1965

6-й класс

1965.01. В переплетной мастерской было 92 листа белой бумаги и 135 листов цветной бумаги. На переплет каждой книги уходило по листу белой и по листу цветной бумаги. После переплета нескольких книг белой бумаги оказалось вдвое меньше, чем цветной. Сколько книг было переплетено?

1965.02. Докажите, что если перемножить все целые числа от 1 до 1965, то получится число, последняя ненулевая цифра которого четна.

1965.03. Передние покрышки автомобиля стираются через 25000 километров пути, а задние через 15000 километров пути. Когда нужно поменять покрышки местами, чтобы они стерлись одновременно?

1965.04. Прямоугольник 19 см $\times$ 65 см разбит прямыми, параллельными его сторонам, на квадратики со стороной 1 см. На сколько частей разобьется этот прямоугольник, если в нем провести еще и диагональ?

1965.05. Найдите делимое, делитель и частное в примере:

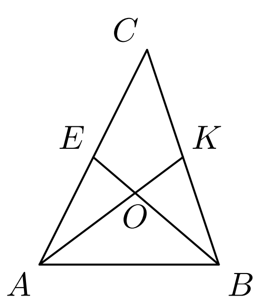
$$\begin{array}{r|l}
XXXXXX & XXX \\ \cline{2-2}
\underline{XXXX} & XXX \\
XXX & \\
\underline{XXX} & \\
XXXX & \\
\underline{XXXX} & \\
0 &
\end{array}$$

1965.06. Нечетные числа от 1 до 49 выписаны в виде таблицы

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49

Выбираются 5 чисел, любые два из которых не стоят в одной строке или в одном столбце. Чему равна их сумма?

7-й класс



1965.07. Докажите, что натуральное число, имеющее нечетное число делителей, является точным квадратом.

1965.08. В треугольнике ABC с площадью S проведены медианы AK и BE, пересекающиеся в точке O. Найдите площадь четырехугольника $CKOE$.

1965.09. Передние покрышки автомобиля стираются через 25000 километров, а задние через 15000 километров. Когда нужно поменять покрышки местами, чтобы автомобиль проехал возможно большее расстояние с теми же покрышками?

1965.10. Прямоугольник 24×60 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на единичные квадраты. На сколько частей разобьется этот прямоугольник, если в нем провести еще и диагональ?

1965.11. Пусть $[A]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее A. Решите уравнение:

$$[(5+6x)/8] = (15x-7)/5\,.$$

1965.12. На белую плоскость брызнули черной краской. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1965 метрам.

8-й класс

1965.13. Прямоугольник 24×60 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на единичные квадраты. Проведите еще одну прямую так, чтобы после этого прямоугольник оказался разбитым на наибольшее возможное число частей.

1965.14. Инженеры всегда говорят правду, а коммерсанты всегда лгут. F и G — инженеры. A объявляет, что B утверждает, что C уверяет, что D говорит, что E настаивает на том, что F отрицает, что G — инженер. C объявляет также, что D — коммерсант. Если A — коммерсант, то сколько всего коммерсантов в этой компании?

1965.15. Через поле идет прямая дорога. Турист стоит на дороге в точке A. Он может идти по дороге со скоростью 6 км/час и по полю со скоростью 3 км/час. Найдите геометрическое место точек, в которые турист может попасть за час ходьбы.

1965.16. См. задачу 11.

1965.17. В некотором государстве каждые два города соединены дорогой. На каждой дороге разрешено движение только в одну сторону. Докажите, что найдется город, выехав из которого можно объехать все государство, побывав в каждом городе ровно один раз.

1965.18. Найдите все восьмерки простых чисел такие, что сумма квадратов чисел в восьмерке на 992 меньше, чем их учетверенное произведение.

9-й класс

1965.19. Дан угол. Двумя отрезками единичной длины нужно отсечь от него четырехугольник наибольшей площади.

1965.20. См. задачу 14.

1965.21. Параллелограмм разбит прямыми, параллельными его сторонам, на несколько частей, причем одна из его сторон разбита на M частей, а другая — на N частей. На какое наибольшее число частей можно разбить параллелограмм, если провести еще одну прямую?

