников. Но при этом некоторые дети перепутали, в какую школу им надо было идти, и ровно 70 детей пришли не в свою школу. Докажите, что можно выбрать двух заблудившихся первоклассников и поменять их местами так, что в результате каждый из них окажется в своей школе.

*Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:*

Фамилия, имя;  
Класс, школа, район школы;  
Домашний адрес или телефон;  
Фамилия, имя, отчество преподавателя математики в школе.  
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.  
Хотите ли Вы заниматься в кружке математики?  
А если уже занимаетесь — Фамилия, имя, отчество преподавателя кружка математики, место занятий.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах [www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)



Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Российский государственный педагогический университет  
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

### САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

### ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 ДЕКАБРЯ 2011 г.

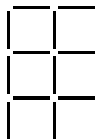
I тур

7 класс

1 ВАРИАНТ

1. В строку выписано 5 последовательных натуральных чисел. Возможно ли, что сумма цифр первого числа равна 52, а пятого — 20?

2. У ослика Иа-Иа есть 2012 палочек длиной 1 см, из которых он сложил клетчатый прямоугольник (сторона клетки — тоже 1 см). Найдите сумму периметра этого прямоугольника и его учетверенной площади. (Для примера на рисунке показан клетчатый прямоугольник  $3 \times 2$ , составленный из 17 палочек.)



3. Умножая числа на калькуляторе, Владик обнаружил, что если произведение больше миллиарда, то калькулятор выдает ответ “E”. Владик взял 10 чисел:  $k, \ell, m, n, p; u, v, w, x, y$  и составил “таблицу умножения”, в которой отметил все результаты, равные E. Докажите, что при составлении таблицы Владик ошибся.

	$k$	$\ell$	$m$	$n$	$p$
$u$	E		E		E
$v$	E	E	E		
$w$	E		E		E
$x$	E				
$y$	E	E	E	E	E

4. В каждую из трех школ микрорайона записалось по 100 первоклассников. 1 сентября в каждую школу пришло ровно 100 первоклассников. Но при этом некоторые дети перепутали, в какую школу им надо было идти, и ровно 40 детей пришли не в свою школу. Докажите, что можно выбрать двух заблудившихся первоклассников и поменять их местами так, что в результате каждый из них окажется в своей школе.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

Класс, школа, район школы;

Домашний адрес или телефон;

Фамилия, имя, отчество преподавателя математики в школе.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Хотите ли Вы заниматься в кружке математики?

А если уже занимаетесь — Фамилия, имя, отчество преподавателя кружка математики, место занятий.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах [www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)



Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Российский государственный педагогический университет  
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

### САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

### ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 ДЕКАБРЯ 2011 г.

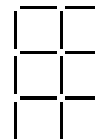
I тур

7 класс

2 ВАРИАНТ

1. В строку выписано 5 последовательных натуральных чисел. Возможно ли, что сумма цифр первого числа равна 37, а пятого — 14?

2. У ослика Иа-Иа есть 3102 палочки длиной 1 см, из которых он сложил клетчатый прямоугольник (сторона клетки — тоже 1 см). Найдите сумму площади этого прямоугольника и четверти его периметра. (Для примера на рисунке показан клетчатый прямоугольник  $3 \times 2$ , составленный из 17 палочек.)



3. Умножая числа на калькуляторе, Владик обнаружил, что если произведение больше миллиарда, то калькулятор выдает ответ “E”. Владик взял 10 чисел:  $k, \ell, m, n, p; u, v, w, x, y$  и составил “таблицу умножения”, в которой отметил все результаты, равные E. Докажите, что при составлении таблицы Владик ошибся.

	$k$	$\ell$	$m$	$n$	$p$
$u$		E		E	E
$v$	E	E		E	
$w$				E	
$x$	E	E	E	E	E
$y$		E		E	E

4. В каждую из трех школ микрорайона записалось по 80 первоклассников. 1 сентября в каждую школу пришло ровно 80 первоклассников. Но при этом некоторые дети перепутали, в какую школу им надо было идти, и ровно 70 детей пришли не в свою школу. Докажите, что можно выбрать двух заблудившихся первоклассников и поменять их местами так, что в результате каждый из них окажется в своей школе.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

Класс, школа, район школы;

Домашний адрес или телефон;

Фамилия, имя, отчество преподавателя математики в школе.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Хотите ли Вы заниматься в кружке математики?

