Математическая олимпиада имени Леонарда Эйлера
3 (заключительный) этап, 24–27 марта 2009 г.

Второй день.

5. Можно ли вместо звездочек вставить в выражение

$$\text{НОК}(*,*,*) - \text{НОК}(*,*,*) = 2009$$

в некотором порядке шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы равенство стало верным?

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнены соотношения $AB = BD$, $\angle ABD = \angle DBC$. На диагонали BD нашлась точка K такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KAD = \angle KCD$.

7. На столе лежит 10 кучек с 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 орехами. Двое играющих берут по очереди по одному ореху. Игра заканчивается, когда на столе останется 3 ореха. Если это — три кучки по одному ореху, выигрывает тот, кто ходил вторым, иначе — его соперник. Кто из игроков может выигрывать, как бы не играл соперник?

8. На бесконечной ленте выписаны в ряд числа. Первой идёт единица, а каждое следующее число получается из предыдущего прибавлением к нему наименьшей ненулевой цифры его десятичной записи. Сколько знаков в десятичной записи числа, стоящего в этом ряду на $9 \cdot 1000^{1000}$-ом месте?

Математическая олимпиада имени Леонарда Эйлера
3 (заключительный) этап, 24–27 марта 2009 г.

Второй день.

5. Можно ли вместо звездочек вставить в выражение

$$\text{НОК}(*,*,*) - \text{НОК}(*,*,*) = 2009$$

в некотором порядке шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы равенство стало верным?

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнены соотношения $AB = BD$, $\angle ABD = \angle DBC$. На диагонали BD нашлась точка K такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KAD = \angle KCD$.

7. На столе лежит 10 кучек с 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 орехами. Двое играющих берут по очереди по одному ореху. Игра заканчивается, когда на столе останется 3 ореха. Если это — три кучки по одному ореху, выигрывает тот, кто ходил вторым, иначе — его соперник. Кто из игроков может выигрывать, как бы не играл соперник?

8. На бесконечной ленте выписаны в ряд числа. Первой идёт единица, а каждое следующее число получается из предыдущего прибавлением к нему наименьшей ненулевой цифры его десятичной записи. Сколько знаков в десятичной записи числа, стоящего в этом ряду на $9 \cdot 1000^{1000}$-ом месте?