



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
15 НОЯБРЯ 2025 Г. I ТУР 10 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Даны десять ненулевых вещественных чисел $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ из интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Известно, что

$$\operatorname{tg}(x_1) \cdot (x_1 - x_2) = \operatorname{tg}(x_2) \cdot (x_2 - x_3) = \dots = \operatorname{tg}(x_{10}) \cdot (x_{10} - x_1) = 2025.$$

Найдите $\operatorname{ctg}(x_1) + \operatorname{ctg}(x_2) + \dots + \operatorname{ctg}(x_{10})$.

2. Красный и синий баки заполняются водой — каждый своим шлангом. Шланги были включены одновременно, а когда красный бак заполнился на одну пятую, шланги поменяли местами. После этого оба бака заполнились одновременно. Объем синего бака 100 л. Какой наибольший объем мог иметь красный бак? (Скорость вытекания воды из каждого шланга постоянна, эти две скорости не обязательно равны.)

3. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle B = 80^\circ$, $\angle C = 38^\circ$. Известно, что окружность ω , проходящая через точки B и C и центр описанной окружности треугольника ABC , касается прямой CD . Из точки D к окружности ω проведена вторая касательная DE . Найдите угол AEC .

4. В городе есть несколько клубов. Два клуба назовём похожими, если у них есть общий член. Оказалось, что у каждого клуба ровно два похожих, а каждый житель состоит или в одном клубе, или в двух похожих. У мэра есть два списка. В первом записаны численности всех клубов. Во втором для каждых двух похожих клубов написано количество людей, состоящих одновременно в них обоих. Оказалось, что для любого числа из первого списка во втором списке найдется в два раза меньшее число. Докажите, что есть два клуба, в которых поровну членов.

5. У каждого из чисел $\frac{1}{2023}, \frac{2}{2023}, \dots, \frac{2022}{2023}$ нашли седьмую цифру после запятой в десятичной записи. Какая цифра — 6 или 7 — встретилась больше раз, и на сколько?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО; ДАТА РОЖДЕНИЯ; ТЕЛЕФОН; КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ; ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние. Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и olymp.academtalant.ru



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
15 НОЯБРЯ 2025 Г. I ТУР 10 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. Найдите значение суммы $\operatorname{tg}(a_1) + \operatorname{tg}(a_2) + \dots + \operatorname{tg}(a_8)$, если известно, что $a_1, a_2, \dots, a_8$ — это ненулевые вещественные числа из интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, для которых выполнены равенства

$$\operatorname{ctg}(a_1) \cdot (a_1 - a_2) = \operatorname{ctg}(a_2) \cdot (a_2 - a_3) = \dots = \operatorname{ctg}(a_8) \cdot (a_8 - a_1) = 1511.$$

2. В 9:00 каждый из двух землекопов начал копать свою яму. В некоторый момент по сигналу бригадира землекопы поменялись местами. Закончили копать они одновременно. Каждый землекоп всё время копал со своей постоянной скоростью. Итоговый объем второй ямы оказался ровно в 10 раз больше, чем её объём в момент сигнала бригадира. Итоговый объем первой ямы — 3 м^3 . Какой наибольший итоговый объём могла иметь вторая яма?

3. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle D = 82^\circ$, $\angle B = 36^\circ$. Известно, что окружность ω , проходящая через точки A и B и центр описанной окружности треугольника ABD , касается прямой BC . Из точки C к окружности ω проведена вторая касательная CK . Найдите угол BKD .

4. В классе у каждого ученика ровно два друга (дружба взаимна). Каждый день в классе дежурит или один ученик, или два ученика, являющихся друзьями. Каждый ученик написал на доске, сколько раз он дежурил в течение года (каждый дежурил хотя бы раз). Оказалось, что для каждого выписанного числа x найдутся два друга, которые дежурили вместе ровно $\frac{x}{2}$ раз. Докажите, что какие-то два школьника дежурили одинаковое количество раз.

5. У каждого из чисел $\frac{1}{2027}, \frac{2}{2027}, \dots, \frac{2026}{2027}$ нашли седьмую цифру после запятой в десятичной записи. Какая цифра — 6 или 7 — встретилась больше раз, и на сколько?

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО; ДАТА РОЖДЕНИЯ; ТЕЛЕФОН; КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ; ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние. Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и olymp.academtalant.ru