САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 9 класс.

---

1. Натуральное число называется *палиндромом*, если оно одинаково читается слева направо и справа налево (в частности, последняя цифра палиндрома совпадает с первой и потому не равна нулю). Квадраты двух различных натуральных чисел имеют по 1001 цифре. Докажите, что строго между этими квадратами на числовой прямой найдется палиндром. (*М. Иванов*)

2. В городе построено 2019 станций метро. Некоторые пары станций соединены тоннелями, причем от любой станции по тоннелям можно добраться до любой другой. Мэр распорядился организовать несколько линий метро: каждая линия должна включать в себя несколько различных станций, последовательно соединенных тоннелями (по одному и тому же тоннелю может проходить несколько линий). При этом каждая станция должна лежать хотя бы на одной линии. Для экономии средств следует сделать не более k линий.

Оказалось, что приказ мэра неосуществим. При каком наибольшем k это могло произойти? (*С. Берлов*)

3. Докажите, что расстояние между серединой стороны BC треугольника ABC и серединой дуги ABC его описанной окружности не меньше, чем $AB/2$.
(*А. Кузнецов*)

4. Оля написала на карточках дроби вида $1/n$, где n — все возможные делители числа 6^{100} (включая единицу и само это число). Эти карточки она разложила в некотором порядке. После этого она записала на доску число на первой карточке, затем сумму чисел на первой и второй карточках, потом сумму чисел на первых трех карточках и т. д., наконец, сумму чисел на всех карточках. Каждую сумму Оля записывала на доску в виде несократимой дроби. Какое наименьшее количество различных знаменателей могло оказаться у чисел на доске?

. . . .

Олимпиада 2019 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. Назовём *улучшением* положительного числа его замену на степень двойки (т. е. на одно из чисел 1, 2, 4, 8, ...), при которой оно увеличивается, но не более чем в 3 раза. Дано 2^{100} положительных чисел с суммой 2^{100}. Докажите, что можно стереть часть из них, а каждое из остальных чисел улучшить так, чтобы сумма полученных чисел снова равнялась 2^{100}. (*А. Храбров*)

6. Биссектрисы BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке I. На продолжениях отрезков BB_1 и CC_1 отмечены точки B' и C' соответственно так, что четырехугольник $AB'IC'$ — параллелограмм. Докажите, что если $\angle BAC = 60°$, то прямая $B'C'$ проходит через точку пересечения описанных окружностей треугольников BC_1B' и CB_1C'. (*А. Кузнецов*)

7. По кругу расположены 2019 тарелочек, на каждой лежит по одному пирожному. Петя и Вася играют в игру. За один ход Петя указывает на пирожное и называет число от 1 до 16, а Вася перемещает указанное пирожное на указанное число тарелочек по или против часовой стрелки (направление каждый раз выбирает Вася). Петя хочет, чтобы когда-нибудь на одной из тарелочек скопилось не меньше k пирожных, а Вася хочет ему помешать. При каком наибольшем k Петя сможет добиться успеха? (*В. Франк*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 10 класс.

---

1. Для непостоянной арифметической прогрессии (a_n) существует такое натуральное n, что

$$a_n + a_{n+1} = a_1 + \ldots + a_{3n-1}.$$

Докажите, что в этой прогрессии нет нулевых членов. (*С. Иванов*)

2. Каждые два из n городов Руритании соединены прямым авиарейсом одной из двух авиакомпаний. Промонопольный комитет хочет, чтобы не менее k рейсов выполнялись одной компанией. Для этого он может хоть каждый день выбирать любые три города и изменять принадлежность трёх рейсов, связывающих эти города друг с другом (то есть отбирать каждый из этих рейсов у компании, которая его выполняет, и передавать другой). При каком наибольшем k комитет заведомо сможет за какое-то время достичь своей цели, как бы ни распределялись рейсы сейчас? (*С. Берлов*)

3. Даны натуральные числа a, b и $c \geq b$. Докажите, что

$$a^b(a+b)^c > c^b a^c.$$

(*А. Храбров*)

4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M, а медианы треугольника ACD — в точке N. Окружность, описанная около треугольника ACM, пересекает отрезок BD в точке K, лежащей внутри треугольника AMB. Известно, что $\angle MAN = \angle ANC = 90°$. Докажите, что $\angle AKD = \angle MKC$. (*А. Кузнецов, Р. Кузнецов*)

. . . .

