Материалы для проведения регионального этапа

XXXIX ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2012–2013 учебный год

26–27 января 2013 г.

Москва, 2013

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, С.Н. Агаханов, А.В. Акопян, А.В. Антропов, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, Р.А. Гимадеев, А.Ю. Головко, М.А. Григорьев, С.Г. Григорьев, О.Ю. Дмитриев, Л.А. Емельянов, Р.Г. Женодаров, Л.Н. Исхаков, П.А. Кожевников, Д.О. Лазарев, М.С. Миронов, П.А. Мищенко, Е.Г. Молчанов, А.М. Останин, О.К. Подлипский, А.А. Полянский, И.С. Рубанов, М.Б. Скопенков, Б.В. Трушин, А.И. Храбров, Д.Г. Храмцов, К.В. Чувилин, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И.И. Богданов.

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Даны натуральные числа M и N, большие десяти, состоящие из одинакового количества цифр и такие, что $M = 3N$. Чтобы получить число M, надо в числе N к одной из цифр прибавить 2, а к каждой из остальных цифр прибавить по нечётной цифре. Какой цифрой могло оканчиваться число N? Найдите все возможные ответы. (*Н. Агаханов*)

Ответ. Цифрой 6.

Решение. По условию, $M = 3N$, значит, число $A = M - N = 2N$ чётно. Но, по условию, число A составлено из нечетных цифр и двойки. Значит, A оканчивается на 2. Поэтому вдвое меньшее число N оканчивается либо на 1, либо на 6.

Покажем, что N не может оканчиваться на 1. Если N оканчивается на 1, то при его удвоении не происходит переноса десятка из последнего в предпоследний разряд. Значит, предпоследняя цифра числа $A = 2N$ будет чётной, а она должна быть нечётной. Противоречие.

Замечание. Пары чисел N и M, удовлетворяющие условию, существуют, например, $N = 16$, $M = 48$. Более того, таких пар бесконечно много. Все подходящие числа N описываются так: первая цифра — 1 или 2, далее несколько (возможно, ноль) цифр, каждая из которых равна 5 или 6, и последняя цифра 6.

9.2. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB. (*Н. Агаханов*)

Решение. Покажем, что $\angle A_1C_1B_1 = 45^\circ$. Именно, из равнобедренных треугольников AB_1C_1 и BA_1C_1 имеем $\angle AC_1B_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ и $\angle BC_1A_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$, а тогда $\angle A_1C_1B_1 = 180^\circ - \angle AC_1B_1 - \angle BC_1A_1 = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = 45^\circ$.

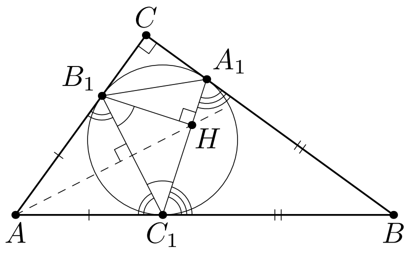


Рис. 1

Итак, острый угол в прямоугольном треугольнике $\triangle B_1HC_1$ равен $45°$; значит, этот треугольник равнобедренный. Поэтому точка H лежит на серединном перпендикуляре к отрезку B_1C_1. Но этим же серединным перпендикуляром является биссектриса равнобедренного треугольника AB_1C_1. Это и значит, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

Замечание. После нахождения равенств $\angle B_1C_1H = \angle C_1B_1H = 45°$ можно действовать и по-другому. Именно, треугольники AB_1H и AC_1H равны по двум сторонам ($AB_1 = AC_1$, $B_1H = C_1H$) и углу между ними; поэтому $\angle B_1AH = \angle C_1AH$.

9.3. Можно ли разбить клетчатую доску 12×12 на уголки из трёх соседних клеток  так, чтобы каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд клеток доски пересекал одно и то же количество уголков? (Ряд пересекает уголок, если содержит хотя бы одну его клетку.) (*Д. Храмцов*)

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что такое разбиение нашлось. Рассмотрим первую и вторую снизу горизонтали доски; обозначим их H_1 и H_2. Каждый уголок на доске пересекается с двумя соседними горизонталями. Значит, если уголок пересекается с H_1, то он пересекается и с H_2. Теперь, если горизонталь H_2 пересекает какой-то уголок, не пересекающийся с H_1, то она пересекает больше уголков, чем H_1, что невозможно. Итак, все уголки, пересекающиеся с первой или второй горизонталями, не выходят за их пределы и образуют вместе горизонтальную полосу H размера 2×12.

Аналогично, все уголки, пересекающиеся с первой или второй слева вертикалями V_1 и V_2, образуют вместе вертикальную полосу V размера 12×2. В таком случае все уголки, пересекающиеся с левым нижним квадратом 2×2, должны лежать как в H, так и в V, то есть должны лежать в этом квадрате. Но тогда квадрат 2×2 должен разбиться на трёхклеточные уголки, что невозможно. Противоречие.

9.4. По кругу выписаны 1000 чисел. Петя вычислил модули разностей соседних чисел, Вася — модули разностей чисел, стоящих через одно, а Толя — модули разностей чисел, стоящих через два. Известно, что любое Петино число больше любого Васиного хотя бы вдвое. Докажите, что любое Толино число не меньше любого Васиного. (*И. Богданов*)

Решение. Пусть v — наибольшее из Васиных чисел, а t — какое-то из Толиных (скажем, $t = |a - d|$, где a, b, c, d — четыре выписанных подряд числа). Достаточно доказать, что $t \geqslant v$.

Среди Петиных чисел встречается число $|a - b|$; значит, $|a - b| \geqslant 2v$. С другой стороны, $|b - d|$ — одно из Васиных чисел; значит, $|b - d| \leqslant v$. Итак, $t = |a - d| = |(a - b) + (b - d)| \geqslant$ $\geqslant |a - b| - |b - d| \geqslant 2v - v = v$, что и требовалось доказать.

9.5. Ненулевые числа a и b таковы, что уравнение

$$a(x - a)^2 + b(x - b)^2 = 0$$

имеет единственное решение. Докажите, что $|a| = |b|$.

(*Н. Агаханов*)

Первое решение. Пусть $|b| \neq |a|$. Тогда $b + a \neq 0$, и данное уравнение — квадратное: $(a + b)x^2 - 2(a^2 + b^2)x + (a^3 + b^3) = 0$. При этом его дискриминант $\frac{D}{4} = (a^2 + b^2)^2 - (a + b)(a^3 + b^3) =$ $= -ab(a - b)^2$ не равен нулю, так как a, b — ненулевые, и $a - b \neq$ $\neq 0$. Значит, уравнение не может иметь ровно одно решение. Противоречие.

Замечание. Заметим, что при $b = -a$ данное уравнение — линейное: $-4a^2x = 0$, и оно имеет единственное решение $x = 0$. Если же $a = b$, то дискриминант обращается в ноль, и у уравнения также ровно одно решение.

