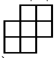
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 6 класс.

---

1. Таблица 10×10 заполнена числами от 1 до 100: в первой строке слева направо выписаны числа от 1 до 10 в порядке возрастания; во второй строке точно так же выписаны числа от 11 до 20, и т. д.; в последней строке слева направо выписаны числа от 91 до 100. Можно ли в этой таблице найти фрагмент из 7 клеточек вида , сумма чисел в котором равна 455? (Фрагмент можно поворачивать.)

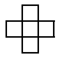
2. Костю в детстве неправильно научили складывать натуральные числа: он полагает, что после привычного всем сложения следует переставить цифры суммы в убывающем порядке. Обозначим сложение по Костиному правилу знаком $\oplus$ (например, $99 \oplus 2 = 110$.) Существуют ли такие натуральные числа a и b, для которых $a \oplus b = a$?

3. За большим круглым столом сидят 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо чудак. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжет. Чудак говорит правду, если слева от него сидит лжец; ложь, если слева от него сидит рыцарь; все что угодно, если слева от него чудак. Каждый сказал: «Справа от меня сидит лжец». Сколько всего лжецов? Перечислите все возможные ответы и докажите, что других нет.

(*В. Мигрин*)

4. Учительница считает некоторых учеников 6^a класса отличниками, а остальных — двоечниками. В течение четверти в классе прошло 6 контрольных по математике (на них ставились оценки от 2 до 5). На каждой контрольной присутствовали все ученики, и на каждой контрольной они рассаживались по двое за парту (возможно, на разных контрольных поразному). Двоечник чудесным образом получал тройку, если сидел за одной партой с отличником, и двойку, если сидел с другим двоечником. Всего за эти контрольные пятёрок было получено в 3 раза больше, чем четвёрок, а троек — на 10 меньше, чем двоек. Докажите, что найдется отличник, получивший хотя бы одну оценку не выше тройки.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.

1. Таблица 70×70 заполнена числами от 1 до 4900: в первой строке слева направо выписаны числа от 1 до 70 в порядке возрастания; во второй строке точно так же выписаны числа от 71 до 140, и т. д.; в последней строке слева направо выписаны числа от 4831 до 4900. Можно ли в этой таблице найти крест из 5 клеточек вида , сумма чисел в котором равна 2018? (*А. Солынин*)

2. За круглым столом сидят 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо чудак. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжет. Чудак говорит правду, если слева от него сидит лжец; ложь, если слева от него сидит рыцарь; все что угодно, если слева от него сидит чудак. Каждый сказал: «Справа от меня сидит лжец». Сколько за столом лжецов? Перечислите все возможные ответы и докажите, что других нет. (*В. Мигрин*)

3. Точки M и N — середины равных сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. На продолжении отрезка MN за точку N отмечена точка X, а на отрезке NX — точка Y так, что $MN = XY$. Докажите, что $BY = CX$. (*А. Кузнецов*)

4. На парковке стоят машины. Среди них есть машины марок «Тойота», «Хонда», «Шкода», а также машины других марок. Известно, что не «Хонд» в полтора раза больше, чем не красных машин; не «Шкод» в полтора раза больше, чем не желтых машин; наконец, не «Тойот» вдвое меньше, чем красных и желтых машин вместе. Докажите, что «Тойот» не меньше, чем «Хонд» и «Шкод» вместе. (*А. Солынин*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 8 класс.

---

1. Любитель Дима и профессионал Федя наломали дров и похвастались друг другу, кто сколько наломал. При этом Дима преувеличил результат своей работы в 2 раза, Федя в 7 раз, а в сумме получилось втрое больше дров, чем на самом деле. Кто наломал дров больше и во сколько раз?

2. За круглым столом сидят 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо чудак. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжет. Чудак говорит правду, если слева от него сидит лжец; ложь, если слева от него сидит рыцарь; все что угодно, если слева от него сидит чудак. Каждый сказал: «Справа от меня сидит лжец». Сколько за столом лжецов? Перечислите все возможные ответы и докажите, что других нет.

3. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна диагонали BD. Точка M — середина диагонали AC. Прямая BM пересекает отрезок CD в точке E. Докажите, что $BE = CE$.

4. У Оли есть прямоугольная шоколадка с целыми сторонами, разбитая на единичные квадратики. Площадь шоколадки делится на 1000. Докажите, что Оля может съесть несколько квадратиков так, чтобы оставшаяся часть шоколадки оказалась прямоугольником, а площадь съеденной части составляла бы ровно 73 % от исходной.