Олимпиада 2019 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. В классе 25 учеников. Учитель хочет запасти N конфет, провести олимпиаду и раздать за успехи в ней все N конфет (решившие поровну задач должны получить поровну, решившие меньше — меньше, в том числе, возможно, и ноль конфет). При каком наименьшем N это будет возможно независимо от количества задач на олимпиаде и успехов учеников? (*М. Антипов*)

6. Можно ли расставить во всех клетках бесконечной клетчатой плоскости все натуральные числа (по одному разу) так, чтобы для каждого n в каждом квадрате $n \times n$ сумма чисел была кратна n? (*А. Голованов*)

7. В квадрате $10^{2019} \times 10^{2019}$ отмечено 10^{4038} точек. Докажите, что найдется такой прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам квадрата, площадь которого отличается от количества расположенных в нем точек хотя бы на 6. (*А. Храбров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 класс.

---

1. Дан многочлен $f(x)$ степени 2000. У многочлена $f(x^2-1)$ ровно 3400 корней, а у многочлена $f(1-x^2)$ ровно 2700 корней. Докажите, что расстояние между какими-то двумя корнями $f(x)$ меньше 0,002. (*А. Солынин*)

2. На доске написано 100 различных натуральных чисел. К каждому из этих чисел прибавили НОД всех остальных. Могло ли среди 100 чисел, полученных в результате этих действий, оказаться три одинаковых? (*С. Берлов*)

3. В начале игры у Малыша и Карлсона есть один кусок шоколадки в виде квадрата 2019×2019 клеточек. Каждым ходом Малыш делит какой-нибудь кусок по клеточкам на три прямоугольных куска, а Карлсон съедает один из этих трех кусков по своему выбору. Игра заканчивается, когда сделать очередной ход невозможно. Если всего было сделано четное число ходов — побеждает Малыш, если нечетное — Карлсон. Кто выигрывает при правильной игре? (*Д. Ширяев*)

4. Неравнобедренный треугольник ABC периметра 12 вписан в окружность ω. Точки P и Q — середины дуг ABC и ACB соответственно. Касательная, проведенная к окружности ω в точке A, пересекает луч PQ в точке R. Оказалось, что середина отрезка AR лежит на прямой BC. Найдите длину отрезка BC. (*А. Кузнецов*)

. . . .

Олимпиада 2019 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. У барона Мюнхгаузена есть набор гирь 1000 различных целых весов, по 2^{1000} гирь каждого веса. Барон утверждает, что если взять по одной гире каждого веса, то общий вес этих 1000 гирь будет меньше 2^{1010}, причём этот вес невозможно набрать гирями из этого набора другим способом. Могут ли слова барона оказаться правдой? (*М. Антипов*)

6. Пусть между городами A, B, C и D есть дороги AB и CD, но нет дорог BC и AD. Назовем *перестройкой* замену пары дорог AB и CD на пару дорог BC и AD. Изначально в стране было несколько городов, некоторые пары городов были соединены дорогами, причем из каждого города выходило по 100 дорог. Министр нарисовал новую схему дорог, в которой из каждого города по-прежнему выходит 100 дорог. Известно, что как в старой, так и в новой схемах никакие два города не соединены более, чем одной дорогой. Докажите, что новую схему можно получить из старой с помощью нескольких перестроек. (*Т. Зубов*)

7. Треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Прямая AO вторично пересекает окружность ω в точке A'. M_B и M_C — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые $A'M_B$ и $A'M_C$ пересекают окружность ω вторично в точках B' и C', а также пересекают сторону BC в точках D_B и D_C соответственно. Описанные окружности треугольников CD_BB' и BD_CC' пересекаются в точках P и Q. Докажите, что точки O, P и Q лежат на одной прямой. (*М. Германсков*)