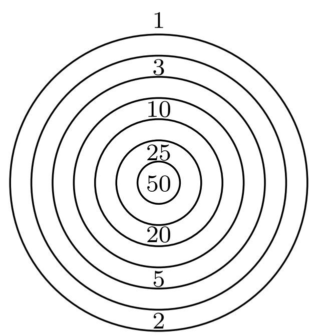
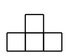
1964

6-й класс

1964.01. Три стрелка — Анилов, Борисов и Воробьев — сделали по 6 выстрелов по одной мишени и выбили поровну очков. Известно, что Анилов за первые три выстрела выбил 43 очка, а Борисов первым выстрелом выбил 3 очка. Сколько очков на каждый выстрел выбил каждый стрелок, если в 50 было одно попадание, в 25 — два, в 20 — три, в 10 — три, в 5 — два, в 3 — два, в 2 — два, в 1 — три?



1964.02. Докажите, что шахматную доску 10×10 нельзя покрыть 25 фигурами вида .

1964.03. В клетках шахматной доски стоят натуральные числа так, что каждое равно среднему арифметическому своих соседей. Сумма чисел, стоящих в углах доски, равна 16. Найдите число, стоящее на поле $e2$.

1964.04. Имеется таблица 100×100. Каково наименьшее число букв, которые можно расставить в ее клетках так, чтобы никакие две одинаковые буквы не стояли рядом?

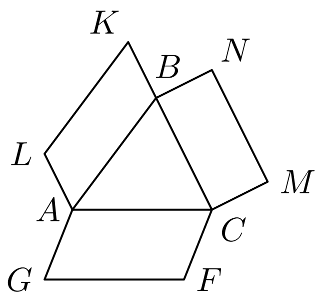
1964.05. Отряд пионеров выстроен прямоугольником. В каждой шеренге отмечается самый высокий, и из этих пионеров выбирается самый низкий. В каждом ряду отмечается самый низкий, и из них выбирается самый высокий. Какой из этих двух пионеров выше? [1]

[1] Имеется в виду, что два указанных пионера — самый высокий из низких и самый низкий из высоких — должны быть разными.

1964.06. Найдите произведение трёх чисел, сумма которых равна сумме их квадратов, равна сумме их кубов и равна 1.

7-й класс

1964.07. Дан выпуклый n-угольник, все углы которого — тупые. Докажите, что сумма длин диагоналей в нем больше суммы длин сторон.

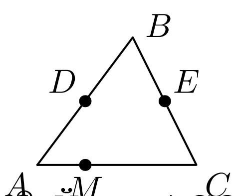


1964.08. Найдите все целые значения для x и x такие, чтобы $x^4 + 4x^4$ было простым числом.

1964.09. Дан треугольник ABC. На его сторонах строятся параллелограммы $ABKL$, $BCMN$ и $ACFG$. Докажите, что из отрезков KN, MF и GL можно составить треугольник.

1964.10. См. задачу 2.

1964.11. Найдите наибольшее количество различных натуральных чисел, каждое из которых меньше 50, и каждые два из которых взаимно просты.



1964.12. Дан треугольник ABC, D и E — середины сторон AB и BC. Точка M лежит на AC, $ME > EC$. Докажите, что $MD < AD$.

8-й класс

1964.13. Найдите все простые p, q и r такие, что

$$pqr = 5(p + q + r)\,.$$

1964.14. Докажите, что если $\overline{ab}/\overline{bc} = a/c$, то

$$\overline{abb\ldots bb}/\overline{bb\ldots bbc} = a/c$$

(в каждом числе по n цифр).

1964.15. Постройте треугольник по периметру, высоте и углу при основании.

1964.16. Докажите, что квадрат суммы N различных ненулевых квадратов целых чисел также является суммой N квадратов не равных нулю целых чисел.

1964.17. В четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Докажите, что если окружности, вписанные в ABC и ADC, касаются друг друга, то и окружности, вписанные в BAD и в BCD, также касаются друг друга.

