САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 6 класс.

1. Про натуральное число n известно, что $\text{НОД}(1000, n) = 4$ и $\text{НОД}(1000, n+1) = 5$. Чему равен $\text{НОД}(1000, n+2)$? (*Д. Максимов*)

2. В магазине проходит акция «*Каждый третий товар — бесплатно*». При печати чека покупки выстраиваются по убыванию цены, и все товары с номерами, кратными трем, выдаются бесплатно. Петя и Маша выбрали товаров в сумме на 30 000 рублей и оплатили их двумя чеками. Благодаря акции каждый из них сэкономил по 1000 руб. Какое максимальное количество денег могли бы они сэкономить, если бы оплачивали покупки сообща одним чеком? (*А. Солынин*)

3. На клетчатой плоскости отмечено несколько клеток. На каждой клетке плоскости написано, за какое наименьшее число ходов шахматный конь может дойти от этой клетки до какой-нибудь отмеченной. Андрей вырезал из плоскости полоску 5×1, не содержащую отмеченных клеток. Докажите, что в клетках этой полоски есть два равных числа. (*А. Солынин*)

4. На доске написано 88 различных натуральных чисел, больших 1000. Их сумма равна 999 999. Сережа прибавил к каждому числу число, образованное его тремя последними цифрами. (Например, из числа 1111 получилось бы 1222, из числа 1011 — число 1022, а из числа 10 000 — оно само.) Все 88 результатов Сережа записал в тетрадь. Докажите, что в тетради записано хотя бы 45 различных чисел. (*С. Берлов*)

. . . .

Олимпиада 2015 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

5. Компания из 99 Кощеев Бессмертных гуляет по прямой дороге. Они все вместе идут с постоянной скоростью, а направление движения (вперед или назад) раз в час выбирают большинством голосов. В момент выхода Кощеи единогласно решили идти вперед. Первый Кощей меняет мнение о том, куда он хочет идти, каждый час; второй Кощей — каждые два часа; третий — каждые три, и т. д. Докажите, что в какой-то момент они вернутся в начало маршрута. (*О. Иванова*)

6. В классе учится 30 учеников, один из них — Вася. Каждый из Васиных одноклассников имеет ровно 5 общих друзей с Васей. Докажите, что в классе есть ученик с нечетным числом друзей. (*С. Берлов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 7 класс.

---

1. На доске написано 2015 чисел (не обязательно различных). Для каждого из этих чисел подсчитали, сколько чисел на доске меньше него, и сколько чисел на доске больше него. Может ли так оказаться, что для каждого числа на доске эти два количества имеют разную четность? (*К. Сухов*)

2. На клетчатой плоскости отмечено несколько клеток. На каждой клетке плоскости написано, за какое *наименьшее* число ходов шахматный конь может дойти от этой клетки до какой-нибудь отмеченной. Андрей вырезал из плоскости прямоугольник 2×3, не содержащий отмеченных клеток. Докажите, что в клетках этого прямоугольника не более четырёх различных чисел. (*А. Солынин*)

3. В турнире участвовало 98 шахматистов. Для игры в очередном туре их как-нибудь разбивают на пары. Проигравший в паре выбывает из турнира, а если была ничья, оба игрока проходят в следующий тур. В случае, когда количество участников тура нечётно, один из шахматистов “отдыхает” и проходит в следующий тур без игры. Оказалось, что единоличный победитель определился после семи туров. Какое наибольшее количество “отдыхавших” могло быть? (*А. Солынин*)

4. На доске написано 88 различных натуральных чисел, больших 1000. Их сумма равна 999 999. Сережа прибавил к каждому числу число, образованное его тремя последними цифрами. (Например, из числа 1111 получилось бы 1222, из числа 1011 — число 1022, а из числа 10 000 — оно само.) Все 88 результатов Сережа записал в тетрадь. Докажите, что в тетради записано хотя бы 45 различных чисел.

(*С. Берлов*)

. . . .

Олимпиада 2015 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. Дан треугольник ABC, в котором $BC = 2AB$. Точка D — середина стороны BC, точка K — середина отрезка BD. Докажите, что $AC = 2AK$. (*С. Берлов*)

6. Гриша вычислил произведение всех чисел, не превосходящих миллиона и не кратных 29, и сократил его на максимальную возможную степень числа 31. Стас нашёл произведение всех чисел, не превосходящих миллиона и не кратных 31, и сократил его на максимальную возможную степень числа 29. Чей результат больше?

(*А. Голованов*)

7. На доске 2015×2015 стоят 1800 фигур — ладей и ферзей. Они бьют все незанятые клетки доски. (Фигура бьет все клетки, до которых может дойти по шахматным правилам, не проходя сквозь другие фигуры.) Докажите, что ферзей не меньше 214.

(*А. Солынин*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 8 класс.

---

1. Целые ненулевые числа a, b, c, d таковы, что $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b}{c}+\frac{d}{a}$, причем эти четыре дроби несократимы, не являются целыми числами, и не обязательно положительны. Найдите $ad+bc$. (*А. Чухнов*)

2. В трапеции $ABCD$ точка F — середина боковой стороны BC, точка K на другой боковой стороне AD является основанием перпендикуляра, опущенного из точки F. Оказалось, что $3AK \leq KD$. Докажите, что $AB+CD \geq 2AF$. (*С. Берлов*)

3. Шахматная фигура *кенгуру* бьёт 8 клеток, которые расположены от неё на две или три клетки левее, правее, выше или ниже (а соседние клетки не бьет). Какое наибольшее число не бьющих друг друга кенгуру можно расставить на доске 8×8? (*А. Чухнов*)

4. У каждого из 30 различных натуральных чисел предпоследняя цифра больше 5. Все эти числа поделили с остатком на 99 и полученные неполные частные и остатки выписали на доску. Докажите, что среди 60 выписанных чисел не менее 9 различных. (*М.Антипов*)

. . . .

Олимпиада 2015 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. Даны положительные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2015}$. Оказалось, что a_k в пять раз больше среднего арифметического всех чисел. Какое наименьшее значение может принимать k? (*Д. Максимов*)

6. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Известно, что $\angle B = 2\angle C$. На стороне BC отмечена точка D, такая что $AB = CD$. Прямые AD и BL пересекаются в точке T. Докажите, что площади треугольников ALD и CLT равны. (*С. Берлов*)

7. Каждый член клуба веселых дальтоников знаком не более чем с 10 другими. Клуб закупил тапочки 23 различных цветов (тапок каждого цвета бесконечно много). На новогодний фуршет члены клуба прибывали по одному, и каждый, входя, обнаруживал, что те из уже пришедших, с кем он знаком, между собой тоже знакомы. Докажите, что после боя курантов каждому члену клуба можно подарить тапочки разного цвета так, что у любых двух знакомых членов клуба окажутся тапочки четырех различных цветов, а у любых двоих, имеющих общего знакомого, — тапочки не менее трех разных цветов. (*К. Кохась*)