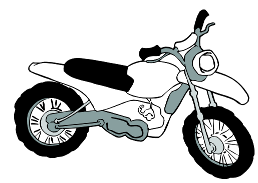
1962

6-й класс



1962.01. Из города A в город B одновременно направились три человека, имеющие один двухместный мотоцикл. Как они должны действовать, чтобы время, за которое последний из них доберется до B, было наименьшим? Определите это время. Скорость пешехода — 5 км/час, мотоцикла — 45 км/час, расстояние от A до B равно 60 километров.

1962.02. Числа A и B взаимно просты. Какие общие делители могут иметь числа $A + B$ и $A - B$?

1962.03. Возраст человека в 1962 году был на единицу больше суммы цифр года его рождения. Сколько ему лет?

1962.04. 15 журналов лежат на столе, полностью покрывая его. Докажите, что можно убрать восемь из них так, что оставшиеся журналы будут покрывать не менее $7/15$ площади стола.

1962.05. Докажите, что шахматную доску 201×201 можно обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле ровно один раз.

1962.06. Может ли целое число, две последние цифры которого нечетны, быть квадратом другого целого числа?

7-й класс

1962.07. Докажите, что из сторон произвольного четырехугольника можно сложить трапецию.

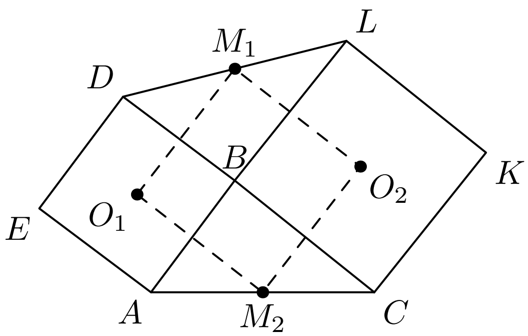
1962.08. См. задачу 2.

1962.09. См. задачу 4.

1962.10. В шестизначном числе, которое делится на 7, последнюю цифру переставили в начало. Докажите, что полученное число также делится на 7.

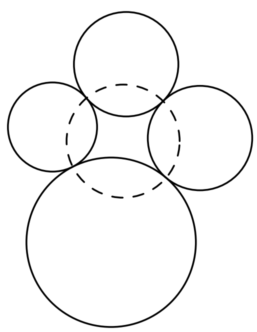
1962.11.* Круг разбит на 49 областей так, что никакие три области не соприкасаются в одной точке. Полученная "карта" раскрашивается в три цвета так, чтобы никакие две соседние области не имели одного цвета. Граница двух областей считается окрашенной в оба цвета.

Докажите, что на окружности найдутся две диаметрально противоположные точки, окрашенные в один цвет.



1962.12. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены квадраты $ABDE$ и $BCKL$ с центрами O_1 и O_2. M_1 и M_2 — середины отрезков DL и AC. Докажите, что $O_1M_1O_2M_2$ — квадрат.

8-й класс



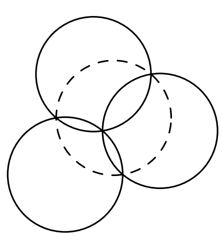
1962.13. Четыре окружности размещены на плоскости так, что каждая касается внешним образом двух других. Докажите, что точки касания размещены на одной окружности.

1962.14. Пусть целые числа a и b могут быть представлены в виде $x^2 - 5y^2$, где x и y — целые числа. Докажите, что число ab также может быть представлено в таком виде.

1962.15. Решите уравнение $x(x+d)(x+2d)(x+3d) = a$.

1962.16. Пусть $a+b+c=1$, $m+n+p=1$. Докажите, что

$$-1 \leqslant am + bn + cp \leqslant 1\,.$$



1962.17. Впишите в полукруг треугольник наибольшей площади.

1962.18. Три окружности одного радиуса пересекаются в одной точке. Докажите, что три другие точки пересечения лежат на окружности того же радиуса.

1962.19. Найдите круг наименьшего радиуса, вмещающий данный треугольник.

1962.20. Дан многочлен $x^{2n} + a_1x^{2n-2} + a_2x^{2n-4} + \ldots + a_{n-1}x^2 + a_n$, который делится на $x - 1$. Докажите, что он делится на $x^2 - 1$.

1962.21. Докажите, что для любого простого числа p, отличного от 2 и от 5, существует натуральное k такое, что в десятичной записи числа pk участвуют только единицы.

9-й класс

1962.22. См. задачу 16.

1962.23. См. задачу 20.

1962.24. В единичной квадратной решетке берется произвольный единичный квадрат. Докажите, что одно из расстояний от произвольного узла решетки до вершин этого квадрата иррационально.

1962.25. Сумма десяти чисел равна нулю. Сумма всех их попарных произведений также равна нулю. Докажите, что и сумма кубов этих чисел равна нулю.

