



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
10 ДЕКАБРЯ 2016 г. I тур 9 класс 1 ВАРИАНТ

1. Квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ имеет два различных ненулевых целых корня a и b . Известно, что $a + p$ делится на $q - 2b$. Чему может быть равно число a ? (Приведите все ответы и докажите, что других нет.)

2. Сто клетчатых фанерных прямоугольников 5×6 распилили по клеточкам на куски, и из всех этих кусков составили несколько квадратов 2×2 и несколько фигурок вида $\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}$. Найдите, при каком наименьшем числе кусков это возможно сделать, если куски можно поворачивать и переворачивать.

3. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки X и Z соответственно. Отрезки CX и BZ пересекаются в точке Y . Оказалось, что пятиугольник $AXYZD$ — вписанный. Докажите, что $AY = DY$.

4. Перед открытием жилконторы к окошку в ней стояла очередь из 100 человек, и в течение дня приходили еще люди. Когда очередной клиент подходит к окошку, работница жилконторы делит время, оставшееся до конца рабочего дня, на текущее количество человек в очереди (включая подошедшего) и обслуживает его ровно столько времени, сколько получилось в частном. Всего за день было обслужено 130 человек. Докажите, что найдутся пять клиентов, которых обслуживали одинаковое время.

(Считается, что перерыва на обед нет и что никто не становится в конец очереди в тот момент, когда очередной клиент подходит к окошку.)

5. На экране однокнопочного калькулятора горит натуральное число. Калькулятор при нажатии на кнопку заменяет число n на число $[(1 + \sqrt{3})n + \frac{1}{2}]$. Дима много раз нажимает на кнопку калькулятора, на экране одно за другим появляются числа. Докажите, что каждое следующее число на экране калькулятора равно удвоенной сумме двух предыдущих.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ; ТЕЛЕФОН; КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
Если Вы занимаетесь в кружке математики —
ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
10 ДЕКАБРЯ 2016 г. I тур 9 класс 2 ВАРИАНТ

1. Квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ имеет два различных ненулевых целых корня s и t . Известно, что $s + p$ делится на $q + 2t$. Чему может быть равно число s ? (Приведите все ответы и докажите, что других нет.)

2. Двести клетчатых картонных прямоугольников 5×6 разрезали по клеточкам на куски, и из всех этих кусков составили несколько фигурок вида $\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}$ и несколько фигурок вида $\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}$. Найдите, при каком наименьшем числе кусков это возможно сделать, если куски можно поворачивать и переворачивать.

3. На сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки X и Z соответственно. Отрезки CX и BZ пересекаются в точке Y . Оказалось, что пятиугольник $AXYZD$ — вписанный и $AY = DY$. Докажите, что $AD \parallel BC$.

4. Чиновник весь рабочий день непрерывно отвечает на письма. В начале рабочего дня он обнаружил 130 неотвеченных писем, но в течение дня приходили новые письма. Когда чиновник приступает к ответу на очередное письмо, он делит время, оставшееся до конца рабочего дня, на количество не отвеченных на данный момент писем (включая это письмо) и тратит на ответ ровно столько времени, сколько получилось в частном. Всего за день он ответил на 160 писем. Докажите, что было 6 писем, на которые он потратил одинаковое время.

(Считается, что перерыва на обед нет и что никакое новое письмо не приходит в тот момент, когда чиновник начинает отвечать на очередное письмо.)

5. На экране однокнопочного калькулятора горит натуральное число. Калькулятор при нажатии на кнопку заменяет число n на число $[(2 + 2\sqrt{2})n + \frac{1}{2}]$. Саша много раз нажимает на кнопку калькулятора, на экране одно за другим появляются числа. Докажите, что каждое следующее число на экране калькулятора равно учетверенной сумме двух предыдущих.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:

ФАМИЛИЯ, ИМЯ; ТЕЛЕФОН; КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.
Если Вы занимаетесь в кружке математики —
ФИО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ КРУЖКА, МЕСТО ЗАНЯТИЙ.

Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и www.anichkov.ru/olimpus/matem