Второе решение. Пусть числа a и b одного знака. Если они оба — положительные, то $a(x-a)^2 \geqslant 0$ и $b(x-b)^2 \geqslant 0$, откуда следует, что равенство $a(x-a)^2+b(x-b)^2=0$ может выполняться только в случае, когда одновременно выполняются равенства $a(x-a)^2=0$ и $b(x-b)^2=0$, то есть $x=a$ и $x=b$, откуда $a=b$. Аналогично рассматривается случай, когда оба числа — отрицательные (знаки неравенств меняются на противоположные).

Пусть теперь числа имеют разные знаки; без ограничения общности, $a>0$ и $b<0$. Тогда можно положить $a=c^2$, $b=-d^2$, где $c>0$ и $d>0$. Воспользовавшись формулой разности квадратов, преобразуем данное уравнение: $0=a(x-a)^2+b(x-b)^2=$ $=c^2(x-a)^2-d^2(x-b)^2=(c(x-a)-d(x-b))\cdot(c(x-a)+d(x-b))$. Если $c\neq d$, полученное уравнение имеет два различных корня $x_1=\dfrac{ac-bd}{c-d}=\dfrac{c^3+d^3}{c-d}$ и $x_2=\dfrac{ac+bd}{c+d}=\dfrac{c^3-d^3}{c+d}$ (заметим, что $|x_2|<|x_1|$, поскольку $|c^3+d^3|>|c^3-d^3|$ и $|c-d|<|c+d|$). Значит, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо равенство $c=d$, из которого и следует, что $b=-a$.

9.6. Тридцать девочек — 13 в красных платьях и 17 в синих платьях — водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

(*Р. Женодаров*)

Ответ. 17.

Решение. Рассмотрим любую девочку. Цвета платьев её соседок слева и справа могли быть такими: синий–синий, синий–красный, красный–синий, красный–красный. Девочка ответила «да» ровно в первых двух случаях; значит, она сказала «да» ровно в том случае, когда её соседка *слева* была в синем платье.

Итак, поскольку ровно у 17 девочек соседка слева была в синем платье, то и ответ «да» прозвучал 17 раз.

Замечание. Имеются другие (более сложные) обоснования того, что в хороводе ровно 17 девочек, ответивших «да».

9.7. Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2

соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.

(*Л. Емельянов*)

Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Покажем сначала, что прямая OB касается окружности ω_b, описанной около треугольника BB_1B_2.

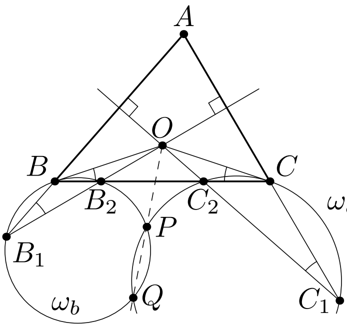


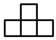
Рис. 2

Пусть $AB < BC$; тогда серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает сторону BC в точке B_2, а продолжение стороны AB за точку B — в точке B_1 (см. рис. 2). Имеем $\angle B_2B_1A = \angle OB_1A = 90^\circ - \angle A$. С другой стороны, из равнобедренного треугольника BOC получаем $\angle B_2BO = \angle CBO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BOC = 90^\circ - \angle A$. Таким образом, вписанный угол $\angle B_2B_1B$ равен углу между секущей BB_2 и прямой OB. Из обратной теоремы об угле между касательной и секущей следует, что OB касается ω_b. Если $AB > BC$, то проходит то же рассуждение с заменой точки A на C и наоборот.

Аналогично, прямая OC касается окружности ω_c, описанной около треугольника CC_1C_2. Теперь несложно доказать, что прямая OP проходит через Q. Допустим, что это не так, и прямая OP пересекает ω_b и ω_c в различных точках Q_b и Q_c. Тогда по теореме о произведении отрезков секущих имеем $OQ_b \cdot OP = OB^2 = OC^2 = OQ_c \cdot OP$, откуда $OQ_b = OQ_c$; наконец, поскольку точки Q_b и Q_c лежат по ту же сторону от O, что и P, получаем $Q_b = Q_c$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Для неостроугольного треугольника утверждение задачи также верно. Заметим, однако, что окружности, описанные около треугольников B_1B_2B и C_1C_2C не всегда пересекаются (даже в остроугольном треугольнике). В этом случае утверждение задачи сохранит силу, если заменить заменить прямую PQ на радикальную ось окружностей ω_b и ω_c.

Замечание 2. Нетрудно также показать, что на прямой PQ (или на радикальной оси ω_b и ω_c) лежит вершина A.

9.8. В клетках доски 8×8 расставлены числа 1 и -1 (в каждой клетке — по одному числу). Рассмотрим всевозможные расположения фигурки  на доске (фигурку можно поворачивать, но её клетки не должны выходить за пределы доски). Назовём такое расположение *неудачным*, если сумма чисел, стоящих в четырёх клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений. (*М. Антипов*)

Ответ. 36.

Решение. Покажем, что в каждом «кресте» из пяти клеток доски найдётся хотя бы одно неудачное расположение. Предположим противное; пусть в крайних клетках креста стоят числа a, b, c, d, а в центральной — e; обозначим через S сумму всех этих пяти чисел. Тогда по нашему предположению $S - a = S - b = S - c = S - d = 0$, откуда $a = b = c = d$. Значит, $S - a = e + 3a = 0$, то есть $e = -3a = \pm 3$, что невозможно.

−	+	−	+	−	+	−	+
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
+	−	+	−	+	−	+	−

Рис. 3

Итак, в каждом из 36 «крестов» (с центрами во всех некрайних клетках) есть неудачное расположение фигурки. Ясно, что каждое расположение содержится не более, чем в одном кресте; поэтому таких расположений не меньше 36.

С другой стороны, на рис. 3 показан пример расстановки, при которой количество неудачных расположений равно 36 (в каждой клетке указан знак соответствующего числа). Действительно, в любом кресте неудачное расположение ровно одно, а все расположения, прилегающие длинной стороной к границе доски — удачны.

10 класс

10.1. Даны натуральные числа M и N, большие десяти, состоящие из одинакового количества цифр и такие, что $M = 3N$. Чтобы получить число M, надо в числе N к одной из цифр прибавить 2, а к каждой из остальных цифр прибавить по нечётной цифре. Какой цифрой могло оканчиваться число N? Найдите все возможные ответы. (*Н. Агаханов*)

Ответ. Цифрой 6.

Решение. По условию, $M = 3N$, значит, число $A = M - N = 2N$ чётно. Но, по условию, число A составлено из нечетных цифр и двойки. Значит, A оканчивается на 2. Поэтому вдвое меньшее число N оканчивается либо на 1, либо на 6.

