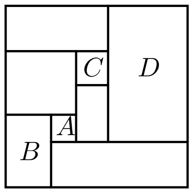
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 6 класс.

1. Таблица 2×3 заполнена различными натуральными числами, одно из них — число 217. Возле каждой строки и каждого столбца написана сумма чисел в этой строке или столбце — всего 5 чисел. Приведите пример таблицы, для которой никакие два из этих пяти чисел в сумме не делятся на 3.



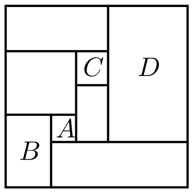
2. Большой клетчатый прямоугольник периметра 522 разрезан по клеточкам на несколько прямоугольников, как показано на схеме (пропорции фигур искажены). При этом части A, B, C и D являются квадратами, причем квадраты A и C состоят всего из одной клетки. Найдите стороны большого прямоугольника. Не забудьте обосновать ответ.

3. Вдоль кругового шоссе живут 100 школьников. Кроме того, вдоль шоссе стоят несколько школ. Утром 1-го сентября автобус ездил кругами по шоссе и каждый школьник доехал на нём до ближайшей по ходу движения школы. Вечером все дети вернулись домой. Утром 2-го сентября автобус снова ездил кругами, но в противоположном направлении. Каждый из 10 внимательных школьников вышел, как только автобус довез его до школы, где он был вчера, а остальные 90 школьников опять вышли у ближайших по ходу движения школ. (Дома и школы находятся в разных точках шоссе, автобус останавливается прямо в этих точках.) За эти два утра внимательные школьники проехали в сумме 1000 км, а остальные — более 4500 км. Докажите, что можно разделить шоссе пополам так, что все школы будут на одной половине.

4. В детском саду 200 детей. Выходя на прогулку, они перепутали шапки. На улице они решили поиграть в игру: каждый ребёнок обманывает тех, на ком надета чужая шапка, и говорит правду тем, у кого шапка своя. После этого несколько раз кто-то из детей подходил к кому-то из остальных, произносил «У меня чужая шапка!» и менялся с ним шапками. Какое наибольшее число раз это могло происходить?

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.

1. Большой клетчатый прямоугольник периметра 522 разрезан по клеточкам на несколько прямоугольников, как показано на схеме (пропорции фигур искажены). При этом части A, B, C и D являются квадратами, причем квадраты A и C состоят всего из одной клетки. Найдите стороны большого прямоугольника. Не забудьте обосновать ответ.



2. Саша, Андрей и Оля выбрали по натуральному числу. Саша умножил своё число на число Оли, а также своё число на число Андрея; эти два произведения отличались друг от друга на 1. Андрей умножил своё число на Сашино и своё на Олино; эти произведения отличались на 25. Наконец, Оля умножила своё число на Сашино и своё на число Андрея. На сколько отличались произведения у Оли? Укажите все ответы и обоснуйте, что других нет.

3. На биссектрисе угла ABC отмечена точка D, а на отрезке BD выбрана точка E, причем $\angle CED = 90°$. Известно, что $DE = 1$, $AB = 2$, $BE = 3$ и $BC = 4$. Докажите, что треугольник ACD — равнобедренный.

4. В Заповедном лесу живут эльфы, чародеи и гномы. Эльфы врут чародеям, чародеи врут гномам, а гномы врут эльфам. В остальных случаях все говорят правду. Как-то встали в хоровод 50 жителей леса. Каждый повернулся к своему левому соседу и назвал свой собственный вид. Затем каждый повернулся к своему правому соседу и снова представился. Оказалось, что фраза «Я чародей» прозвучала ровно 90 раз. Какое наименьшее количество чародеев могло быть в хороводе?

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 8 класс.

---

1. Саша, Андрей и Оля выбрали по натуральному числу. Каждый из них умножил числа, выбранные двумя другими ребятами, на свое число и вычел меньшее произведение из большего. У Саши получилось 1, а у Андрея 49. Сколько могло получиться у Оли? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

2. На окружности поставлено 100 красных, 101 синих и 102 зелёных точки, причём никакие две точки одинакового цвета не стоят рядом. Докажите, что найдётся синяя точка, у которой оба соседа зелёные.

3. Клетчатый прямоугольник 99×100 (99 строк, 100 столбцов) разбит на полоски 1×3 таким образом, что в каждом столбце содержится ровно k вертикальных полосок. Чему может быть равно k?

4. В трапеции $ABCD$ основание BC в два раза короче AD. Внутри трапеции отмечена такая точка F, что $AB = FB$. Докажите, что прямая, соединяющая точку C с серединой отрезка FD, перпендикулярна FA.

5. Существуют ли 10 000 последовательных восьмизначных чисел, которые можно разбить на 97 групп с равными суммами?

