1961

6-й класс

1961.01. Некоторую работу умеют выполнить трое рабочих. Второй и третий могут вместе выполнить ее в два раза быстрее первого, первый и третий могут вместе выполнить ее в три раза быстрее второго. Во сколько раз первый и второй могут выполнить эту работу быстрее, чем третий?

1961.02. Доказать, что наибольший общий делитель суммы двух чисел и их наименьшего общего кратного равен наибольшему общему делителю самих чисел.

1961.03. На консультации было 20 школьников и разбиралось 20 задач. Оказалось, что каждый школьник решил две задачи и каждую задачу решило два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый рассказал одну задачу и все задачи были рассказаны.

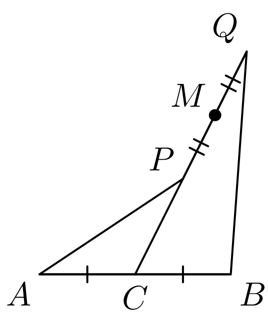
1961.04. Два человека A и B должны попасть из пункта M в пункт N, расположенный в 15 км от M. Пешком они могут передвигаться со скоростью 6 км/ч. Кроме того, в их распоряжении есть велосипед, на котором можно ехать со скоростью 15 км/ч. A и B отправляются из M одновременно, A — пешком, а B едет на велосипеде, до встречи с пешеходом C, идущим из N в M. Дальше B идет пешком, а C едет на велосипеде до встречи с A, передает ему велосипед, на котором тот и приезжает в N. Когда должен выйти из N пешеход C, чтобы A и B прибыли в N одновременно, если он идет с той же скоростью, что и A и B?

1961.05. Докажите, что из любых шести человек всегда найдутся трое попарно знакомых или трое попарно незнакомых между собой.

7-й класс

1961.06. См. задачу 1.

1961.07. Даны окружность O и квадрат K, а также прямая L. Постройте отрезок данной длины, параллельный L и такой, что его концы лежат на O и K соответственно.



1961.08. Трехзначное число $\overline{abc}$ делится на 37. Докажите, что сумма чисел $\overline{abc}$ и $\overline{abc}$ тоже делится на 37.

1961.09. Точка C — середина отрезка AB. На произвольном луче, проведенном из точки C и не лежащем на прямой AB, выбраны три последовательные точки P, M и Q так, что $PM = MQ$. Докажите, что $AP + BQ > 2CM$.

1961.10. Дано $2n+1$ различных предметов. Докажите, что из них можно выбрать нечетное число предметов столькими же способами, сколькими четное.

8-й класс

1961.11. Построить четырехугольник по длинам сторон и расстоянию между серединами диагоналей.

1961.12. Известно, что a, b и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ — рациональные числа. Докажите, что тогда $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ — рациональны.

1961.13. Решите уравнение $x^3 - [x] = 3$.

1961.14. Докажите, что если в треугольнике биссектриса угла при вершине делит пополам угол между медианой и высотой, то треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный.

1961.15. Дано n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, каждое из которых равно $+1$ или -1. При этом

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0\,.$$

Докажите, что n делится на 4.

1961.16. На окружности отмечено n точек, причем известно, что для любых двух одна из дуг, соединяющих их, имеет величину, меньшую 120°. Докажите, что все точки лежат на дуге величиной 120°.

9-й класс

1961.17. Постройте треугольник по прямым, на которых лежат биссектрисы, и одной вершине.

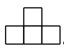
1961.18. См. задачу 13.

1961.19. На плоскости дано $2n$ точек. Докажите, что их можно попарно соединить так, чтобы отрезки не пересекались.

1961.20. Дан угол, равный α, и треугольник ABC такой, что

$$\angle A + \angle B = \alpha\,.$$

Найдите траекторию, которую опишет вершина C, если вершины A и B треугольника будут скользить по сторонам угла.

1961.21. Докажите, что шахматную доску 10×10 нельзя покрыть фигурками вида .

1961.22. Даны три ненулевых целых числа k, m и n, причем k и m взаимно просты. Докажите, что найдется такое целое x, что $mx+n$ делится на k.

1961.23. (доп.)[1] Докажите, что все числа вида

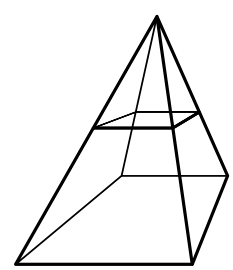
$$1156, \quad 111556, \quad 11115556, \quad \ldots$$

являются точными квадратами.

10, 11-е классы

1961.24. В основании пирамиды объема V лежит трапеция с основаниями m и n. Плоскость отсекает от нее пирамиду объема U, а в сечении получается снова трапеция с основаниями m_1 и n_1. Докажите, что

$$\frac{U}{V} = \frac{(m_1+n_1)m_1n_1}{(m+n)mn}\,.$$



1961.25.* В школе изучают $2n$ предметов. Все ученики учатся на 4 и 5 и никакие два не учатся одинаково. Ни про каких двух нельзя сказать, что один во всем учится лучше другого. Докажите, что число учеников в школе не превосходит $\frac{(2n)!}{n!n!}$.

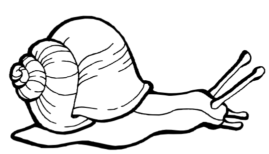
[1] Дополнительная задача 9 класса, возможно, была предложена вместо одной из задач основного варианта. В некоторых архивных вариантах эта задача есть, в некоторых — нет.

1961.26. Найдите наименьшее значение выражения $(a^2 + x^2)/x$, где $a > 0$ — константа, а $x > 0$ — переменная.

1961.27. Пусть $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ — многочлен с целыми коэффициентами, а p — его рациональный корень. Докажите, что p — целое число, и $f(m)$ делится на $p - m$ при любом целом m.

1961.28. Докажите, что $\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ = 3\sqrt{3}$.

1961.29. Каждая грань куба заклеивается двумя прямоугольными треугольниками, один из которых — белый, а другой — черный. Докажите, что существует только два существенно различных (т. е. не совмещающихся при поворотах куба) способа оклеивания таких, что суммы белых и черных углов, сходящихся в каждой вершине, одинаковы.



1961.30. Улитка ползет по столу с постоянной скоростью. Через каждые 15 минут она поворачивает на 90°, а в промежутках между поворотами она ползет по прямой. Докажите, что она может вернуться в исходный пункт только через целое число часов.