1962.26. Внутри остроугольного треугольника взята точка, расстояния от которой до вершин треугольника меньше наименьшей стороны. Докажите, что сумма расстояний от нее до вершин треугольника не превосходит трёх четвертей периметра треугольника.

1962.27. См. задачу 21.

1962.28. На плоскости дано n точек, не лежащих на одной прямой. Докажите, что можно найти замкнутую ломаную без самопересечений с концами звеньев в этих точках.

1962.29.* Груз весом $13,5$ тонн разложен в ящики, вес каждого из которых после этого не превосходит 350 кг. Докажите, что весь груз можно увезти на 11 полуторатонках.

10-й класс

1962.30. В единичный квадрат вписан четырехугольник с вершинами на всех сторонах квадрата. Докажите, что одна из его сторон имеет длину не менее $1/\sqrt{2}$.

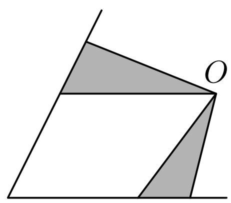
1962.31. Сумма десяти чисел равна нулю. Сумма всех их попарных произведений также равна нулю. Найдите сумму их четвертых степеней.

1962.32. Освободитесь от иррациональности в знаменателе

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}\,.$$

1962.33. Решите уравнение

$$(3x+2)^4+(2x-4)^4=(2x+3)^4+(4x-2)^4\,.$$



1962.34. Дан угол и два отрезка на его сторонах. Точка O, лежащая внутри угла, соединена с концами этих отрезков, и сумма площадей двух получившихся треугольников равна S. Найдите геометрическое место точек M таких, что аналогичная сумма площадей равна S.

1962.35. Найдите сумму $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}kx$.

1962.36. Решите в натуральных числах уравнение:

$$1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{n}}}}}=\cfrac{1}{x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{1}{x_3+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{x_n}}}}}\,,$$

1962.37. Дан многогранник. Число сторон всех его граней, кроме одной, делится на данное натуральное n, большее 1. Докажите, что грани этого многогранника нельзя раскрасить двумя красками так, чтобы соседние грани были окрашены в разные цвета.

1962.38. В выпуклом n-угольнике все стороны и диагонали продолжены до прямых. При этом никакие две из проведенных прямых не параллельны и никакие три прямых не пересекаются в одной точке. Сколько у них точек пересечения внутри n-угольника и сколько вне?

11-й класс

1962.39. См. задачу 30.

1962.40. Дан многочлен $x^{kn} + a_1 x^{k(n-1)} + a_2 x^{k(n-2)} + \ldots + a_{n-1} x^k + a_n$, который делится на $x - 1$. Докажите, что он делится на $x^k - 1$.

1962.41. См. задачу 33.

1962.42. Найдите сумму $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^2$.

1962.43. См. задачу 32.

1962.44. См. задачу 34.

1962.45. См. задачу 37.

1962.46. См. задачу 36.

1962.47. Внутри квадрата 1×1 помещен выпуклый многоугольник площади, большей $^1/_2$. Докажите, что в многоугольнике найдется хорда длины большей $^1/_2$, параллельная любой заранее выбранной стороне квадрата.

Отборочный тур

1962.48. Докажите, что семью кругами радиуса 1 можно покрыть полностью круг радиуса 2, но нельзя покрыть круг большего радиуса.

1962.49. В квадрат площади 5 помещено 9 многоугольников, каждый площади 1. Докажите, что какие-то два из них имеют пересечение площади не меньшей $^1/_9$.

1962.50. Сфера разбита на три области, каждая из которых окрашена в свой цвет, а границы областей — в оба цвета. Докажите, что найдется диаметр, концы которого окрашены одинаково.

1962.51. Докажите, что число, записываемое только нулями и единицами, причем количество единиц не меньше двух, не может быть точным квадратом.

1962.52. Докажите, что из k целых чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на k.

1962.53. Решите уравнение $(x^{n(n-1)/2} - x^{[n/2]})/(x - 1) = 0$.

1962.54.* Рассматриваются бесконечные последовательности, состоящие из чисел $1, 2, \ldots, n$. Два члена в двух последовательностях назовем одинаковыми, если они равны и имеют одинаковые номера. Сколько можно составить последовательностей так, чтобы любые две из них имели ровно k одинаковых членов?

Комментарий.

1. Задача 11 в архивных материалах представлена в различных вариантах, в том числе и в формулировках, почти не имеющих смысла. В представленном виде задача верна, хотя и подозрительно трудна для олимпиады 7 класса тех лет.
2. В некоторых архивных вариантах задача 32 сформулирована для конкретных значений, а именно: $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.
3. Хотя в единственном архивном варианте 9 класса содержится восемь задач, однако их, скорее всего, должно быть девять. По всей видимости, девятой задачей этого варианта является задача 37.