

Решения задач первого дня.

1. У реки живет племя Мумбо-Юмбо. Однажды со срочным известием в соседнее племя одновременно отправились молодой воин Мумбо и мудрый шаман Юмбо. Мумбо побежал со скоростью 11 км/ч к ближайшему хранилищу плотов, и затем поплыл на плоту в соседнее племя. А Юмбо, не торопясь, со скоростью 6 км/ч, пошел к другому хранилищу плотов и поплыл в соседнее племя оттуда. В итоге Юмбо приплыл раньше, чем Мумбо.

Река прямолинейна, плоты плывут со скоростью течения. Эта скорость всюду одинакова и выражается целым числом км/ч, не меньшим 6. Каково наибольшее возможное её значение?

(М. Евдокимов, в редакции Л. Самойлова)

Ответ. 26 км/ч.

Решение. Обозначим место обитания племени Мумбо-Юмбо через O , хранилище, к которому побежал Мумбо, через M , а хранилище, к которому пошел Юмбо, через U . Очевидно, что M находится выше по течению по сравнению с O , а U — ниже.

Пусть расстояния от O до M и U равны x и y км соответственно ($x < y$), скорость реки равна v км/ч. На путь от O до U Юмбо затратил $\frac{y}{6}$ часов, а Мумбо $\frac{x}{11} + \frac{x+y}{v}$ часов. Ясно, что в соседнее племя Юмбо приплывает раньше Мумбо тогда и только тогда, когда $\frac{y}{6} < \frac{x}{11} + \frac{x+y}{v}$. Так как $x < y$, из этого неравенства следует, что $\frac{y}{6} < \frac{y}{11} + \frac{y+y}{v}$. Сократив на y и преобразовав, получаем $v < 26,4$.

Осталось проверить, что скорость реки могла равняться $\frac{y}{6}$ км/ч. Для этого в неравенстве $\frac{y}{6} < \frac{x}{11} + \frac{x+y}{v}$ положим $v = 26$ и равносильно преобразуем его к виду $\frac{y}{x} < \frac{111}{110}$. Последнее возможно (например, при $y = 1,12$ км, $x = 1,11$ км), что и завершает решение.

2. При всяком ли натуральном n , большем 2009, из дробей $\frac{1}{n}, \frac{2}{n-1}, \frac{3}{n-2}, \dots, \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1}$ можно выбрать две пары дробей с одинаковыми суммами?

(А. Шаповалов, К. Кноп)

Ответ. Да.

Решение. Каждая из данных дробей имеет вид $\frac{n+1-a}{a} = \frac{n+1}{a} - 1$, где $1 \leq a \leq n$. Стало быть, нам требуется найти такие различные натуральные числа a, b, c и d , не большие 2009, для которых $\left(\frac{n+1}{a} - 1\right) + \left(\frac{n+1}{b} - 1\right) = \left(\frac{n+1}{c} - 1\right) + \left(\frac{n+1}{d} - 1\right)$, что равносильно $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$.

Осталось подобрать дроби, удовлетворяющие этому равенству. Это можно сделать, взяв любое равенство двух сумм различных натуральных слагаемых, НОК которых не больше 2009, и поделив его на этот НОК. Например, равенство $1 + 4 = 2 + 3$, поделенное на 12, даёт $\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$.

3. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Точка D внутри треугольника такова, что угол ADC вдвое больше угла ABC . Докажите, что удвоенное расстояние от точки B до прямой, делящей пополам углы, смежные с углом ADC , равно $AD + DC$.

(С. Берлов)

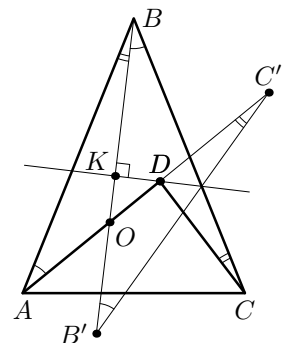
Решение. Пусть ℓ — биссектриса углов, смежных с $\angle ADC$, точка K — проекция B на ℓ , а точки B' и C' симметричны соответственно точкам B и C относительно ℓ . Тогда $BB' = 2BK$ — как раз удвоенное расстояние от B до ℓ . Кроме того, точка D лежит на отрезке AC' (так как прямые DA и DC симметричны относительно ℓ), и $AC' = AD + DC' = AD + DC$. Далее, из той же симметрии получаем $\angle AC'B' = \angle DC'B' = \angle DCB$, $\angle BB'C' = \angle B'BC$.

Пусть отрезки BB' и AC' пересекаются в точке O . Из прямоугольного треугольника OKD получаем

$$\angle BOC' = \angle KOD = 90^\circ - \angle KDO = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CDC') = \frac{1}{2}\angle ADC = \angle ABC.$$

Значит,

$$\angle ABB' = \angle ABC - \angle B'BC = \angle BOC' - \angle OB'C' = \angle OC'B'.$$



Аналогично,

$$\angle BAO = \angle BOC' - \angle ABO = \angle ABC - \angle ABO = \angle B'BC = \angle BB'C'.$$

Таким образом, треугольники ABO и $B'C'O$ равны по стороне и двум прилежащим углам. Отсюда $BB' = BO + OB' = C'O + OA = AC' = AD + DC$, что и требовалось.

4. В стране Леонардии все дороги — с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Департамент статистики вычислил для каждого города суммарное число жителей в городах, откуда в него ведут дороги, и суммарное число жителей в городах, куда ведут дороги из него. Докажите, что хотя бы для одного города первое число оказалось не меньше второго. (Н.Гравин)

Первое решение. Построим граф, вершины которого соответствуют жителям страны, причем две вершины соединены направленным ребром в том и только том случае, когда их города соединены дорогой (направление на ребре будет такое же, как и на дороге между городами). Для каждой вершины v обозначим через $f(v)$ разность количества ребер, входящих в v , и количества ребер, выходящих из v . Сумма величин $f(v)$ по всем вершинам графа равна 0, так как каждое ребро вносит в нее одну $+1$ и одну -1 . Значит, найдется такая вершина u , что $f(u) \geq 0$. Остается лишь отметить, что $f(u)$ в точности равна разности первого и второго чисел для города, в котором живет u .

Второе решение. Для каждого города A обозначим через $n(A)$ число жителей в этом городе, а через $f(A)$ разность суммарного количества жителей в городах, дороги из которых входят в A , и суммарного количества жителей в городах, в которые выходят дороги из A (то есть в точности разность первого и второго чисел для города A). Если утверждение задачи неверно, то $f(A) < 0$ для каждого города A .

Обозначим через S сумму чисел $n(A)f(A)$ по всем городам страны. С одной стороны, $S < 0$ как сумма нескольких отрицательных чисел. С другой стороны, рассмотрим любую дорогу из A в B . В число $n(B)f(B)$ эта дорога «вносит вклад» $+n(B)n(A)$, а в число $n(A)f(A)$ — «вклад» $-n(A)n(B)$. Рассмотрев все дороги, получим, что $S = 0$. Противоречие.

Замечание. Отметим, что во втором решении мы использовали лишь тот факт, что «число жителей города» — положительное число. Не требуется, чтобы оно было целым.