САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2023 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 9 класс.

1. Вещественные числа a и b, большие 1, удовлетворяют неравенству

$$a + \frac{1}{a^2} \geq 5b - \frac{3}{b^2}.$$

Докажите, что $a > 5b - \dfrac{4}{b^2}$.

2. По кругу расставлено несколько (не менее 5) целых чисел таким образом, что каждое из них делится на сумму двух соседних. Сумма всех чисел положительна. Какое наименьшее значение она может принимать?

3. Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC. На меньшей дуге AC описанной окружности этого треугольника выбрана точка K таким образом, что угол AKM — прямой. Отрезки BK и AM пересекаются в точке X, а высота, проведенная из вершины A, пересекает отрезок BM в точке Y. Докажите, что прямые XY и AB параллельны.

4. Одна сторона квадратного листа бумаги покрашена в красный цвет, другая — в синий. С обеих сторон лист разбит на 300^2 одинаковых квадратных клеток. В каждой из этих $2 \cdot 300^2$ клеток написано число от 1 до k. Найдите наименьшее k, при котором могут одновременно выполняться свойства:

(i) на красной стороне любые два числа, стоящие в разных строках, различны;
(ii) на синей стороне любые два числа, стоящие в разных столбцах, различны;
(iii) у каждого из 300^2 квадратов разбиения число на синей стороне не равно числу на красной.

. . . .

Олимпиада 2023 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. Для натурального числа n и ненулевой цифры d обозначим через $f(n, d)$ наименьшее натуральное k, для которого число kn начинается с цифры d. Какое максимальное значение может принимать величина $f(n, d)$?

6. Барон Мюнхгаузен в шутку сказал, что рассадил 2 000 000 кроликов в 1 000 000 клеток так, что в каждой клетке оказалось не более одного кролика. Бургомистр воспринял эти слова всерьёз, и задает барону вопросы вида «верно ли, что такой-то кролик сидит в такой-то клетке». Бургомистр считает, что он уличит барона во лжи в одном из трех случаев:

1) если барон ответит «да» на вопросы про одного и того же кролика и две разные клетки;

2) если барон ответит «да» на вопросы про одну и ту же клетку и двух разных кроликов;

3) если барон ответит «нет» на вопросы про какого-то кролика и все имеющиеся клетки.

Сможет ли барон отвечать так, что бургомистр не сумеет уличить его во лжи, задав 10^{11} вопросов?

7. Дан треугольник ABC. Точка X симметрична вершине B относительно прямой AC, а точка Y симметрична C относительно прямой AB. Касательная к описанной окружности треугольника XAY, проведенная в точке A, пересекает прямые XY и BC в точках E и F соответственно. Докажите, что $AE = AF$.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2023 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 10 класс.

1. Существует ли набор из 2023 ненулевых вещественных чисел (не обязательно различных), в котором дробная часть каждого из этих чисел равна сумме остальных 2022 чисел набора?

(Напомним, что дробная часть $\{x\}$ числа x — это такое число, что $0 \leq \{x\} < 1$ и $x - \{x\}$ — целое число.)

2. На биссектрисе угла B треугольника ABC, в котором $\angle B = 120^\circ$, отмечена такая точка D, что $\angle ADB = 2\angle ACB$. На отрезке AB отмечена такая точка E, что $AE = AD$. Докажите, что $EC = ED$.

3. Найдите все натуральные x, y и простые p такие, что $x^5 + y^4 = pxy$.

4. Дано натуральное число n. Одна сторона квадратного листа бумаги покрашена в красный цвет, а другая — в синий. С обеих сторон лист разбит на n^2 одинаковых квадратных клеток. В каждой из этих $2n^2$ клеток написано число от 1 до k. Найдите наименьшее k, при котором могут одновременно выполняться следующие свойства:
(i) на красной стороне любые два числа, стоящие в разных строках, различны;
(ii) на синей стороне любые два числа, стоящие в разных столбцах, различны;
(iii) у каждого из n^2 квадратов разбиения число на синей стороне не равно числу на красной.