Покажем, что N не может оканчиваться на 1. Если N оканчивается на 1, то при его удвоении не происходит переноса десятка из последнего в предпоследний разряд. Значит, предпоследняя цифра числа $A = 2N$ будет чётной, а она должна быть нечётной. Противоречие.

Замечание. Пары чисел N и M, о которых идет речь в условии, существуют, например, $N = 16$, $M = 48$. Более того, таких пар бесконечно много. Все подходящие числа N описываются так: первая цифра — 1 или 2, далее несколько (возможно, ноль) цифр, каждая из которых равна 5 или 6, и последняя цифра 6.

10.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Окружность Ω, описанная около треугольника ABC, пересекает прямую A_1C_1 в точках A' и C'. Касательные к Ω, проведённые в точках A' и C', пересекаются в точке B'. Докажите, что прямая BB' проходит через центр окружности Ω.

(*Л. Емельянов*)

Решение. Пусть O — центр окружности Ω. Так как $B'A' = B'C'$ (как отрезки касательных), то OB' — серединный перпендикуляр к отрезку AC. Для решения задачи теперь достаточно доказать, что точка B лежит на этом же перпендикуляре, то есть $BO \perp A_1C_1$.

Из равнобедренного треугольника CBO получаем $\angle CBO =$

$= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle COB)$ (см. рис. 4). По теореме о центральном и вписанном угле $\angle BOC = 2\angle BAC$, поэтому $\angle CBO = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle BAC) = 90^\circ - \angle BAC$. Далее, так как точки A, C, A_1, C_1 лежат на одной окружности (с диаметром AC), то $\angle BA_1C_1 = \angle BAC$. Отсюда $\angle CBO + \angle BA_1C_1 = 90^\circ$, то есть $OB \perp A_1C_1$.

10.3. Даны три квадратных трёхчлена $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с положительными старшими коэффициентами, имеющие по два различных корня. Оказалось, что при подстановке корней трёхчлена $R(x)$ в многочлен $P(x) + Q(x)$ получаются равные значения. Аналогично, при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в многочлен $Q(x) + R(x)$ получаются равные значения, а также при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в многочлен $P(x)+R(x)$ получаются равные значения. Докажите, что три числа: сумма корней трёхчлена $P(x)$, сумма корней трёхчлена $Q(x)$ и сумма корней трёхчлена $R(x)$ равны между собой. (*Н. Агаханов*)

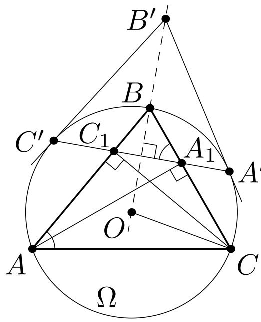


Рис. 4

Решение. Во всех решениях мы будем придерживаться следующих обозначений. Пусть p_1 и p_2, q_1 и q_2, r_1 и r_2 — соответственно пары корней трёхчленов $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$. Положим $p = \frac{p_1 + p_2}{2}$, $q = \frac{q_1 + q_2}{2}$, $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ и заметим, что p, q и r — абсциссы вершин парабол, изображающих функции $y = P(x)$, $y = Q(x)$, $y = R(x)$ соответственно.

Первое решение. Рассмотрим трёхчлен $S(x) = P(x) + Q(x) + R(x)$. Его значения в точках r_1 и r_2 совпадают со значениями в этих же точках трёхчлена $P(x) + Q(x)$, так как $R(r_1) = R(r_2) = 0$. Значит, из условия следует, что $S(r_1) = S(r_2)$. Аналогично, $S(p_1) = S(p_2)$ и $S(q_1) = S(q_2)$. Но квадратичная функция принимает равные значения в разных точках только тогда, когда эти точки симметричны относительно абсциссы вершины изображающей её параболы. Значит, пары точек r_1 и r_2, q_1 и q_2, r_1 и r_2 симметричны относительно одной и той же точки — абсциссы $x = s$ вершины параболы $y = S(x)$. Это и означает, что $p = q = r = s$.

Второе решение. Мы опять же используем тот факт, что квадратичная функция принимает равные значения в разных точках только тогда, когда эти точки симметричны относительно абсциссы вершины соответствующей параболы. Условие задачи теперь можно переформулировать следующим образом: вершины парабол $y = P(x) + Q(x)$ и $y = R(x)$ имеют одинаковую абсциссу r; вершины парабол $y = Q(x) + R(x)$ и $y = P(x)$ имеют одинаковую абсциссу p; вершины парабол $y = R(x)+P(x)$ и $y = Q(x)$ имеют одинаковую абсциссу q.

Без ограничения общности можно считать, что $p \geqslant q \geqslant r$. Тогда функция $y = P(x)+Q(x)$ на промежутке $(-\infty, q)$ убывает, а на промежутке $(p, +\infty)$ возрастает. Значит, абсцисса вершины параболы $y = P(x)+Q(x)$ лежит на отрезке $[q, p]$. С другой стороны, она совпадает с r. Значит, $r = q$. Аналогично доказывается, что $p = q$.

Третье решение. Пусть $P(x) = a_p x^2 + b_p x + c_p$ и, аналогично, $Q(x) = a_q x^2 + b_q x + c_q$, $R(x) = a_r x^2 + b_r x + c_r$. По условию $(a_p r_1^2 + b_p r_1 + c_p) + (a_q r_1^2 + b_q r_1 + c_q) = (a_p r_2^2 + b_p r_2 + c_p) + (a_q r_2^2 + b_q r_2 + c_q)$, что эквивалентно $(a_p + a_q)(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) + (b_p + b_q)(r_1 - r_2) = 0$. Сокращая на $r_1 - r_2 \neq 0$, имеем $(a_p + a_q)(r_1 + r_2) + (b_p + b_q) = 0$. Аналогично, получаем $(a_q + a_r)(p_1 + p_2) + (b_q + b_r) = 0$, $(a_r + a_p)(q_1 + q_2) + (b_r + b_p) = 0$. С учетом теоремы Виета ($r_1 + r_2 = -\frac{b_r}{a_r}$, $p_1 + p_2 = -\frac{b_p}{a_p}$, $q_1 + q_2 = -\frac{b_q}{a_q}$) имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{b_r}{a_r} = \dfrac{b_p + b_q}{a_p + a_q} \\ \dfrac{b_p}{a_p} = \dfrac{b_q + b_r}{a_q + a_r} \\ \dfrac{b_q}{a_q} = \dfrac{b_r + b_p}{a_r + a_p} \end{cases}$$

Первое уравнение системы эквивалентно равенству $\frac{b_r}{a_r} = \frac{b_p + b_q + b_r}{a_p + a_q + a_r}$. Из второго и третьего уравнений получаем, что значения $\dfrac{b_p}{a_p}$ и $\dfrac{b_q}{a_q}$ также равны $\dfrac{b_p+b_q+b_r}{a_p+a_q+a_r}$. Это, опять же, и означает, что $p=q=r=2\,\dfrac{b_p+b_q+b_r}{a_p+a_q+a_r}$.