1965.22. Длины сторон треугольника ABC удовлетворяют соотношению $|AB| \cdot |BC| \cdot |AC| \leqslant 60$. На сторонах AB, BC и AC выбираются соответственно точки C', A' и B'. Докажите, что

$$|AC'| \cdot |C'B| \cdot |BA'| \cdot |A'C| \cdot |CB'| \cdot |B'A| < |AB| \cdot |BC| \cdot |AC| \,.$$

1965.23. Пусть A_1, A_2, ..., A_n и B_1, B_2, ..., B_n — две перестановки чисел 1, 2, 3,..., n. Докажите, что при четном n какие-то два числа из набора $A_1 + B_1$, $A_2 + B_2$, ..., $A_n + B_n$ дают при делении на n одинаковые остатки.

1965.24.* N кругов на плоскости занимают площадь 1. Докажите, что из них можно выбрать несколько непересекающихся кругов, сумма площадей которых больше $1/9$.

10, 11-е классы

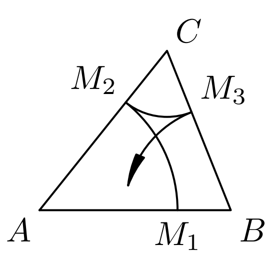
1965.25. Решите в целых числах уравнение

$$6xy - 4x + 9y - 366 = 0 \,.$$

1965.26. Найдите сумму

$$\frac{1}{\cos\alpha\cos 2\alpha} + \frac{1}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha} + \ldots + \frac{1}{\cos(n-1)\alpha\cos n\alpha} \,.$$

1965.27. См. задачу 23.



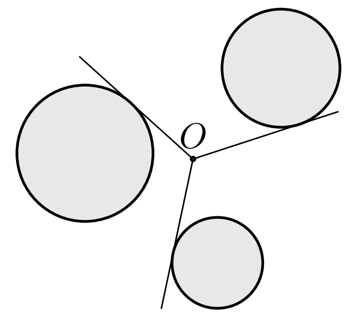
1965.28. Вариант 10 класса: На стороне AB треугольника ABC взята произвольная точка M_1. Из центра A радиусом AM_1 проводится внутри ABC дуга M_1M_2 до стороны AC ($M_2 \in AC$), затем из центра C радиусом CM_2 проводится внутри ABC дуга M_2M_3 до стороны BC ($M_3 \in BC$), из центра B радиусом BM_3 дуга M_3M_4 до стороны AB и т.д., пока линия дуг не замкнется. Найдите длину полученной замкнутой линии, если даны длины сторон треугольника и величины его углов.

Вариант 11 класса: Докажите неравенство

$$(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}(a^n + b^n) \,,$$

где a и b — неотрицательные числа.

1965.29. Дан куб $12 \times 12 \times 12$, который разрезан плоскостями, параллельными граням куба, на единичные кубики. На сколько частей разделится куб, если в нем провести сечение в виде правильного шестиугольника?



1965.30. Даны три окружности. Найдите на плоскости такую точку, чтобы правые касательные, проведенные из нее к окружностям, образовывали одна с другой равные углы.

Отборочный тур

1965.31.* В клетках таблицы $n \times n$ стоят неотрицательные целые числа, причем если в какой-то клетке стоит нуль, то сумма всех чисел, стоящих в одной строке или в одном столбце с этой клеткой, не меньше n. Докажите, что сумма чисел в таблице не меньше $n/2$.

1965.32. Про положительные числа a, b, c, x, y, z известно, что $a < b < c$; $a \leqslant x < y < z \leqslant c$; $abc = xyz$; $a + b + c = x + y + z$. Докажите, что $a = x$, $b = y$, $c = z$.

1965.33. Среди всех многочленов вида $x^2 + ax + b$ найти такой, у которого максимум модуля на отрезке $[-1; 1]$ минимален.

1965.34. Докажите, что площадь квадрата, помещенного в треугольник, не превосходит половины площади треугольника.

1965.35. На клетчатой плоскости дана фигура площади меньшей 1. Докажите, что эту фигуру можно перенести так, чтобы внутри нее не оказалось ни одного узла решетки.

1965.36.* Найдите геометрическое место центров правильных треугольников, описанных вокруг данного треугольника.

Комментарий.

В 1965 году проводился также и дополнительный отбор для выявления членов команды Ленинграда на Всесоюзной олимпиаде по математике. Его задачи входят в раздел “Дополнительные задачи”.