А если уже занимаетесь — Фамилия, имя, отчество преподавателя кружка математики, место занятий.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах [www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)



Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Российский государственный педагогический университет  
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 ДЕКАБРЯ 2011 г. I ТУР 8 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. На уроке физкультуры все ученики 8<sup>а</sup> класса построились в шеренгу. Оказалось, что мальчики и девочки в ней чередуются. Известно, что ровно 52 % учеников 8<sup>а</sup> класса — мальчики. Найдите количество девочек в 8<sup>а</sup> классе. Не забудьте обосновать ответ.

2. На острове 1000 деревень, в каждой из которых 99 жителей. Каждый житель острова — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. При этом известно, что на острове ровно 54054 рыцаря. В один прекрасный день каждому жителю острова был задан вопрос: “Кого в Вашей деревне больше: рыцарей или лжецов?” Оказалось, что в каждой деревне на этот вопрос 66 человек ответило, что в деревне больше рыцарей, и 33 — что больше лжецов. Сколько на острове деревень, в которых рыцарей больше, чем лжецов?

3. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BL$ , и на ее продолжении за точку  $L$  выбрана точка  $K$ , для которой  $LK = AB$ . Оказалось, что  $AK \parallel BC$ . Докажите, что  $AB > BC$ .

4. Квадрат  $15 \times 15$  разбит на квадратики  $1 \times 1$ . Из этих квадратиков выбрали несколько, и в каждом из выбранных провели одну или две диагонали. Оказалось, что никакие две проведенные диагонали не имеют общих концов. Какое наибольшее число диагоналей может быть проведено? (В решении приведите ответ, способ проведения диагоналей и доказательство того, что это число диагоналей действительно наибольшее возможное.)

5. В строку выписаны 2011 последовательных пятизначных чисел. Оказалось, что сумма цифр 21-го числа равна 37, а сумма цифр 54-го равна 7. Найдите сумму цифр 2011-го числа. Не забудьте обосновать ответ.

*Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:*

Фамилия, имя;  
Класс, школа, район школы;  
Домашний адрес или телефон;  
Фамилия, имя, отчество преподавателя математики в школе.  
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.  
Хотите ли Вы заниматься в кружке математики?  
*А если уже занимаетесь —* Фамилия, имя, отчество преподавателя кружка математики, место занятий.  
Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах [www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)



Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Российский государственный педагогический университет  
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 ДЕКАБРЯ 2011 г. I ТУР 8 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. На уроке физкультуры все ученики 8<sup>б</sup> класса построились в шеренгу. Оказалось, что мальчики и девочки в ней чередуются. Известно, что ровно 48% учеников 8<sup>б</sup> класса — мальчики. Найдите количество учеников в 8<sup>б</sup> классе. Не забудьте обосновать ответ.

2. На острове 2000 деревень, в каждой из которых 66 жителей. Каждый житель острова — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. При этом известно, что на острове ровно 72072 рыцаря. В один прекрасный день каждому жителю острова был задан вопрос: “Кого в Вашей деревне больше: рыцарей или лжецов?” Оказалось, что в каждой деревне на этот вопрос 44 человека ответило, что в деревне больше рыцарей, и 22 — что больше лжецов. Сколько на острове деревень, в которых рыцарей больше, чем лжецов?

3. Диагонали трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $E$ . Известно, что  $BE = CD$  и  $\angle ADE = \angle EDC$ . Докажите, что  $CD > AD$ .

4. Квадрат  $13 \times 13$  разбит на квадратики  $1 \times 1$ . Из этих квадратиков выбрали несколько, и в каждом из выбранных провели одну или две диагонали. Оказалось, что никакие две проведенные диагонали не имеют общих концов. Какое наибольшее число диагоналей может быть проведено? (В решении приведите ответ, способ проведения диагоналей и доказательство того, что это число диагоналей действительно наибольшее возможное.)

