



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

12 ДЕКАБРЯ 2015 Г.

I ТУР

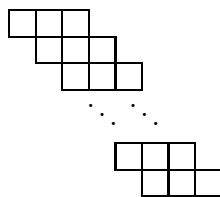
10 КЛАСС

1 ВАРИАНТ

1. По кругу выписано 29 ненулевых цифр. Любые две соседние цифры можно прочесть по часовой стрелке как двузначное число. Рассмотрим эти 29 двузначных чисел, образованных соседними цифрами. Может ли их произведение быть точным квадратом?

2. Биссектриса угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекает основание BC в точке K . Описанная окружность треугольника AKD пересекает сторону AB в точке L . Докажите, что $BL = KC$.

3. Дана «лесенка» 100×3 (в каждой строчке 3 клетки, каждая следующая строчка сдвинута по сравнению с предыдущей на одну клетку вправо). Сколькими способами можно расставить в ней числа от 1 до 300 так, чтобы в каждой горизонтали и в каждой вертикали числа возрастали (слева направо и сверху вниз)?



4. Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами, что каждое из уравнений

$$f(x) = f(6x - 1), \quad f(t) = f(3 - 15t)$$

имеет (хотя бы одно) целочисленное решение?

5. Положительные числа $a \leq b \leq c$ и натуральное число n удовлетворяют условию $a^n + b^n = c^n$. Докажите неравенство $c - b \leq (\sqrt[n]{2} - 1)a$.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ; ТЕЛЕФОН.

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem

13 декабря жюри проведет онлайн-разбор олимпиады. Подробности на сайте foxford.ru/spb



Комитет по образованию Санкт-Петербурга
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический университет
Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных
СПб отделение математического института им. В.А.Стеклова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

12 ДЕКАБРЯ 2015 Г.

I ТУР

10 КЛАСС

2 ВАРИАНТ

1. По кругу выписано 23 ненулевые цифры. Любые две соседние цифры можно прочесть по часовой стрелке как двузначное число. Рассмотрим эти 23 двузначных числа, образованных соседними цифрами. Может ли их произведение быть точным квадратом?

2. На основании DC равнобокой трапеции $ABCD$ отмечена точка M , а на боковой стороне BC — точка N так, что $DM = CN$ и точки A, M, N, B лежат на одной окружности. Докажите, что BM — биссектриса угла ABC .

3. Дана «лесенка» 50×3 (в каждом столбце 3 клетки, каждый следующий столбец сдвинут по сравнению с предыдущим на одну клетку вверх). Сколькими способами можно расставить в ней числа от 1 до 150 так, чтобы в каждой горизонтали и в каждой вертикали числа возрастали (слева направо и снизу вверх)?

4. Существует ли такой квадратный трёхчлен $g(x)$ с вещественными коэффициентами, что каждое из уравнений

$$g(y) = g(2 - 23y), \quad g(x) = g(5 + 10x)$$

имеет (хотя бы одно) целочисленное решение?

5. Положительные числа $x \leq y \leq z$ и натуральное число d удовлетворяют условию $2x^d + y^d = z^d$. Докажите неравенство $z - y \leq (\sqrt[d]{3} - 1)x$.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ; ТЕЛЕФОН.

КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;

ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ.

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Если Вы занимаетесь в кружке математики —

ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem

13 декабря жюри проведет онлайн-разбор олимпиады. Подробности на сайте foxford.ru/spb