XV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий заключительного этапа, 2 день

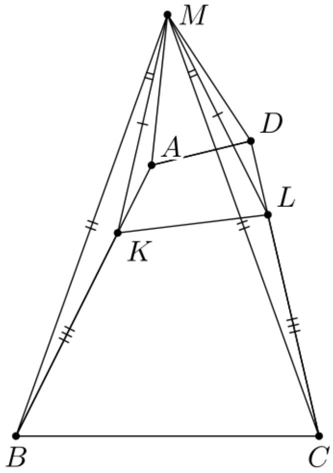
5. *Маша взяла четыре различных положительных числа и записала шесть их попарных произведений в ряд в порядке возрастания. Могли ли все пять разностей между соседними числами этого ряда оказаться одинаковыми?* (И. Рубанов)

Ответ. Нет. **Решение**. Упорядочим Машины числа: $0 < a < b < c < d$. Тогда первое и второе числа в ряду произведений равны ab и ac, а пятое и шестое — bd и cd. Допустим, все пять разностей между соседними произведениями оказались одинаковыми. Тогда, в частности, должно выполняться равенство $ac–ab = cd–bd$. Но если в нем перенести все члены в левую часть и разложить ее на множители, то получим $(a–d)(c–b) = 0$, откуда либо $c = b$, либо $a = d$. Противоречие.

6. *В Тридевятом царстве 100 городов, и каждые два города соединены не более чем одной дорогой. Однажды царь приказал ввести на каждой дороге одностороннее движение, а заодно покрасить каждую дорогу в белый или черный цвет. Министр транспорта с гордостью сообщил, что после выполнения приказа из любого города в любой другой можно добраться по дорогам, чередуя их цвета, причем так, что первая дорога в пути будет белой. Какое наименьшее количество дорог могло быть в этой стране? Добираясь из города в город, можно проезжать через промежуточные города любое число раз.* (М. Антипов)

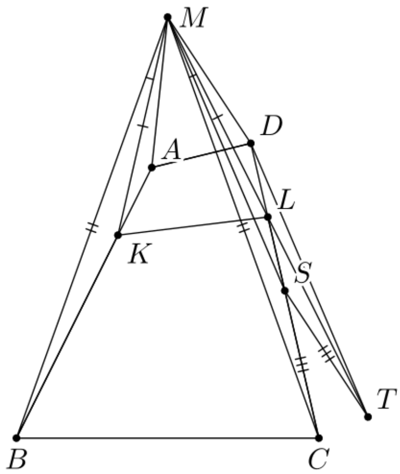
Ответ. 150. **Решение**. Пример. Расположим города на окружности так, чтобы они делили ее на равные дуги, и объявим дорогами эти дуги, направленные по часовой стрелке. Покрасим эти 100 дуг в белый и черный цвета так, чтобы цвета на окружности чередовались. Еще 50 белых дорог направим по хордам, от городов, из которых исходят черные дороги, в города, находящиеся от них через один по часовой стрелке. Очевидно, описанная конструкция удовлетворяет приказу царя. Оценка. Докажем более общий факт: если в царстве $2k$ городов, то дорог должно быть не меньше, чем $3k$. Пусть это не так. Возьмем наименьшее натуральное k такое, что в царстве из $2k$ городов можно обойтись меньше, чем $3k$ дорогами. Тут $k > 1$, так как для двух городов приказ, очевидно, невыполним. Заметим, что белых дорог среди них не меньше $2k$, так как из каждого города должна выходить белая дорога. Значит, черных дорог не больше, чем $k–1$, и потому найдутся хотя бы два города без черных дорог. Выбросим их вместе со связанными с ними дорогами. При этом мы удалим не меньше трех дорог, так как из каждого из двух городов можно было выехать и можно было в него въехать, и не более чем одна такая дорога учтена дважды. Итак, теперь у нас $2(k–1)$ городов и меньше $3(k–1)$ дорог. Но, поскольку через выброшенные города не мог проходить ни один маршрут с чередующимися цветами дорог, оставшиеся города с дорогами по-прежнему удовлетворяют условию царя, что противоречит минимальности числа k.