5. В строку выписаны 2012 последовательных пятизначных чисел. Оказалось, что сумма цифр 22-го числа равна 38, а сумма цифр 66-го равна 10. Найдите сумму цифр 2012-го числа. Не забудьте обосновать ответ.

*Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:*

Фамилия, имя;  
Класс, школа, район школы;  
Домашний адрес или телефон;  
Фамилия, имя, отчество преподавателя математики в школе.  
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.  
Хотите ли Вы заниматься в кружке математики?  
*А если уже занимаетесь —* Фамилия, имя, отчество преподавателя кружка математики, место занятий.  
Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах [www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)



Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Российский государственный педагогический университет  
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 ДЕКАБРЯ 2011 г.

I тур

9 КЛАСС

1 ВАРИАНТ

1. На доске выписаны несколько последовательных натуральных чисел. Ровно 52% из них четны. Какое количество нечетных чисел выписано на доске?

2. В таверне “Подзорная труба” сидят несколько пиратов. Некоторые из них пьют грог, а остальные — ром. Средний возраст пиратов, пьющих грог, — 22 года, а пьющих ром — 45 лет. В один прекрасный момент Джон Сильвер поменял свой напиток. В результате оба средних возраста — и пьющих грог, и пьющих ром — увеличились ровно на 1 год. Сколько пиратов сидит в таверне?

3. Дан вписанный четырехугольник  $ABCD$ . Лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $X$ , а лучи  $DA$  и  $CB$  — в точке  $Y$ . Луч  $BA$  пересекает описанную окружность треугольника  $DXU$  в точке  $M$ , а луч  $BC$  пересекает ту же окружность в точке  $N$ . Докажите, что  $NX + MY > XY$ .

4. Квадрат  $15 \times 15$  разбит на квадратики  $1 \times 1$ . Из этих квадратиков выбрали несколько, и в каждом из выбранных провели одну или две диагонали. Оказалось, что никакие две проведенные диагонали не имеют общих концов. Какое наибольшее число диагоналей может быть проведено? (В решении приведите ответ, способ проведения диагоналей и доказательство того, что это число диагоналей действительно наибольшее возможное.)

5. Какое наименьшее значение может принимать величина

$$a^{2012} + a^6 + \frac{1}{a^6 + 1},$$

если  $a$  — произвольное вещественное число?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ДомаШний АДРЕС или ТЕЛЕФОН;

Фамилия, имя, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ в ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

Фамилия, имя, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

[www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)



Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Российский государственный педагогический университет  
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 ДЕКАБРЯ 2011 г.

I тур

9 КЛАСС

2 ВАРИАНТ

1. На доске выписаны несколько последовательных натуральных чисел. Ровно 48% из них четны. Какое количество нечетных чисел выписано на доске?

2. В салуне “У Гарри” сидят несколько ковбоев. Некоторые из них пьют виски, а остальные — текилу. Средний возраст ковбоев, пьющих виски, — 25 лет, а пьющих текилу — 47 лет. В один прекрасный момент Билли Кинг поменял свой напиток. В результате оба средних возраста — и пьющих виски, и пьющих текилу — увеличились ровно на 1 год. Сколько ковбоев сидит в салуне?

3. Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. На дуге  $AC$  выбрана точка  $X$ , а на дуге  $BC$  — точка  $Y$ . Отрезки  $AY$  и  $BX$  пересекаются в точке  $Z$ . Отрезок  $BX$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $M$ , а отрезок  $AY$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $N$ . Докажите, что если четырехугольник  $MZNC$  — вписанный, то  $AX + BY > AB$ .

4. Квадрат  $13 \times 13$  разбит на квадратики  $1 \times 1$ . Из этих квадратиков выбрали несколько, и в каждом из выбранных провели одну или две диагонали. Оказалось, что никакие две проведенные диагонали не имеют общих концов. Какое наибольшее число диагоналей может быть проведено? (В решении приведите ответ, способ проведения диагоналей и доказательство того, что это число диагоналей действительно наибольшее возможное.)

