САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2022 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 6 класс.

1. Существует ли 100-значное число без нулей в записи, которое кратно всевозможным суммам своих цифр (в частности, всем своим цифрам)?

2. 10 школьников писали олимпиаду из 11 задач. Баллы за задачи определялись после проверки всех работ по правилу: если задачу решил 1 человек — 4 балла; если решили 2 человека — 2 балла; если 3 или 4 человека — 1 балл; если больше четырех — 0 баллов. Докажите, что какие-то два школьника набрали поровну баллов.

(*О. Иванова*)

3. Владик задумал натуральное число N. Он поделил его на один из его простых делителей и записал результат на доску. Затем он поделил этот результат на один из его простых делителей и записал на доску новый результат. Так он действовал до тех пор, пока не записал на доску 1. Эта единица оказалась 22-м числом, записанным на доске. Оказалось, что сумма всех записанных чисел равна $N/2$. Чему могло быть равно N? (*В. Франк*)

4. Можно ли составить какой-нибудь прямоугольник, взяв по одному квадрату

$$1 \times 1,\ 3 \times 3,\ 5 \times 5,\ \dots,\ 85 \times 85 \quad \text{и} \quad 2021 \times 2021$$

и добавив к ним несколько квадратов 2×2? (*С. Рукшин*)

. . . .

Олимпиада 2022 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

5. Очутившись на необитаемом острове, туземец Пятница в первый же день встретил Робинзона Крузо. Добрые духи обучили Пятницу, что год на острове длится ровно 365 дней, и подсказали, что лишь один день в году — 13 февраля — Робинзон говорит правду, а в другие дни лжет. Каждый день Пятница задает Робинзону Крузо один вопрос вида «Верно ли, что сегодня такое-то число такого-то месяца?». Сможет ли Пятница за 183 дня гарантированно узнать дату своего появления на необитаемом острове? (*Д. Ширяев, О. Бадажкова*)

6. На пристань прибыли 9 грузовиков. Каждый из них привез не более 10 тонн грузов, причем известно, что масса каждого отдельного груза не превосходит 1 тонны. На пристани имеется 10 барж грузоподъёмностью x тонн каждая. При каком наименьшем x весь доставленный груз гарантированно можно увезти на баржах?

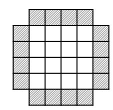
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2022 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 7 класс.

1. 10 школьников писали олимпиаду из 11 задач. Баллы за задачи определялись после проверки всех работ по правилу: если задачу решил 1 человек — 4 балла; если решили 2 человека — 2 балла; если 3 или 4 человека — 1 балл; если больше четырех — 0 баллов. Докажите, что какие-то два школьника набрали поровну баллов.

(*О. Иванова*)

2. Очутившись на необитаемом острове, в первый же день Робинзон Крузо встретил туземца Пятницу. Робинзон знает, что Пятница по пятницам говорит только правду, а в другие дни лжет. Каждый день Робинзон Крузо задает Пятнице один вопрос вида «Верно ли, что сегодня такой-то день недели?». Может ли Робинзон за 4 дня гарантированно узнать, в какой день недели он очутился на необитаемом острове? (*Д. Ширяев, О. Бадажкова*)

3. Натуральное число n называется *отличным*, если оно имеет хотя бы один нечетный простой делитель и сумма любых двух его простых делителей (в том числе одинаковых) является делителем числа n. Докажите, что любое отличное число делится на наименьшее отличное число. (*А. Солынин*)



4. Доска представляет собой квадрат 100×100 с вырезанными четырьмя угловыми клетками. В каждой клетке доски стоит число, причем каждое число (кроме чисел на границе доски) равно среднему арифметическому четырех чисел, стоящих в соседних с ним по стороне клетках. Докажите, что сумма чисел на границе доски равна удвоенной сумме чисел на двух ее диагоналях. (Для примера на рисунке закрашены клетки на границе доски 6×6.)

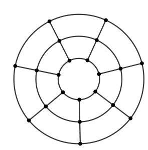
(*А. Солынин*)

. . . .

Олимпиада 2022 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отметили точку K. Точка L — середина отрезка BK. Оказалось, что $\angle AKB = \angle ALC = 90°$, $AK = CL$. Найдите углы треугольника ABC. (*А. Солынин*)

6. Найдите все тройки положительных чисел a, b, c, удовлетворяющих условиям $a + b + c = 3$, $a^2 - a \geqslant 1 - bc$, $b^2 - b \geqslant 1 - ac$, $c^2 - c \geqslant 1 - ab$. (*М. Антипов*)



7. На рисунке изображен план города. Узлы — это перекрестки, а соединяющие их 35 линий — улицы. По улицам ездят N маршруток. Все маршрутки одновременно стартуют на перекрестках, и раз в минуту одновременно перемещаются по улицам на соседние перекрестки. При этом каждая из них движется по замкнутому несамопересекающемуся маршруту. На одном перекрестке могут оказаться сразу несколько маршруток, но ни по одной улице не может двигаться одновременно более одной маршрутки. Найдите наибольшее возможное значение N. (*Д. Ширяев, О. Бадажкова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2022 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 8 класс.

1. 10 школьников писали олимпиаду из 11 задач. Баллы за задачи определялись после проверки всех работ по правилу: если задачу решил 1 человек — 4 балла; если 2 человека — 2 балла; если 3 или 4 человека — 1 балл; если больше четырех — 0 баллов. Докажите, что какие-то два школьника набрали поровну баллов.

(*О. Иванова*)

2. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = CE$. На отрезке BC выбрана точка X, а на отрезке BD — точка Y, причём $CX = EX$ и $AY = DY$. Лучи YA и XE пересекаются в точке Z. Докажите, что середина отрезка BZ лежит на прямой AE. (*А. Кузнецов*)

3. Найдите все пары целых чисел x, y, для которых $x + y$, $2x + 3y$ и $3x + y$ — точные квадраты. (*А. Голованов*)

4. На столе стоят 100 гирь различных весов. Гиря называется *удачной*, если её вес равен сумме весов каких-то двух других гирь со стола. При каком наименьшем количестве удачных гирь можно заведомо утверждать, что веса каких-то двух гирь отличаются не менее чем в три раза? (*С. Берлов*)

. . . .

Олимпиада 2022 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. В стране много городов, среди них 500 больших, остальные маленькие. Некоторые пары городов соединены дорогами так, что из любого города можно проехать в любой другой. Существует не меньше 10 000 маленьких городов, соединенных дорогой хотя бы с одним большим городом. Докажите, что можно закрыть несколько дорог так, чтобы из любого города все равно можно было бы проехать в любой другой, и было бы более 9000 городов, из которых выходит по одной дороге.

(*Д. Карпов*)

6. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle ACB = 2\angle CAB$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена точка E. Докажите, что $BC + BE > DE$.

7. Дано простое число $p > 100$. Назовем нечетное составное число $n < 4p^2$ *странным*, если для каждого его собственного делителя q хотя бы одно из чисел $q+2p$ или $q-2p$ также является натуральным делителем n. Докажите, что количество странных чисел не превосходит $\frac{p}{3}$. (*Собственным* делителем числа n называется любой делитель, отличный от 1 и n.)