

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2013 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 9 КЛАСС.

1. Натуральное число A называется интересным, если оно делится на любое число, которое остается после зачеркивания в A нескольких последних цифр. Найдите наибольшее интересное число, состоящее из различных цифр. (С. Берлов)

2. Сумма квадратов вещественных чисел a , b , c и d равна 1. Докажите, что $(1 - a)(1 - b) \geq cd$. (А. Храбров)

3. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает прямую, проходящую через A параллельно BC , в точке X ; она же пересекает прямую, проходящую через C параллельно AB , в точке Y . Известно, что $XY = AC$. На сколько могут отличаться углы A и C ? (С. Берлов)

4. На столе стоят 100 стаканов, в которых лежат 101, 102, ..., 200 вишневых косточек. Двое играют в следующую игру. За один ход разрешается вынуть из любого стакана любое количество косточек (даже все), но после хода все стаканы по-прежнему должны содержать различное число косточек. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре? (С. Берлов)

.....

5. На доске написаны 100 чисел из интервала $(0, 1)$. Разрешается выбрать два числа a и b и заменить их на два корня квадратного трехчлена $x^2 - ax + b$ (если этот трехчлен имеет два корня). Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно долго. (В. Франк)

6. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Точки X и Y симметричны точке O относительно середин сторон BC и AD соответственно. Известно, что $AB = BC = CD$. Докажите, что точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям четырехугольника лежит на прямой XY . (А. Смирнов)

7. Дано 54-значное число из единиц и нулей. Докажите, что остаток от его деления на число $33 \cdot 34 \cdot \dots \cdot 39$ больше, чем 100 000. (М. Антипов)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2013 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 10 КЛАСС.

1. Натуральное число A называется интересным, если оно делится на любое число, которое остается после зачеркивания в A нескольких последних цифр. Найдите наибольшее интересное число, состоящее из различных цифр. (С. Берлов)

2. Будем называть четырехугольник *равнодиагональным*, если у него равны диагонали. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, делит его на два равнодиагональных четырехугольника. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ сам равнодиагональный. (С. Берлов)

3. По кругу стоят черные и белые точки (не меньше 12 штук), так что у каждой точки среди 10 её соседей (5 слева и 5 справа) поровну черных и белых. Докажите, что количество точек делится на 4. (М. Антипов)

4. На доске написаны 100 чисел из интервала $(0, 1)$. Разрешается выбрать два числа a и b и заменить их на два корня квадратного трехчлена $x^2 - ax + b$ (если этот трехчлен имеет два корня). Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно долго. (В. Франк)

.....

Олимпиада 2013 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Точки X и Y симметричны точке O относительно середин сторон BC и AD соответственно. Известно, что $AB = BC = CD$. Докажите, что точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям четырехугольника лежит на прямой XY .

(А. Смирнов)

6. В роте 85 солдат. Каждый день старшина выбирает одного солдата и отправляет в поле красить траву его, а также либо всех тех, кто и выше, и старше выбранного, либо всех тех, которые и ниже, и младше выбранного. Докажите, что через 10 дней можно будет найти пару солдат, которые красили траву в одни те же дни. Рост и возраст у всех солдат различны. (М. Антипов)

7. Пусть a_1 и a_2 — натуральные числа, b_1 — собственный делитель числа a_1 , b_2 — собственный делитель числа a_2 . (Собственным делителем числа называется любой натуральный делитель, отличный от единицы и самого числа.) Докажите, что $a_1b_1 + a_2b_2 - 1$ не делится на a_1a_2 . (А. Храбров)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2013 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 11 КЛАСС.

1. Найдите наименьший положительный нецелый корень уравнения $\sin x = \sin[x]$. Здесь $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x . Напомним, что $\pi = 3,1415\dots$ (Ф. Петров)

2. На математическом факультете учатся 40 юношей и 10 девушек. Каждая девушка дружит либо в точности со всеми теми юношами, кто старше её, либо в точности с теми, кто выше её. Докажите, что у каких-то двух юношей множества подруг совпадают. (М. Антипов)

3. Точки M и N — середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$. Оказалось, что $AN = DM$ и $CM = BN$. Докажите, что $AC = BD$. (По мотивам задачи 10.2)

4. Найдите все пары простых чисел p и q (не обязательно различных), для которых числа $2p - 1$, $2q - 1$ и $2pq - 1$ являются квадратами натуральных чисел. (Ф. Петров, А. Смирнов)

.....

Олимпиада 2013 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Даны числа $x_1, \dots, x_{n+1} \in [0, 1]$, причем $x_{n+1} = x_1$. Докажите, что

$$\prod_{i=1}^n (1 - x_i x_{i+1} + x_i^2) \geq 1.$$

(А. Храбров, Ф. Петров)

6. Пусть S_c и S_a — вневписанные окружности треугольника ABC (S_c касается отрезка AB , S_a — отрезка BC). Окружность S проходит через точку B , касается внешним образом окружностей S_a и S_c и пересекает отрезок AC в точках M и N . Докажите, что $\angle ABM = \angle NBC$. (А. Смирнов)

7. В языке волков две буквы: Ф и П, любая конечная последовательность которых образует слово. Слово Y называется *потомком* слова X , если Y получается из X вычеркиванием некоторых букв (например, слово ФФПФ имеет 8 потомков: Ф, П, ФФ, ФП, ПФ, ФФП, ФПФ, ФФФ). При данном n определите, какое наибольшее число потомков может иметь n -буквенное слово языка волков.

(Ф. Петров, В. Волков)