Замечание. Условие положительности старших коэффициентов многочленов $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ существенно, так как иначе суммы $P(x)+Q(x)$, $P(x)+Q(x)+R(x)$ и т.п. могли оказаться линейными или постоянными функциями.

10.4. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества $A_1, A_2, A_3, \ldots$ так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k, равнялась $k+2013$? (*Р. Женодаров*)

Ответ. Нельзя.

Первое решение. Предположим, что искомое разбиение существует. Назовём множество A_k *большим*, если оно содержит больше одного элемента. Докажем, что для любого n найдутся n больших множеств, индукцией по n. При $n=1$ рассмотрим множество A_{k_1}, содержащее единицу; сумма чисел в нём равна $k_1+2013>1$, значит, оно содержит ещё хотя бы одно число, то есть оно большое. Для доказательства индукционного перехода предположим, что мы уже нашли большие множества $A_{k_1}, \ldots, A_{k_n}$, где $k_1<\ldots<k_n$. Тогда число k_n+2013 не лежит в множестве A_{k_n} (в противном случае это множество не было бы большим). Значит, это число лежит в каком-то другом множестве $A_{k_{n+1}}$, сумма чисел в котором равна $k_{n+1}+2013>k_n+2013$; поэтому оно также большое, и $k_{n+1}>k_n$.

Пусть $k_1<k_2<\ldots<k_{2014}$ — номера некоторых 2014 больших множеств. Рассмотрим множества $A_1, A_2, \ldots, A_{k_{2014}}$. В их объединении содержится не менее $k_{2014}+2014$ различных чисел, а значит, среди них есть число $d\geqslant k_{2014}+2014$. Но это число d не может входить ни в одно из множеств $A_{k_1}, \ldots, A_{k_{2014}}$, ибо сумма в каждом из них меньше d. Противоречие.

Второе решение. Опять же предположим, что разбиение существует. Заметим, что множества $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — подмножества множества $\{1, 2, \ldots, k+2013\}$, так как сумма чисел в каждом из них не превосходит $k+2013$. Для каждого номера

k рассмотрим множество $B_k = \{1, 2, \ldots, k + 2013\} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cup \ldots \cup A_k)$. Рассмотрим переход от B_k к B_{k+1}: к множеству B_k добавляется одно число $k + 2014$, и убирается множество A_{k+1} с суммой чисел $k + 2014$. Таким образом, сумма чисел в множествах B_k и B_{k+1} одна и та же. Значит, сумма чисел в каждом из множеств B_k равна $S = 1 + 2 + \ldots + 2013$ (это сумма чисел в множестве B_1).

Рассмотрим теперь номер N такой, что каждое из чисел $1, 2, \ldots, S$ попало в одно из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_N$. Тогда множество B_N не содержит ни одного из чисел $1, 2, \ldots, S$. Это противоречит тому, что сумма чисел множества B_N равна S.

10.5. Тридцать девочек — 13 в красных платьях и 17 в синих платьях — водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

(*Р. Женодаров*)

Ответ. 17.

Решение. Рассмотрим любую девочку. Цвета платьев её соседок слева и справа могли быть такими: синий–синий, синий–красный, красный–синий, красный–красный. Девочка ответила «да» ровно в первых двух случаях; значит, она сказала «да» ровно в том случае, когда её соседка *слева* была в синем платье.

Итак, поскольку ровно у 17 девочек соседка слева была в синем платье, то и ответ «да» прозвучал 17 раз.

Замечание. Имеются другие (более сложные) обоснования того, что в хороводе ровно 17 девочек, ответивших «да».

10.6. Натуральные числа a, b и c, где $c \geqslant 2$, таковы, что $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a + c$, $b + c$ — составное.

(*В. Сендеров*)

Решение. Достаточно показать, что хотя бы одно из двух чисел $d_a = \text{НОД}(a, c)$ и $d_b = \text{НОД}(b, c)$ больше 1. Действительно, если, например, $d_a > 1$, то $a+c$ делится на d_a и $a+c > d_a$, значит, $a + c$ — составное число.

Из равенства $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$ следует $c(a+b)=ab$, значит, ab делится на c. Но тогда, если $d_a=d_b=1$, то и $c=1$, что невозможно по условию. Итак, одно из чисел d_a и d_b больше 1, что и требовалось доказать.

Замечание. Отметим, что если натуральные a, b, c удовлетворяют равенству $1/a+1/b=1/c$, то число $a+b$ также составное.

10.7. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены три общие касательные — две внешние, a и b, и одна внутренняя, c. Прямые a, b и c касаются окружности ω_1 в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, а окружности ω_2 — в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно отношению радиусов окружностей ω_1 и ω_2. (*Л. Емельянов*)

Первое решение. Пусть r_1 и r_2 — радиусы окружностей ω_1 и ω_2 соответственно, а O_1 и O_2 — их центры. Если $r_1=r_2$, то треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ симметричны относительно точки пересечения прямых O_1O_2 и C_1C_2, и их площади равны.

Предположим, что $r_1\neq r_2$; пусть для определенности $r_1<r_2$. Тогда лучи A_2A_1 и B_2B_1 пересекаются в некоторой точке S. Обозначим через P и Q точки пересечения прямой c с прямыми a и b соответственно. Мы докажем, что 1) $\frac{A_1B_1}{A_2B_2}=\frac{r_1}{r_2}$, и 2) высоты h_1 и h_2 треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, проведённые из вершин C_1 и C_2 соответственно, равны. Отсюда будет следовать, что $\dfrac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_2B_2C_2}}=\dfrac{A_1B_1\cdot h_1/2}{A_2B_2\cdot h_2/2}=\dfrac{r_1}{r_2}$, что и требуется.

1) Прямоугольные треугольники SA_1O_1 и SA_2O_2 подобны, значит, $\dfrac{SA_1}{SA_2}=\dfrac{r_1}{r_2}$. Следовательно, равнобедренные треугольники SA_1B_1 и SA_2B_2 подобны с коэффициентом r_1/r_2, откуда и следует нужное утверждение.

2) Обозначим проекции точек B_1, C_1, B_2, C_2, P и Q на линию центров O_1O_2 через B_1', C_1', B_2', C_2', P' и Q' соответственно (проекциями точек A_1 и A_2 на O_1O_2 также являются B_1' и B_2').

