1967

6-Й КЛАСС

1967.01. Вместимости кубических сосудов относятся как $1 : 8 : 27$, а объемы налитой в них жидкости как $1 : 2 : 3$. После этого из первого во второй сосуд перелили некоторое количество жидкости, а затем из второго в третий так, что во всех трёх сосудах уровень жидкости стал одинаковый. После этого перелили из первого сосуда во второй $128\,{}^4\!/_7$ литра, а из второго в первый назад столько, чтобы высота столба жидкости в первом сосуде стала вдвое больше, чем во втором. Выяснилось, что в первом сосуде на 100 литров меньше, чем вначале. Сколько жидкости было исходно в каждом сосуде?

1967.02. Сколько раз в сутки совпадают все три стрелки на часах, включая секундную?

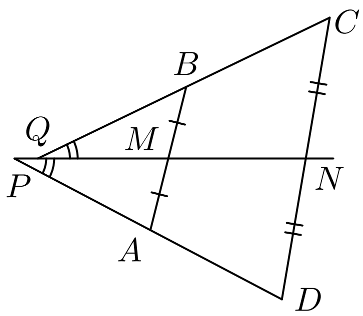
1967.03. Докажите, что в Ленинграде найдутся два человека, у которых одинаковое количество знакомых ленинградцев.

1967.04. Каждое из восьми данных различных натуральных чисел меньше 16. Докажите, что среди их попарных разностей есть по крайней мере три одинаковых.

1967.05. Расстояние AB равно 100 км. Из A и B одновременно выезжают навстречу друг другу велосипедисты со скоростями 20 км/час и 30 км/час соответственно. Вместе с первым из A вылетает муха со скоростью 50 км/час, она летит до встречи с велосипедистом из B, после чего разворачивается и летит обратно до встречи с велосипедистом из A, после чего разворачивается и т. д. Сколько километров пролетит муха в направлении от A к B до момента встречи велосипедистов?

7-Й КЛАСС

1967.06. Постройте трапецию по четырем сторонам.



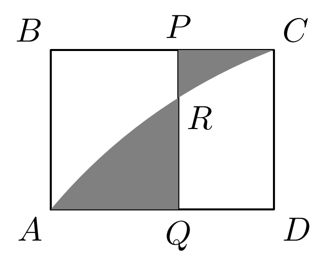
1967.07. Докажите, что

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{100})(1 + x^{102}) - 102x^{101} \geqslant 0\,.$$

1967.08. В четырехугольнике $ABCD$ M — середина AB, N — середина CD. Прямые AD и BC пересекают MN в точках P и Q соответственно. Докажите, что если $\angle BQM = \angle APM$, то $BC = AD$.

1967.09. См. задачу 4.

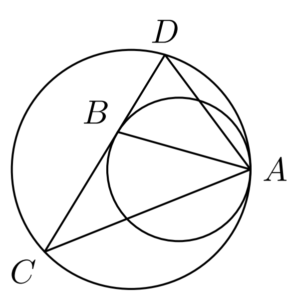
1967.10. Через вершины A и C прямоугольника $ABCD$ проведена дуга окружности, целиком лежащая внутри прямоугольника. Проведите прямую, параллельную AB, пересекающую BC в точке P и AD в точке Q, а дугу AC в точке R так, чтобы сумма площадей фигур AQR и CPR была наименьшей.



1967.11. См. задачу 5.

8-й класс

1967.12. x и y — корни уравнения $t^2 - ct - c = 0$. Докажите, что выполнено неравенство $x^3 + y^3 + (xy)^3 \geqslant 0$.



1967.13. Две окружности внутренне касаются в точке A. Через точку B внутренней окружности, отличную от A, проведена касательная к этой окружности, пересекающая внешнюю окружность в точках C и D. Докажите, что AB — биссектриса угла CAD.

1967.14. Докажите, что $2^{3^{100}} + 1$ делится на 3^{101}.

1967.15. См. задачу 10.

1967.16. В некоторой группе людей у каждого есть один враг и один друг. Докажите, что этих людей можно разбить на две компании так, что в каждой компании не будет ни врагов, ни друзей.

1967.17. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ таковы, что

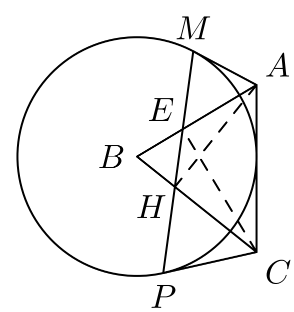
$$\begin{gathered} a_1 - 2a_2 + a_3 \leqslant 0 \\ a_2 - 2a_3 + a_4 \leqslant 0 \\ \ldots \\ a_{98} - 2a_{99} + a_{100} \leqslant 0 \end{gathered}$$

и при этом $a_1 = a_{100} \geqslant 0$. Докажите, что все эти числа неотрицательны.

