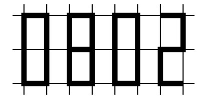
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2026 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 6 класс.



1. На клетчатом листе написана дата городской олимпиады 08.02. На написание восьмерки израсходовано 29% чернил. Это произошло потому, что сетка на самом деле не квадратная, а прямоугольная (см. рисунок). Сколько процентов чернил израсходовано на двойку?

2. На полу стоят 3 пустых ведра объёмами 2, 4 и 11 л, а также целиком заполненная водой 25-литровая бутыль. Переливая воду из одной ёмкости в другую, Вася Проливайко столько же воды проливает на пол. За одну операцию Вася переливает воду из ёмкости А в ёмкость Б, пока А не опустеет или пока Б не заполнится целиком. Как Васе такими операциями добиться того, чтобы во всех вёдрах и в бутыли воды стало поровну, если переливать воду из ведра в бутыль нельзя?

Пример: если из бутыли с 5 л воды переливают воду в пустое двухлитровое ведро, то после переливания в ведре окажется 2 л воды, 2 л будет пролито на пол, 1 л воды останется в бутыли.

3. В каждой клетке таблицы 300×300 написано одно из чисел $2, 3, \ldots, 9$, причём всех чисел написано поровну. Обязательно ли найдутся два числа, стоящие в соседних по стороне или углу клетках, одно из которых делится на другое?

4. На новогодней ёлке собралось 100 детей. С 10:00 до 18:00 каждые 5 минут (т. е. в 10:00, 10:05, …, 18:00) несколько детей вставали в хоровод вокруг ёлки. Оказалось, что за это время каждые два ребёнка побывали хотя бы в одном хороводе, держась за руки. Докажите, что каждые два ребёнка побывали хотя бы в одном хороводе, при этом за руки не держась. (В каждом хороводе участвует не менее трех детей, за руки держатся дети, стоящие рядом.)

. . . .

Олимпиада 2026 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

5. У Лёши имеется 65 пар туфель: 5 белых пар, 10 зелёных, 13 красных, 17 синих и 20 чёрных. Он не отличает туфли на ощупь и хранит их в двух тёмных шкафах: в одном левые, в другом правые. Лёша достаёт туфли по одной (и видит цвет туфли, только когда уже достал). Из какого шкафа брать очередную туфлю, он выбирает сам. Какое минимальное число туфель должен достать Лёша, чтобы среди них обязательно нашлась левая и правая туфля одного цвета?

6. Дано натуральное число $n > 1$. В порядке возрастания выписаны все натуральные числа, большие 1, на которые делится число n или число $n+1$. Оказалось, что в получившемся ряду делители чисел n и $n+1$ чередуются. На какую цифру может оканчиваться число n?

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2026 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 7 класс.

---

1. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагональ AC — биссектриса углов A и C. Костя измерил длины его сторон и получил, что $AB = 7$ см, $AE = 6$ см, $BC = 5$ см, $CD = 4$ см, $DE = 3$ см. Докажите, что Костя ошибся хотя бы в одном измерении.

2. Какое наибольшее число узлов можно выбрать из 25 узлов решетки 4×4 так, чтобы ни один из них не являлся серединой отрезка между двумя другими?

3. На доске написано десять последовательных натуральных чисел. За одну операцию можно любое число на доске умножить или поделить на 2, 3, 5 или 7. После нескольких операций оказалось, что на доске снова написано десять последовательных натуральных чисел (в некотором порядке). Докажите, что в начале и в конце на доске было хотя бы одно общее число.

4. Петя заполняет на компьютере пустую таблицу $n \times n$ натуральными числами. Компьютер запрещает ставить в клетку число, если в той же строке или в том же столбце это число уже стоит в какой-то клетке. Каждый раз Петя выбирает пустую клетку и ставит в неё наименьшее незапрещённое число. Какое максимальное число Петя сможет поставить в таблицу?

. . . .

Олимпиада 2026 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. На стороне AC треугольника ABC выбрана такая точка D, что $\angle ADB = 2\angle ABD$. Точка E на отрезке BD выбрана так, что $DC = 2DE$. Оказалось, что $\angle AED = 90°$. Докажите, что из отрезков AD, BC и удвоенного отрезка BE можно составить треугольник.

6. Вася выписал все натуральные числа, делящиеся на k, из которых вычеркиванием цифр невозможно получить (натуральное) число, делящееся на k. У него получилось всего 9 чисел. Чему могло быть равно k?

7. Произведение положительных чисел x, y, z равно 2, любые два из этих чисел отличаются не более чем в 2 раза. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$2x^2y + 2y^2z + 2z^2x - xy^2 - yz^2 - zx^2.$$

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2026 года ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 8 класс.

---

1. На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = BC$. Докажите, что отрезок BC виден из середины отрезка AD под прямым углом.

2. Вещественные числа x, y, z таковы, что

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} = 1.$$

Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2 \geq 5$.

3. Петя, Вася и Толя играют в игру. Перед ними лежит куча из 1 000 000 спичек. Они по очереди (сначала Петя, потом Вася, потом Толя и т.д.) берут спички из кучи. Петя может брать своим ходом 3 или 4 спички, Вася — 2 или 5 спичек, Толя — 1 или 6 спичек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Есть ли игрок, который может не проиграть вне зависимости от действий двух других?

4. На доске написана какая-то пара натуральных чисел (x, y). Миша может менять упорядоченную пару чисел (a, b) на $(b, 8a)$ или на $(a + b, 4a + b)$. Докажите, что на доске может появиться лишь конечное число пар вида $(2026^k, 2026^m)$, где m, k — натуральные числа. (На всякий случай напомним, что $(2, 3)$ и $(3, 2)$ — разные упорядоченные пары.)

. . . .

Олимпиада 2026 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка E, а на отрезке BE отмечена точка D так, что $CE = CD = 2AE$. На отрезке DE отмечена такая точка F, что $BF = 2DE$. Докажите, что $AD + AF > BC$.

6. Четное число m таково, что число $n = m^2 + 1$ имеет ровно 2026 натуральных делителей. Докажите, что

$$\left\{\frac{n}{1 \cdot 2}\right\} + \left\{\frac{n}{2 \cdot 3}\right\} + \ldots + \left\{\frac{n}{(m-1)m}\right\} \geq 1000.$$

(Как обычно, через $\{x\}$ обозначается *дробная часть* числа x, т. е. разность между x и наибольшим целым числом, не превосходящим x.)

7. В связном графе каждое ребро имеет цену 1, 2 или 3 рубля. Леша выделил в нем остовное дерево ценой 100 рублей, а Дима — ценой 200 рублей. Верно ли, что этот граф обязательно имеет остовное дерево ценой 150 рублей? (*Остовное дерево* связного графа — это его связный подграф на всех вершинах, не имеющий циклов. Цена остовного дерева равна сумме цен его ребер.)