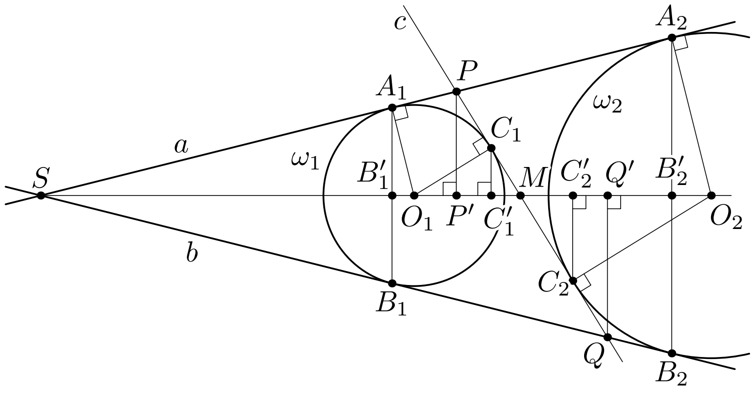


Рис. 5

Заметим, что длины отрезков $B_1'C_1'$ и $B_2'C_2'$ равны h_1 и h_2 соответственно.

Из равенства отрезков касательных к ω_1 имеем $SP + PQ - SQ = (SA_1 + PA_1) + (PC_1 + QC_1) - (SB_1 + QB_1) = 2PA_1 = 2PC_1$. Аналогично, из равенства отрезков касательных к ω_2 получаем $SP+PQ-SQ = (SA_2-PA_2)+(PC_2+QC_2)-(SB_2 - QB_2) = 2QB_2 = 2QC_2$. Отсюда следует, что $PA_1 = PC_1 = QB_2 = QC_2$.

Пусть прямая c пересекает O_1O_2 в точке M. Положим $\alpha = \angle PSM = \angle QSM$, $\beta = \angle SMP = \angle O_2MQ$. Имеем $B_1'C_1' = B_1'P'+P'C_1' = A_1P\cos\alpha+PC_1\cos\beta = B_2Q\cos\alpha+QC_2\cos\beta = B_2'Q'+Q'C_2' = B_2'C_2'$, то есть $B_1'C_1' = B_2'C_2'$, что и требовалось.

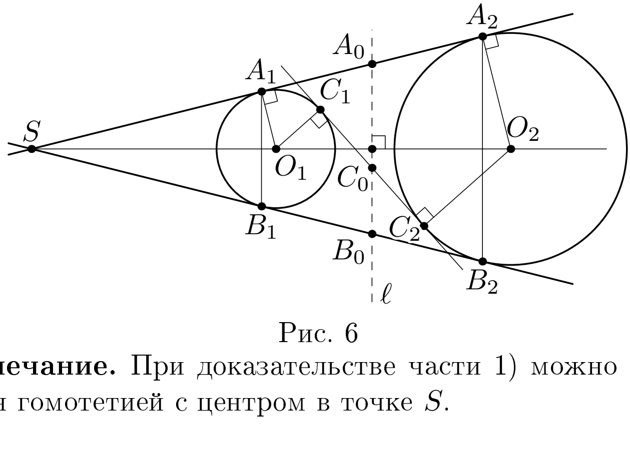


Рис. 6

Замечание. При доказательстве части 1) можно воспользоваться гомотетией с центром в точке S.

Часть 2) можно доказывать и по-другому. Достаточно доказать, что середины A_0, B_0 и C_0 отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат на одной прямой ℓ (эта прямая называется *радикальной осью окружностей* ω_1 *и* ω_2, см. рис. 6). Действительно, тогда $\ell \perp O_1O_2$, и точки B_1', C_1' будут симметричны соответственно точкам B_2' и C_2' относительно ℓ, откуда сразу следует $B_1'C_1' = B_2'C_2'$.

Условие $A_0C_0 \perp O_1O_2$ равносильно равенству $O_1A_0^2 - O_2A_0^2 = O_1C_0^2 - O_2C_0^2$, или $(r_1^2 + A_1A_0^2) - (r_2^2 + A_2A_0^2) = (r_1^2 + C_1C_0^2) - (r_2^2 + C_2C_0^2)$. Последнее равенство верно, так как $A_1A_0 = A_2A_0$ и $C_1C_0 = C_2C_0$. Аналогично $B_0C_0 \perp O_1O_2$, что и означает, что A_0, B_0 и C_0 лежат на одной прямой, перпендикулярной O_1O_2.

Второе решение. Мы придерживаемся тех же обозначений, что и в предыдущем решении. Кроме того, мы будем пользоваться равенствами $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{r_1}{r_2}$ и $PC_2 = QC_1$, доказанными выше.

Равнобедренные треугольники $O_1A_1C_1$ и PA_2C_2 подобны, поскольку $\angle A_1O_1C_1 = 180^\circ - \angle A_1PC_1 = \angle A_2PC_2$. Отсюда $\frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{r_1}{PC_2}$. Аналогично, из подобия $\triangle O_2B_2C_2 \sim \triangle QB_1C_1$ вытекает, что $\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{QC_1}{r_2}$.

С учетом равенств $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{r_1}{r_2}$ и $PC_2 = QC_1$ имеем

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_2B_2C_2}} = \left(\frac{A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot A_1C_1}{4r_1}\right) : \left(\frac{A_2B_2 \cdot B_2C_2 \cdot A_2C_2}{4r_2}\right) = \\ = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} \cdot \frac{B_1C_1}{B_2C_2} \cdot \frac{A_1C_1}{A_2C_2} \cdot \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{QC_1}{r_2} \cdot \frac{r_1}{PC_2} \cdot \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1}{r_2},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Утверждение задачи остается верным, если a, b, c — две внутренних и одна внешняя общие касательные.

10.8. На окружности длины 2013 отмечены 2013 точек, делящих её на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовём *расстоянием* между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы снова в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удалёнными не более, чем на n, увеличилось? (При перестановке некоторые фишки могут остаться на своём месте.)

(*Д. Храмцов*)

Ответ. $n = 670$.

Решение. Занумеруем точки и стоящие на них фишки по часовой стрелке последовательными неотрицательными целыми числами от 0 до 2012. Рассмотрим произвольную перестановку и фишки с номерами 0, 671 и 1342, изначально расположенные в вершинах правильного треугольника. Попарные расстояния между ними равны 671. После перестановки сумма попарных расстояний между этими фишками не будет превосходить длины окружности, а значит, расстояние между какими-то двумя не будет превосходить $2013/3 = 671$; значит, расстояние между этими двумя фишками не увеличится. Итак, при $n \geqslant 671$ требуемая перестановка невозможна.

Приведём теперь пример искомой перестановки для $n = 670$. Каждую фишку с номером $i \leqslant 1006$ переставим точку с номером $a_i = 2i$, а каждую фишку с номером $i \geqslant 1007$ — в точку с номером $a_i = 2i - 2013$. Иначе говоря, a_i — это остаток от деления $2i$ на 2013. Нетрудно понять, что в каждую точку попало по фишке. Осталось показать, что расстояния между парами фишек, изначально удалённых друг от друга не более, чем на 670, при этом возрастут.