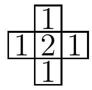
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 9 КЛАСС.

---

1. Уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет два корня. Числа, обратные к его корням, являются корнями уравнения $x^2 + (6a+1)x + (6b+1) = 0$. Найдите a и b.

2. В лагерь должны были приехать школьники. Вожатые вычислили, что их можно расселить во все имеющиеся комнаты ровно по 4 человека в комнату. Но в лагерь приехало на 70 школьников больше, чем ожидалось, и вожатые стали селить по 5 человек в комнату. Когда ровно в треть всех комнат поселили по 5 человек, вожатые поняли, что комнат не хватит и в оставшиеся комнаты они стали заселять по 6 человек. В результате все школьники поместились (последняя занятая комната могла оказаться заполненной не до конца), и ровно одна комната оказалась совсем пустой. Сколько школьников приехало в лагерь?

3. На стороне AB треугольника ABC с углом C, равным 108°, выбраны точки P и Q (P между A и Q) таким образом, что периметр треугольника CPQ равен длине стороны AB. Оказалось, что центр описанной окружности остроугольного треугольника ACQ лежит на описанной окружности треугольника PCQ. Найдите $\angle PCQ$.



4. Антон положил на клетчатую доску 46×101 несколько бумажных крестиков, изображенных на рисунке (каждый крестик покрывает ровно 5 клеток доски). Оказалось, что для каждой клетки доски сумма попавших на неё чисел не превосходит 2. Какое наибольшее количество крестиков мог положить Антон?

5. Дано натуральное число $n > 100$. Число

$$\left(0 + 1 + 2 + \ldots + n^2\right)^{n^2}$$

представляет собой произведение n^2 одинаковых сомножителей, каждый из которых равен $0 + 1 + 2 + \ldots + n^2$. Докажите что можно в каждом сомножителе вычеркнуть одно слагаемое так, чтобы результат делился на произведение всех натуральных чисел от 1 до $n^2 + n$.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 10 КЛАСС.

---

1. Ненулевые вещественные числа a, b и острый угол β таковы, что число $\cos\beta$ является корнем уравнения $4ax^2+bx-a=0$, а число $\sin\beta$ — корнем уравнения $4ax^2-bx-3a=0$. Чему может быть равно β? Не забудьте проверить, что найденные значения β подходят, и доказать, что других значений нет.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $AO\cdot BO<CO\cdot DO$. Докажите, что $\angle BCD+\angle CDA<180^\circ$.

3. Существуют ли такие правильные дроби a, b и c, что число $4ab^2c^3/3$ натуральное? (Напомним, что правильной дробью называется число вида m/n, где $m<n$ — натуральные числа.)

	1	
1	2	1
	1	

4. Антон положил на клетчатую доску 46×101 несколько бумажных крестиков, изображенных на рисунке (каждый крестик покрывает ровно 5 клеток доски). Оказалось, что для каждой клетки доски сумма попавших на неё чисел не превосходит 2. Какое наибольшее количество крестиков мог положить Антон?

5. В межгалактическом турнире по шахматам приняло участие n шахматистов, представляющих несколько планет. Каждые два участника сыграли между собой по одной партии. Оказалось, что число партий, в которых соперники представляли одну планету, равно числу партий, в которой соперники представляли разные планеты. Сколько существует значений $n\in[150\,000, 200\,000]$, для которых это возможно?

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 11 класс.

---

1. Угол $\alpha \in [0, \pi]$ и числа a, b (не равные нулю одновременно) таковы, что число $\sin\alpha$ является корнем уравнения

$$2ax^2 + bx - 2a = 0,$$

а число $\cos\alpha$ — корнем уравнения

$$2ax^2 + bx - 2b = 0.$$

При каких α это может быть?

2. Через ребро AB тетраэдра $ABCD$ проведены две плоскости. Каждая из них образует равные углы с плоскостями ABC и ABD. Одна из них проходит через середину ребра CD. Докажите, что вторая плоскость параллельна ребру CD.

3. Число, не превосходящее миллиона, поделили с остатком на 96, 97, 98 и 99. Какое наибольшее значение может быть у суммы полученных остатков?

4. Даны числа a, b и c, большие 1. Числа x, y, z удовлетворяют условиям $a^x = b^y = c$, $a^z + b^z = 2c$. Докажите, что $2z \leq x + y$.

5. На ферме живет 10 человек (2 ноги, 1 голова), а также куры (2 ноги, 2 крыла, 1 голова), овцы (4 ноги, 1 голова) и пегасы (4 ноги, 2 крыла, 1 голова). Однажды на выпас отправились несколько жителей фермы. Оказалось, что на выпас ушли $1/3$ всех голов, $1/4$ всех крыльев и $1/5$ всех ног. Докажите, что на ферме живет не больше 20 овец.