7. *Дан выпуклый четырёхугольник ABCD, в котором AB = BC = CD = 4. На сторонах AB и CD выбраны точки K и L соответственно таким образом, что AK = DL = 1. На стороне AD снаружи четырёхугольника построен треугольник AMD, в котором AM = MD = 2. Оказалось, что KL = 2. Докажите, что BM = CM.* (Ц. Французов)



Первое решение. Заметим, что треугольник MDL подобен треугольнику CDM с коэффициентом 2 ($CD = 2MD$, $DM = 2DL$, угол при вершине D — общий), поэтому $MC = 2ML$. Аналогично, $MB = 2MK$. Поэтому треугольник MLK подобен треугольнику MCB. Следовательно, $\angle LMK = \angle BMC$ и потому $\angle LMC = \angle KMB$. Значит, треугольник LMC подобен треугольнику BMK. Но $LC = BK$, значит эти треугольники равны, откуда и получаем $BM = CM$.

Второе решение. Докажем, что $MC = 2ML$. Пусть T — такая точка на луче ML, что $MT = 2ML$, и пусть S — середина CD. Тогда $MSTD$ — параллелограмм, ибо его диагонали делятся друг другом пополам. Заметим, что $MD = DS = 2$, поэтому $\angle SMD = \angle MSD$. значит, $\angle MST = 180°–\angle SMD = 180°–\angle MSD = \angle MSC$. Значит, треугольники MST и MSC равны по двум сторонам ($ST = MD = SC = 2$, MS — общая) и углу между ними. Поэтому $MC = MT = 2MS$. Аналогично, $MB = 2MK$. Значит, стороны треугольника MKL равны соответственно половинам сторон треугольника MBC ($KL = 2 = BC/2$ по условию), и треугольник MKL равен треугольнику с вершинами в M и серединах отрезков MB и MC. Отсюда $\angle LMK = \angle BMC$. Осталось повторить две последние фразы первого решения.



8. *Дано натуральное число k, большее 1. Натуральное число n, большее 1 и взаимно простое с k, назовём* ***правильным****, если для любого натурального делителя d (d < n) числа n число d+k не взаимно просто с n. Докажите, что правильных чисел — конечное количество.* (С. Берлов)

Решение. Если правильное число n — простое, то $1+k$ должно делиться на n, и таких правильных чисел конечное количество. Если правильное число n равно степени p^s простого числа, где $s \geq 2$, то $p+k$ и $1+k$ не взаимно просты с n, откуда k делится на p, и, следовательно, 1 делится на p, противоречие. Поэтому такое n не может быть правильным. Таким образом, составное правильное число n имеет хотя бы два различных простых делителя p и q. Положим $t = \dfrac{n}{pq}$. По условию $pt+k$ должно иметь общий простой делитель с n, но это может быть только q, поскольку на остальные простые делители n делится pt, а k взаимно просто с n. Аналогично, $qt+k$ делится на p. Значит, t взаимно просто с pq, т. е. все простые сомножители входят в разложение n в первой степени. Но число $t+k$ тоже должно иметь общий простой делитель с n. Это может быть только p или q — не умаляя общности можно считать, что p. Тогда оба числа $qt+k$ и $t+k$ делятся на p. Поэтому делится на p и их разность $t(q–1)$, а, значит, и $q–1$. Из этого следует, что если r — самый большой простой делитель n, то $r–1$ делится на все остальные простые делители n, а, значит, делится и на их произведение, равное $\frac{n}{r}$, т. е. $r-1=x\cdot\frac{n}{r}$. Но число $\frac{n}{r}+k$ должно иметь общий простой делитель с n, это может быть только r. Т. е. $\frac{n}{r}+k$ делится на $x\cdot\frac{n}{r}+1$. Если $x=1$, то $k–1$ делится на $\frac{n}{r}+1$, если же $x\geq 2$, то $\frac{n}{r}+k>2\cdot\frac{n}{r}$. В любом случае, $k>\frac{n}{r}$ и $2k>\frac{n}{r}+k\geq r$, поэтому $n<2k^2$, откуда и вытекает утверждение задачи.