5. Какое наименьшее значение может принимать величина

$$a^{2010} + a^4 + \frac{1}{a^4 + 1},$$

если  $a$  — произвольное вещественное число?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ДомаШний АДРЕС или ТЕЛЕФОН;

Фамилия, имя, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ в ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

Фамилия, имя, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

[www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)



Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Российский государственный педагогический университет  
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 ДЕКАБРЯ 2011 г.

I тур

10 КЛАСС

1 ВАРИАНТ

1. Ветви параболы  $y = 4ax^2 + 12ax + 9a - 1$  направлены вниз. Докажите, что эта парабола не пересекается с осью абсцисс.

2. В средней школе №1 Чудеснопольского района Страны Дураков работали штатные и внештатные педагоги, причем средняя зарплата штатных была равна 45 грошей, а внештатных — 11 грошей в месяц. Для выполнения нац-проекта «Статистика» одного из штатных педагогов перевели во внештатные (не изменив его зарплату), в результате чего и у штатных, и у внештатных педагогов средняя зарплата увеличилась на 2 гроша в месяц. Сколько всего педагогов в школе?

3. Окружность проходит через вершину  $B$  треугольника  $ABC$ , пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно, и касается стороны  $AC$  в ее середине  $M$ . Известно, что  $AX = XM$ . Докажите, что  $CY = YM$ .

4. Квадрат  $15 \times 15$  разбит на квадратики  $1 \times 1$ . Из этих квадратиков выбрали несколько, и в каждом из выбранных провели одну или две диагонали. Оказалось, что никакие две проведенные диагонали не имеют общих концов. Какое наибольшее число диагоналей может быть проведено? (В решении приведите ответ, способ проведения диагоналей и доказательство того, что это число диагоналей действительно наибольшее возможное.)

5. Дана возрастающая последовательность натуральных чисел, в которой любые три подряд идущих числа образуют прогрессию — арифметическую или геометрическую. Известно, что первые два числа в последовательности делятся на 4. Докажите, что в последовательности нет простых чисел.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

Домашний адрес или телефон;

Фамилия, имя, отчество ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ в школе.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

Фамилия, имя, отчество ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

[www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)



Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Российский государственный педагогический университет  
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 ДЕКАБРЯ 2011 г.

I тур

10 КЛАСС

2 ВАРИАНТ

1. Ветви параболы  $y = 9ax^2 + 12ax + 4a - 1$  направлены вверх. Докажите, что эта парабола пересекает ось абсцисс в двух точках.

2. В средней школе №2 Чудеснопольского района Страны Дураков работали штатные и внештатные педагоги, причем средняя зарплата штатных была равна 55 грошей, а внештатных — 13 грошей в месяц. Для выполнения нац-проекта «Статистика» одного из штатных педагогов перевели во внештатные (не изменив его зарплату), в результате чего и у штатных, и у внештатных педагогов средняя зарплата увеличилась на 3 гроша в месяц. Сколько всего педагогов в школе?

3. Окружность проходит через вершину  $A$  треугольника  $ABC$ , пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно, и касается стороны  $BC$  в ее середине  $M$ . Известно, что  $ML = CL$ . Докажите, что  $MK = BK$ .

4. Квадрат  $17 \times 17$  разбит на квадратики  $1 \times 1$ . Из этих квадратиков выбрали несколько, и в каждом из выбранных провели одну или две диагонали. Оказалось, что никакие две проведенные диагонали не имеют общего концов. Какое наибольшее число диагоналей может быть проведено? (В решении приведите ответ, способ проведения диагоналей и доказательство того, что это число диагоналей действительно наибольшее возможное.)

5. Дана возрастающая последовательность натуральных чисел, в которой любые три подряд идущих числа образуют прогрессию — арифметическую или геометрическую. Известно, что первые два числа в последовательности делятся на 6. Докажите, что в последовательности нет простых чисел.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

Домашний адрес или телефон;

Фамилия, имя, отчество ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ в школе.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

Фамилия, имя, отчество ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

[www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)





Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Российский государственный педагогический университет  
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 ДЕКАБРЯ 2011 г.

I тур

11 КЛАСС

1 ВАРИАНТ

1. Корни квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$  равны  $\sin 42^\circ$  и  $\sin 48^\circ$ . Докажите, что  $b^2 = a^2 + 2ac$ .