9-й класс

1967.18. Даны последовательные нечетные числа p и q. Докажите, что $p^p + q^q$ делится на $p + q$.

1967.19. С центром в точке B проведена окружность, касающаяся стороны AC треугольника ABC. Из вершин A и C проведены к этой окружности касательные AM и CP. Прямая MP пересекает прямую AB в точке E, а прямую BC в точке H. Докажите, что AH и CE — высоты в ABC.



1967.20. Дана последовательность из k чисел. Разрешается любое число заменить на сумму чисел, стоящих справа от него. Докажите, что если эту операцию проделать достаточно много раз, то какая-нибудь последовательность повторится два раза подряд.

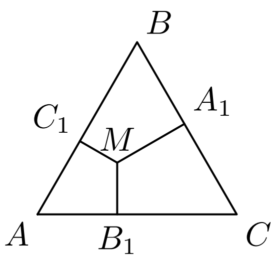
1967.21. Из 106 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, четыре являются вершинами единичного квадрата, а остальные лежат внутри этого квадрата. Докажите, что имеется по крайней мере 107 треугольников с вершинами в этих точках, имеющих площадь не больше $0,01$.

1967.22. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$, B — наибольшее из чисел $|b_1|, |b_1 + b_2|, \ldots, |b_1 + b_2 + \ldots + b_n|$. Докажите, что $|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \leqslant Ba_1$.

1967.23. В лесу, имеющем форму выпуклого многоугольника площади 1 км^2, заблудился человек. Докажите, что он всегда может выйти из леса, пройдя путь, меньший 2507 метров.

10-й класс

1967.24. Даны последовательные нечетные числа p и q. Докажите, что $p^q + q^p$ делится на $p + q$.



1967.25. Точка M лежит внутри равностороннего треугольника ABC, A_1, B_1, C_1 — ее проекции на стороны BC, AC, AB соответственно. Докажите, что $AB_1 \cdot BC_1 + BC_1 \cdot CA_1 + CA_1 \cdot AB_1 = AC_1 \cdot BA_1 + BA_1 \cdot CB_1 + CB_1 \cdot AC_1$.

1967.26. См. задачу 20.

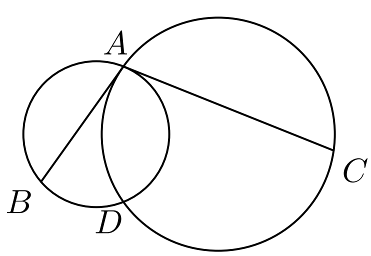
1967.27. См. задачу 22.

1967.28. См. задачу 23.

1967.29. Докажите, что на плоскости существует такая конечная система точек, что для каждой точки этой системы найдется по крайней мере сто равноудаленных от нее точек этой системы.

Отборочный тур

1967.30. Найдите на клетчатой бумаге фигуру, составленную из наименьшего числа клеток и обладающую тем свойством, что если двое играют в крестики-нолики на клетках этой фигуры, то начинающий всегда сможет первым поставить три крестика подряд.



1967.31. Две окружности пересекаются в точке A; AB и AC — их хорды, являющиеся одновременно касательными к другой окружности в точке A. Обозначим вторую точку пересечения окружностей через D. Докажите, что $|AB|^2/|AC|^2 = |BD|/|CD|$.

1967.32. Два многочлена с вещественными коэффициентами принимают целые значения в одних и тех же точках. Докажите, что либо их сумма, либо их разность есть константа.

1967.33.* На сторонах треугольника взяли по точке и соединили их отрезками. При этом получилось четыре маленьких треугольника. Известно, что периметры всех этих треугольников равны. Докажите, что взятые точки совпадают с серединами сторон.

1967.34. В компании 18 человек. Докажите, что среди них есть четверо попарно незнакомых людей или среди них есть четверо попарно знакомых.

1967.35.* В квадратной таблице размерами $N \times N$ записаны неотрицательные числа так, что их сумма в любой строке, равно как и сумма в любом столбце, равна 1. Докажите, что в этой таблице можно выбрать N положительных чисел, никакие два из которых не будут находиться в одной строке или в одном столбце.

1967.36. Дана последовательность $0 < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{25} < a_{26}$, причем $a_n = 2\sqrt{a_{n-1}^2 - a_{n-1}^4}$ при $0 < n \leqslant 26$. Докажите, что $a_0 < 7 \cdot 10^{-8}$.