1964.18. Если числа A и n взаимно просты, то найдутся целые X и Y такие, что $|X| < \sqrt{n}$, $|Y| < \sqrt{n}$ и $AX - Y$ делится на n. Докажите это.

9-й класс

1964.19. См. задачу 15.

1964.20. Внутри единичного квадрата расположена 51 точка. Докажите, что среди них найдутся три, умещающиеся в круге с радиусом $1/7$.

1964.21. Докажите, что если для натурального N

$$\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right] = 2 + \left[\frac{n-1}{1}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n-1}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{n-1}{n-1}\right],$$

то число N — простое.

1964.22. См. задачу 16.

1964.23. В треугольнике ABC вершина A соединена с точкой D, лежащей на BC.

а) Докажите, что центры окружностей, описанных около ABD, ADC, ABC, и точка A лежат на одной окружности.

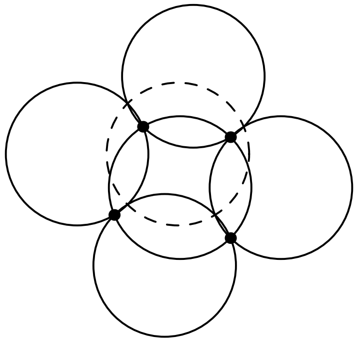
б) Найдите точку D, для которой радиус этой окружности минимален.

1964.24. См. задачу 18.

10, 11-е классы

1964.25. Внутри единичного квадрата расположен выпуклый N-угольник P. Докажите, что найдутся три вершины A, B и C N-угольника P такие, что $S(ABC) \leqslant 100/N^2$.

1964.26. На плоскости задана система координат. Пусть N — число точек с целыми координатами (x, y), удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 < n$, где n — целое число. Докажите, что $N \geqslant 3(n-1)^2$.



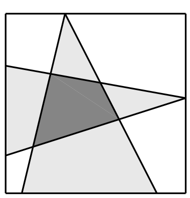
1964.27. Дана окружность единичного радиуса и на ней 4 точки. Через каждые две соседние точки проведена окружность единичного радиуса. Докажите, что четыре других точки пересечения последовательных окружностей лежат на одной окружности.

1964.28. Пусть α_n — показатель, с которым двойка входит в разложение числа n. Положим $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Докажите, что в последовательности S_1, S_2, S_3, $\ldots$, S_{2^n-1} количества четных и нечетных чисел отличаются на единицу.

1964.29. На плоскости даны две точки A и B и прямая L. Найдите на прямой L точку E такую, что $AE + BE = d$, где d — заданное число.

1964.30. Пусть S — набор натуральных чисел, меньших данного простого числа P и таких, что если в набор входят числа A и B, то в него входят и остатки от деления AB, A и B на P. Докажите, что если в S не менее двух чисел, то сумма чисел, входящих в S, делится на P.

Отборочный тур



1964.31. Вершины двух остроугольных треугольников лежат на разных парах противоположных сторон единичного квадрата. Докажите, что площадь их общей части не больше учетверенного произведения площадей треугольников.

1964.32. Имеется набор натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, среди которых могут быть и одинаковые. Обозначим через f_k количество чисел этого набора, не меньших k. Докажите, что $f_1 + f_2 + \ldots = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

1964.33. Единичный квадрат покрыт n фигурами так, что каждая его точка принадлежит по крайней мере q фигурам. Докажите, что хотя бы одна фигура имеет площадь, не меньшую q/n.

1964.34. Пусть все вещественные числа разбиты на две группы. Докажите, что для любого $k > 0$ найдутся три числа $a < b < c$ из одной группы такие, что $(c - b)/(b - a) = k$.

1964.35. В правильном треугольнике с единичной стороной разместите треугольник с данными углами так, чтобы он имел максимальную площадь.

1964.36.* Есть N чеканщиков. Некоторые из них изготовляют только фальшивые монеты, а другие — только настоящие. Вес фальшивой монеты отличен от веса настоящей. Имеются весы с полным набором гирь и одна заведомо настоящая монета. У каждого чеканщика можно взять сколько угодно монет. Как с помощью трёх взвешиваний определить всех фальшивомонетчиков?