2. В Чудеснопольской больнице работали штатные и внештатные врачи. Для выполнения нацпроекта «Статистика» одного штатного врача перевели во внештатные (не изменив его зарплату). В результате и у штатных, и у внештатных врачей средняя зарплата увеличилась на 3 гроша. Вдохновившись успехом, руководство перевело еще одного врача из штатных во внештатные (снова не меняя зарплаты). Средняя зарплата как штатных, так и внештатных врачей увеличилась на 3 %. Чему равна средняя зарплата всех врачей в больнице?

3. На острове жили 2011 негрятят, каждый из которых был либо “рыцарем”, всегда говорящим правду, либо “лжецом”, который всегда лжет. Один из негрятят сказал: *Среди жителей острова, отличных от меня, нечетное число лжецов*. После чего поперхнулся, и их осталось 2010. Еще один из негрятят сказал ту же самую фразу: *Среди жителей острова, отличных от меня, нечетное число лжецов*, после чего не проснулся, и их осталось 2009. И так далее, они по одному говорили эту фразу и исчезали. Сейчас на острове осталось 10 негрятят. Сколько лжецов могло быть среди негрятят изначально?

4. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  оказалось, что  $\angle CAA_1 = 90^\circ$  и  $AD = CB_1$ . Докажите, что  $\angle DB_1 B = 90^\circ$ .

5. Для натурального  $n$  пусть  $f(n)$  — наименьшее натуральное число, такое что  $n \cdot f(n)$  — квадрат натурального числа (например,  $f(12) = 3$ ). Докажите, что для натуральных  $k$  из промежутка  $[10^{2011}; 10^{2011} + 10^{1000}]$  все значения  $f(k)$  различны.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ДомаШний АДРЕС или ТЕЛЕФОН;

Фамилия, имя, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ в ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

Фамилия, имя, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

[www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)



Комитет по образованию Санкт-Петербурга  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Российский государственный педагогический университет  
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных  
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 ДЕКАБРЯ 2011 г.

I тур

11 КЛАСС

2 ВАРИАНТ

1. Корни квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$  равны  $\cos 38^\circ$  и  $\cos 52^\circ$ . Докажите, что  $a^2 = b^2 - 2ac$ .

2. В Чудеснопольской средней школе работали штатные и внештатные педагоги. Для выполнения нацпроекта «Статистика» одного штатного педагога перевели во внештатные (не изменив его зарплату). В результате и у штатных, и у внештатных педагогов средняя зарплата увеличилась на 2 гроша. Вдохновившись успехом, руководство перевело еще одного педагога из штатных во внештатные (снова не поменяв зарплаты). Средняя зарплата как штатных, так и внештатных педагогов увеличилась на 2 %. Чему равна средняя зарплата всех педагогов в школе?

3. На острове жили 2011 негрятят, каждый из которых был либо “рыцарем”, всегда говорящим правду, либо “лжецом”, который всегда лжет. Один из негрятят сказал: *Среди жителей острова, отличных от меня, четное число рыцарей*. После чего поперхнулся, и их осталось 2010. Еще один из негрятят сказал ту же самую фразу: *Среди жителей острова, отличных от меня, четное число рыцарей*, после чего не проснулся, и их осталось 2009. И так далее, они по одному говорили эту фразу и исчезали. Сейчас на острове осталось 10 негрятят. Сколько рыцарей могло быть среди негрятят изначально?

4. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  углы  $\angle BDD_1$  и  $\angle CA_1 A$  — прямые. Докажите, что  $AB = CD_1$ .

5. Для натурального  $n$  пусть  $g(n)$  — наименьшее натуральное число, такое что  $n \cdot g(n)$  — квадрат натурального числа (например,  $g(24) = 6$ ). Докажите, что для натуральных  $k$  из промежутка  $[10^{1111}; 10^{1111} + 10^{500}]$  все значения  $g(k)$  различны.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

Фамилия, имя;

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ДомаШний АДРЕС или ТЕЛЕФОН;

Фамилия, имя, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ в ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

Фамилия, имя, ОТЧЕСТВО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах

[www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)