Рассмотрим произвольные фишки с номерами i и j; пусть расстояние между ними равно $d \leqslant 670$. Тогда одна из дуг между точками a_i и a_j будет иметь длину $2d$, то есть расстояние между этими точками есть $d' = \min\{2d, 2013 - 2d\}$. Но заметим, что $2d > d$ и $2013 - 2d > d$ (последнее — поскольку $3d < 2013$). Значит, и $d' > d$, что и требовалось доказать.

11 класс

11.1. Три натуральных числа таковы, что последняя цифра суммы любых двух из них является последней цифрой третьего числа. Произведение этих трёх чисел записали на доске, а затем всё, кроме трёх последних цифр этого произведения, стёрли. Какие три цифры могли остаться на доске? Найдите все возможные ответы. (*Н. Агаханов*)

Ответ. 000, 250, 500 или 750.

Решение. Пусть a, b, c — данные числа. По условию, числа $a+b-c$, $b+c-a$ и $c+a-b$ делятся на 10. Значит, на 10 делится и сумма этих чисел, равная $a+b+c$. С другой стороны, из равенства $a+b+c=(a+b-c)+2c$ и условия задачи следует, что последняя цифра суммы всех трёх чисел равна последней цифре числа $2c$. Значит, число c оканчивается на 5 или на 0. Аналогично, на 0 или на 5 оканчиваются числа a и b.

Наконец, поскольку сумма $a+b+c$ чётна, то и одно из чисел a, b, c также чётно. Итак, одно из этих чисел делится на 10, а два остальных — на 5. Тогда произведение делится на 250, а значит, может оканчиваться лишь на 250, 500, 750 или 000. Осталось привести примеры троек чисел, удовлетворяющие условиям, дающие данные последние цифры: $10\cdot10\cdot10=1000$; $5\cdot5\cdot10=250$; $5\cdot5\cdot20=500$; $5\cdot5\cdot30=750$.

11.2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — приведённые квадратные трёхчлены, имеющие по два различных корня. Оказалось, что сумма двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в трёхчлен $Q(x)$, равна сумме двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в трёхчлен $P(x)$. Докажите, что дискриминанты трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны. (*Н. Агаханов*)

Первое решение. Пусть a_1 и a_2 — корни трёхчлена $P(x)$, а b_1 и b_2 — корни трёхчлена $Q(x)$; тогда $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)$ и $Q(x)=(x-b_1)(x-b_2)$. Поэтому условие задачи принимает вид

$$(b_1-a_1)(b_1-a_2)+(b_2-a_1)(b_2-a_2)=$$
$$=(a_1-b_1)(a_1-b_2)+(a_2-b_1)(a_2-b_2).$$

Перенося все слагаемые в одну часть, мы получаем

$$(b_1 - a_1)(b_1 - a_2 + a_1 - b_2) + (b_2 - a_2)(b_2 - a_1 + a_2 - b_1) = 0,$$

то есть $(b_1 + a_2 - a_1 - b_2)(a_1 + b_1 - a_2 - b_2) = 0$, или $(b_1 - b_2)^2 - (a_1 - a_2)^2 = 0$. Это значит, что $|b_1 - b_2| = |a_2 - a_1|$.

Мы доказали, что расстояния между корнями трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны. Но квадраты этих расстояний как раз и равны, согласно формуле корней квадратного уравнения, дискриминантам этих трёхчленов.

Второе решение. Пусть $P(x) = x^2 - a_p x + b_p$, $Q(x) = x^2 - a_q x + b_q$, и пусть p_1, p_2 и q_1, q_2 — соответственно пары корней этих многочленов. По теореме Виета имеем $p_1 + p_2 = a_p$, $p_1 p_2 = b_p$, $q_1 + q_2 = a_q$, $q_1 q_2 = b_q$. Тогда

$$P(q_1) + P(q_2) = (q_1^2 + q_2^2) - a_p(q_1 + q_2) + 2b_p = \\ = (q_1 + q_2)^2 - 2q_1 q_2 - a_p a_q + 2b_p = a_q^2 - 2b_q - a_p a_q + 2b_p.$$

Аналогично, $Q(p_1) + Q(p_2) = a_p^2 - 2b_p - a_p a_q + 2b_q$. Приравнивая эти два выражения, получаем $a_q^2 - 4b_q = a_p^2 - 4b_p$, что и требовалось доказать.

11.3. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества $A_1, A_2, A_3, \ldots$ так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k, равнялась $k + 2013$? (*Р. Женодаров*)

Ответ. Нельзя.

Первое решение. Предположим, что искомое разбиение существует. Назовём множество A_k *большим*, если оно содержит больше одного элемента. Докажем, что для любого n найдутся n больших множеств, индукцией по n. При $n = 1$ рассмотрим множество A_{k_1}, содержащее единицу; сумма чисел в нём равна $k_1 + 2013 > 1$, значит, оно содержит ещё хотя бы одно число, то есть оно большое. Для доказательства индукционного перехода предположим, что мы уже нашли большие множества $A_{k_1}, \ldots, A_{k_n}$, где $k_1 < \ldots < k_n$. Тогда число $k_n + 2013$ не лежит в множестве A_{k_n} (в противном случае это множество не было бы большим). Значит, это число лежит в каком-то другом множестве $A_{k_{n+1}}$, сумма чисел в котором равна $k_{n+1} + 2013 > k_n + 2013$; поэтому оно также большое, и $k_{n+1} > k_n$.

Пусть $k_1 < k_2 < \ldots < k_{2014}$ — номера некоторых 2014 больших множеств. Рассмотрим множества $A_1, A_2, \ldots, A_{k_{2014}}$. В их объединении содержится не менее $k_{2014} + 2014$ различных чисел, а значит, среди них есть число $d \geqslant k_{2014} + 2014$. Но это число d не может входить ни в одно из множеств $A_{k_1}, \ldots, A_{k_{2014}}$, ибо сумма в каждом из них меньше d. Противоречие.

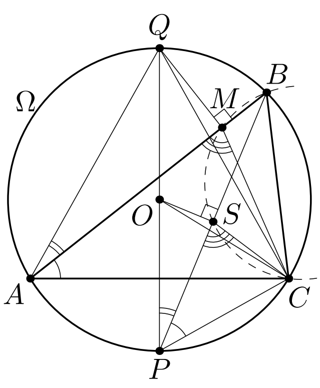
Второе решение. Опять же предположим, что разбиение существует. Заметим, что множества $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — подмножества множества $\{1, 2, \ldots, k + 2013\}$, так как сумма чисел в каждом из них не превосходит $k + 2013$. Для каждого номера k рассмотрим множество $B_k = \{1, 2, \ldots, k + 2013\} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cup \ldots \cup A_k)$. Рассмотрим переход от B_k к B_{k+1}: к множеству B_k добавляется одно число $k + 2014$, и убирается множество A_{k+1} с суммой чисел $k + 2014$. Таким образом, сумма чисел в множествах B_k и B_{k+1} одна и та же. Значит, сумма чисел в каждом из множеств B_k равна $S = 1 + 2 + \ldots + 2013$ (это сумма чисел в множестве B_1).