5. Кузнечик начинает движение в левой верхней клетке квадрата 10×10. Он может прыгать на одну клетку вниз или вправо. Кроме того, кузнечик может из самой нижней клетки любого столбца перелететь в самую верхнюю клетку того же столбца, а из самой правой клетки любой строки перелететь в самую левую клетку той же строки. Докажите, что кузнечику понадобится хотя бы 9 перелетов, чтобы побывать на каждой клетке квадрата хотя бы по одному разу.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 9 класс.

1. $f(x)$ — квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом. Наименьшее значение квадратного трехчлена $f(2x) - f(x)$ равно -1. Найдите наименьшее значение квадратного трехчлена $f(3x) - f(x)$. (*А. Голованов*)

2. Дано натуральное число n. В белой таблице $1000n \times 1000n$ некоторые клетки покрашены в черный цвет. Известно, что при любом натуральном k, таком что $n^2 \le k \le n^2 + n - 1$, в каждом клетчатом прямоугольнике площади k есть хотя бы одна черная клетка. Докажите, что в любом клетчатом прямоугольнике площади $n^2 + n$ тоже есть черная клетка. (*С. Берлов*)

3. Найдите наименьшее натуральное число N, у которого существует три *различных* натуральных делителя, произведение которых равно 14^{600}.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. Точка, симметричная точке E относительно прямой BD, лежит на описанной окружности треугольника ABC. Найдите отношение $AD : CD$. (*А. Кузнецов*)

5. Найдите все значения, которые может принимать выражение

$$[x] \cdot \left[\frac{2000}{x}\right]$$

при положительных x. (Как обычно, через $[a]$ обозначается целая часть числа a, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее a.)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 10 класс.

---

1. $f(x)$ — квадратный трёхчлен. Наименьшее значение функции $f(2x) - f(x)$ равно -1. Найдите наименьшее значение функции $f(3x) - f(x)$. (*А. Голованов*)

2. Произведение трёх разных натуральных делителей натурального числа N равно $1\,000\,000$. Найдите наименьшее такое N.

3. На графике функции $y = x^3 + 3x$ расположены четыре точки, являющиеся вершинами параллелограмма. Докажите, что центр этого параллелограмма — начало координат.

4. В треугольнике ABC с $\angle B = 100^\circ$ проведена высота BD. На отрезках AD и CD выбраны точки X и Y так, что $XY = AC/2$. На сторонах AB и BC выбраны точки Z и T соответственно так, что $AX = XZ$ и $CY = YT$. Найдите $\angle ZDT$. (*А. Кузнецов*)

5. Клетчатый квадрат 1024×1024 разрезан на квадраты 32×32. Можно ли раскрасить все его клетки в 512 цветов так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждом из получившихся квадратов 32×32 каждый цвет встречался ровно два раза? (*А. Голованов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2019 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 класс.

---

1. Многочлен степени 10 имеет три различных корня. Какое наибольшее количество нулевых коэффициентов у него может быть?

(*А. Храбров*)

2. Все рыбаки делятся на обычных и честных. Честный рыбак преувеличивает вес пойманных им рыб ровно в 2 раза, а обычный рыбак — в целое, большее шести, число раз (эти коэффициенты у разных обычных рыбаков могут быть разными). 10 рыбаков поймали вместе 120 кг рыбы. Каждый заявил, что поймал ровно 60 кг рыбы. Сколько среди них было обычных рыбаков? Найдите все ответы и докажите, что других нет.

3. В группе детского сада 26 детей. Когда дети вышли на прогулку, у каждого было две варежки одинакового цвета, причем варежки разных детей — разного цвета. Во время прогулки дети трижды строились парами (не обязательно одним и тем же способом). Во время первого построения дети в каждой паре поменялись левыми варежками, во время второго — правыми. Когда они построились в третий раз, оказалось, что у каждой пары детей имеются две варежки одного цвета, две — другого. Докажите, что в этот момент есть ребенок в одинаковых варежках.

(*О. Иванова*)

4. Точки X и Y — середины дуг AB и BC описанной окружности треугольника ABC. BL — биссектриса этого треугольника. Оказалось, что $\angle ABC = 2\angle ACB$ и $\angle XLY = 90°$. Найдите углы треугольника ABC.

(*С. Берлов*)

5. Даны натуральные числа m и n ($m < n$) и большая шоколадка, стороны которой делятся на n^5. (Все *шоколадки* в этой задаче — клетчатые прямоугольники, сторона клетки равна 1.) Леша пять раз съедал по несколько клеточек так, что получалась очередная меньшая шоколадка, площадь которой каждый раз составляла долю $\frac{m}{n}$ от площади предыдущей шоколадки. Докажите, что он сможет съесть еще несколько клеточек так, что получится совсем уже маленькая шоколадка, площадь которой составляет долю $\left(\frac{m}{n}\right)^{10}$ от площади исходной большой шоколадки.

(*О. Иванова, Д. Карпов*)