. . . .

Олимпиада 2023 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Даны вещественные числа $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_0$ и функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. При каждом $i = 0, 1, \ldots, n-1$ на отрезке между точками x_i и x_{i+1} выбирается произвольная точка y_i. После этого вычисляется сумма

$$(x_1 - x_0)f(y_0) + (x_2 - x_1)f(y_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1})f(y_{n-1}).$$

Докажите, что среди таких сумм есть как неположительные, так и неотрицательные.

6. В собрании клуба «Диоген» принимают участие несколько джентльменов, некоторые из которых дружат между собой (дружба взаимна). Назовём участника *нелюдимым*, если у него среди присутствующих на собрании ровно один друг. По правилам клуба единственный друг любого нелюдимого участника может покинуть собрание (джентльмены покидают собрание по одному). Цель собрания — добиться того, чтобы среди участников не осталось друзей. Докажите, что если цель вообще может быть достигнута, то количество оставшихся на собрании участников не зависит от того, кто и в каком порядке уходил.

7. Если ℓ_1 и ℓ_2 — две не параллельные прямые на плоскости, а d_1, d_2 — положительные числа, то множество таких точек X, что при $i = 1, 2$ расстояние от X до ℓ_i есть целое кратное d_i, назовём *решёткой*.

Пусть A — конечное множество точек на плоскости, не лежащих на одной прямой. Треугольник с вершинами в A назовём *пустым*, если внутри и на сторонах этого треугольника нет других точек множества A, кроме вершин. Оказалось, что все пустые треугольники с вершинами в A имеют одинаковую площадь. Докажите, что существуют решётка L и выпуклый многоугольник F такие, что $A = L \cap F$.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2023 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 класс.

1. Пусть $f(x)$ — квадратный трёхчлен, $g(x)$ — многочлен степени 3. Может ли многочлен $f(g(x))$ иметь шесть различных корней, являющихся степенями 2?

2. В треугольнике ABC проведена медиана BM. На продолжении стороны AC за точку C отмечена такая точка D, что $BD = 2CD$. Описанная окружность треугольника BMC пересекает отрезок BD в точке N. Докажите, что $AC + BM > 2MN$.

3. Несократимые дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ записали в виде чисто периодических десятичных дробей. Оказалось, что любая конечная последовательность подряд стоящих цифр, встречающаяся в первой десятичной дроби после запятой, встречается и во второй (тоже подряд и тоже после запятой). Докажите, что $b = d$.

4. За какое наименьшее число операций можно перекрасить в чёрный цвет белую доску 100×100, если за одну операцию можно перекрасить в противоположный цвет любые 99 клеток любой горизонтали или любой вертикали?

. . . .

Олимпиада 2023 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Дано натуральное число $a > 1$. Определим функцию

$$f(n) = n + \left[a\{n\sqrt{2}\,\}\right].$$

Докажите, что существует такое натуральное n, что $f(f(n)) = f(n)$, но $f(n) \neq n$.

Напомним, что $[x]$ — *целая часть* x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\} = x - [x]$ — *дробная часть* x.

6. Дан треугольник ABC. Точка X симметрична вершине B относительно прямой AC, а точка Y симметрична C относительно AB. Касательная к описанной окружности треугольника XAY, проведенная в точке A, пересекает прямые XY и BC в точках E и F соответственно. Докажите, что $AE = AF$.

7. В связном графе G даны два непересекающихся множества вершин X и Y, между этими множествами нет ни одного ребра. Пусть в графе $G - X$ ровно m компонент связности, а в графе $G - Y$ ровно n компонент связности. Какое наименьшее количество компонент связности может быть в графе $G - (X \cup Y)$?

Напомним, что для множества вершин W через $G - W$ обозначается граф, полученный из G в результате удаления всех вершин множества W и всех выходящих из них ребер.