Рассмотрим теперь номер N такой, что каждое из чисел $1, 2, \ldots, S$ попало в одно из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_N$. Тогда множество B_N не содержит ни одного из чисел $1, 2, \ldots, S$. Это противоречит тому, что сумма чисел множества B_N равна S.

11.4. В окружность Ω вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC окружности Ω, соответственно. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC, делит пополам отрезок BP. (*Ф. Ивлев*)

Первое решение. Пусть S — середина BP, O — центр окружности Ω. Тогда O — середина отрезка PQ, а S — проекция O на BP. Заметим, что $QA = QC$, так как Q — середина дуги AC. Равнобедренные треугольники AQC и POC подобны, так как $\angle QAC$ и $\angle OPC$ опираются на одну дугу QC. Прямоугольные треугольники AQM и POS подобны, так как $\angle QAM$ и $\angle OPS$ опираются на одну дугу QB. Из доказанных подобий следует, что $\frac{AM}{PS} = \frac{AQ}{PO} = \frac{AC}{PC}$.

Поскольку $\angle MAC = \angle SPC$ (они опираются на одну дугу BC), получаем, что треугольники AMC и PSC подобны. Отсюда следует, что углы BMC и BSC равны как смежные с соответственными углами в этих треугольниках. Отсюда и следует, что точки B, C, M, S лежат на одной окружности.



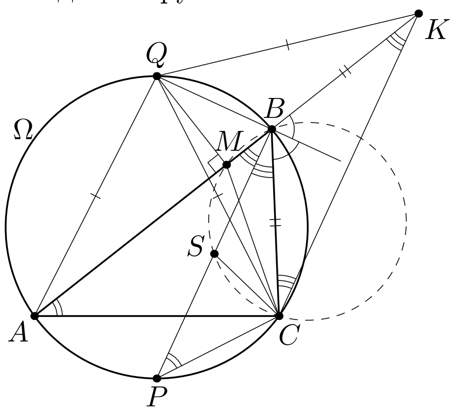


Рис. 7 Рис. 8

Второе решение. Пусть K — точка, симметричная точке C относительно прямой BQ. Поскольку дуги AQ и CQ равны, прямая BQ является внешней биссектрисой угла ABC; значит, точка K лежит на прямой AB. Далее, из симметрии получаем $QK = QC = QA$. Значит, треугольник QAK равнобедренный, и его высота QM является медианой: $AM = MK$.

Поскольку треугольник BCK равнобедренный ($BC = CK$), имеем $\angle BKC = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle PBC$. Кроме того, $\angle BPC = \angle BAC$ как опирающиеся на одну дугу. Значит, треугольники CAK и CPB подобны по двум углам. Обозначим через S середину отрезка BP. Тогда углы CSB и CMK — соответственные в этих подобных треугольниках; значит, они равны, то есть $\angle CSB = \angle CMB$. Это и означает, что точки C, S, M, B лежат на одной окружности.

11.5. Существуют ли такие 2013 различных натуральных чисел, что сумма любых 2012 из них не меньше квадрата оставшегося?

(*О. Подлипский*)

Ответ. Не существуют.

Решение. Предположим, что такие числа нашлись. Поскольку они различны и их 2013, наибольшее из них не меньше 2013; обозначим его через a. Тогда сумма всех остальных не превосходит $2012a$, а его квадрат равен $a^2 \geqslant 2013a$, то есть он больше этой суммы. Противоречие.

11.6. Три попарно непересекающиеся окружности ω_x, ω_y, ω_z радиусов r_x, r_y, r_z соответственно лежат по одну сторону от прямой t и касаются ее в точках X, Y, Z соответственно. Известно, что Y — середина отрезка XZ, $r_x = r_z = r$, а $r_y > r$. Пусть p — одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_x и ω_y, а q — одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_y и ω_z. В пересечении прямых p, q, t образовался неравнобедренный треугольник. Докажите, что радиус вписанной в него окружности равен r. (*П. Кожевников*)

Первое решение. Обозначим вершины данного треугольника через A, B, C, как показано на рис. 9. Пусть q' — вторая общая внутренняя касательная к ω_y и ω_z, а t' — вторая их общая внешняя касательная. Обозначим через A' и B' точки пересечения прямой t' с q и t соответственно, а через M и N — точки пересечения прямой q' с t и t' соответственно. Обозначим также центры окружностей ω_x, ω_y и ω_z через I_x, I_y и I_z соответственно.

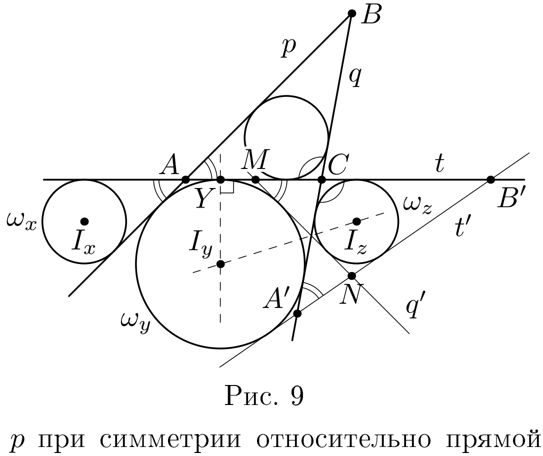


Рис. 9

Прямая p при симметрии относительно прямой I_yY переходит либо в q, либо в q'. Но, если она переходит в q, то треугольник ABC равнобедренный. Значит, p и q' симметричны относительно I_yY. С другой стороны, прямые q и q', а также t и t' симметричны относительно линии центров I_yI_z. Значит, $\angle B'A'C = \angle NMB' = \angle BAC$. Кроме того, $\angle ACB = \angle A'CB'$ как вертикальные. Итак, треугольники ABC и $A'B'C$ подобны по двум углам.

Наконец, ω_y — их общая вневписанная окружность, касающаяся соответственных сторон AC и $A'C$; значит, коэффициент их подобия равен 1, и эти треугольники равны. Поэтому радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и $A'B'C$, также равны. Но окружность, вписанная в $A'B'C$ — это ω_z, откуда и следует требуемое.

Замечание. Вариацией рассуждения, приведённого выше, можно показать, что треугольники ABC и $A'B'C$ симметричны относительно прямой CI_y.

Второе решение. Опять обозначим вершины данного треугольника A, B, C, как показано на рис. 10. Пусть ω_0 — вписанная окружность треугольника ABC, и ее радиус равен $r_0 = r/k$ (тем самым, в задаче требуется доказать, что $k = 1$). Обозначим через P, Q и T точки касания ω_0 с прямыми p, q и t соответственно, а через K и L — точки касания ω_y с прямыми p и q соответственно.

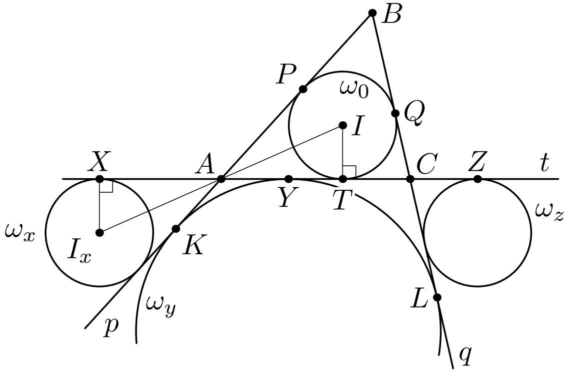


Рис. 10

Обозначим $x = AT$, $z = CT = AC - x$. Покажем, что

$AY = z$. Действительно, из равенства отрезков касательных к окружности и равенства отрезков общих касательных к ω_y и ω_0 имеем: $AY - CT = AK - CQ = (PK - AP) - (QL - CL) = CL - AP = CY - AT = (AC - AY) - (AC - CT) = CT - AY$. Итак, $AY - CT = CT - AY$, откуда $AY = CT = z$.

Заметим, что $x \neq z$. Иначе $AT = AY$, значит, точки Y и T совпадают, а AC касается окружностей ω_y и ω_0 в этой общей точке. В этом случае треугольник ABC симметричен относительно линии центров окружностей ω_y и ω_0, значит, он равнобедренный, что противоречит условию.

Пусть I и I_x — центры окружностей ω_0 и ω_x. Треугольники ITA и I_xXA подобны, поэтому $XA = \frac{I_xX}{IT} \cdot AT = \frac{r}{r_0} \cdot AT = kAT = kx$. Аналогично, $ZC = kz$. Из условия $XY = YZ$ получаем $XA + AY = ZC + CY$; значит, $kx + z = kz + x$, откуда $(kx - x) - (kz - z) = 0$, или $(k-1)(x-z) = 0$. По доказанному $x \neq z$, значит $k = 1$, что и требовалось.

11.7. Найдите все натуральные k такие, что при каждом нечётном $n > 100$ число $20^n + 13^n$ делится на k. (*А. Голованов*)

Ответ. $k = 1, 3, 11, 33$.

Первое решение. Заметим сразу, что при любом нечётном n число

$$20^n + 13^n = (20 + 13)(20^{n-1} - 20^{n-2} \cdot 13 + \ldots + 13^{n-1})$$

делится на $20 + 13 = 33$. Значит, если k является делителем числа 33, то условие задачи выполнено.

Покажем, что все остальные k не удовлетворяют условию. Предположим противное; тогда числа $A = 20^{101} + 13^{101}$ и $B = 20^{103} + 13^{103}$ делятся на k. Значит, числа $20^2 \cdot A - B = (400 - 169) \cdot 13^{101} = 231 \cdot 13^{101}$ и $B - 13^2 \cdot A = 231 \cdot 20^{101}$ также делятся на k. Однако НОД$(231 \cdot 20^{101}, 231 \cdot 13^{101}) = 231 = 7 \cdot 33$, так что $231 \,\vdots\, k$.

Наконец, покажем, что $20^n + 13^n$ не делится на 7. Действительно,

$$20^n + 13^n = (20^n - 13^n) + 2 \cdot 13^n,$$

где первое слагаемое делится на $20 - 13 = 7$, а второе — нет. Итак,

k является делителем числа 231 и не делится на 7; значит, $33 \vdots k$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Предъявим другое доказательство того, что k должно быть делителем числа 33.

Заметим сначала, что НОД$(20, k) = 1$. Действительно, если НОД$(20, k) \vdots p$ при некотором простом p, то и $20^{101} + 13^{101} \vdots p$, а значит, и $13 \vdots p$. Но тогда на p делится НОД$(20, 13) = 1$, что невозможно. Аналогично, НОД$(13, k) = 1$.

Рассмотрим теперь числа $1 = 20^0, 20^1, 20^2, \ldots, 20^k$; два из них дают одинаковые остатки при делении на k. Значит, при некоторых $i > j$ на k делится число $20^i - 20^j = 20^j(20^{i-j} - 1)$. Отсюда, поскольку НОД$(20, k) = 1$, получаем, что при некотором натуральном $u = i - j$ число $20^u - 1$ делится на k. Аналогично, при некотором натуральном v число $13^v - 1$ делится на k.

Рассмотрим теперь число $n > 100$ такое, что $n - 1 \vdots uv$; например, подходит число $n = 1 + 100uv$. Тогда число

$$(20^n + 13^n) - 33 = 20(20^{n-1} - 1) + 13(13^{n-1} - 1)$$

делится на k, поскольку $20^{n-1} - 1 \vdots k$ и $13^{n-1} - 1 \vdots k$. Итак, поскольку $20^n + 13^n \vdots k$, то и $33 \vdots k$.

11.8. Фигура «мамонт» бьёт как слон (по диагоналям), но только в трёх направлениях из четырех (отсутствующее направление может быть разным для разных мамонтов). Какое наибольшее число не бьющих друг друга мамонтов можно расставить на шахматной доске 8×8? (*О. Дмитриев*)

Ответ. 20.

Решение. Из каждого мамонта выпустим три стрелки в тех направлениях, в которых он бьёт. Сопоставим стрелку диагонали (не обязательно главной), если мамонт, из которого ведёт стрелка, стоит в этой диагонали, а стрелка идёт вдоль неё. Тогда каждой диагонали сопоставлено не более двух стрелок: в противном случае две из них будут идти в одном направлении, и один из мамонтов будет бить другого. Поскольку диагоналей всего 30 (по 15 в каждом направлении), стрелок им сопоставлено не более 60, а значит, всего мамонтов не больше $60/3 = 20$.

Три возможных примера расположения 20 мамонтов, не

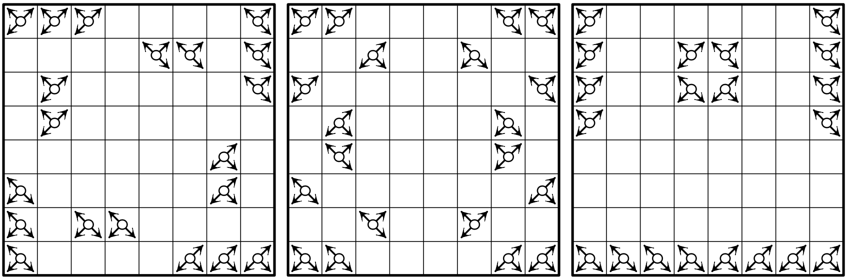


Рис. 11

бьющих друг друга, показаны на рис. 11. Есть и другие расположения.

Замечание. Для построения примера достаточно расставить 10 мамонтов на белых полях; расстановка чёрных получится поворотом на 90° или симметрией относительно средней линии доски.