1968

6-й класс

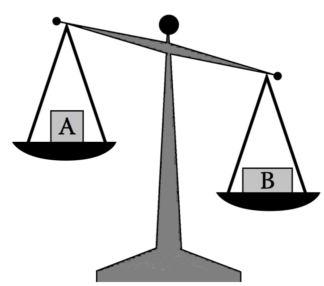
1968.01. Ученик купил портфель, авторучку и книгу. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка в 2 раза дешевле, а книга в $2\,{}^1\!/_2$ раза дешевле, то вся покупка стоила бы 2 рубля. Если бы портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка в 4 раза дешевле, а книга в 3 раза дешевле, то вся покупка стоила бы 3 рубля. Сколько же она сто́ит на самом деле?

1968.02. Какое число больше:

$$\underbrace{888\ldots88}_{19\text{ цифр}}\cdot\underbrace{333\ldots33}_{68\text{ цифр}} \text{ или } \underbrace{444\ldots44}_{19\text{ цифр}}\cdot\underbrace{666\ldots67}_{68\text{ цифр}}$$

и на сколько?

1968.03. Расстояние между Лугой и Волховом 194 км, между Волховом и Лодейным Полем 116 км, между Лодейным Полем и Псковом 451 км, между Псковом и Лугой 141 км. Каково расстояние между Псковом и Волховом?



1968.04. Имеются 4 предмета попарно различного веса. Как с помощью чашечных весов без гирь пятью взвешиваниями расположить все эти предметы в порядке возрастания весов?

1968.05. Несколько команд приняло участие в волейбольном турнире. Команда а считается сильнее команды B, если либо A выиграла у B, либо имеется команда c такая, что A выиграла у C, а C выиграла у B. Докажите, что если команда T — победительница турнира, то она сильнее всех остальных команд.

1968.06. В задаче 1 определите, что дороже: портфель или авторучка.

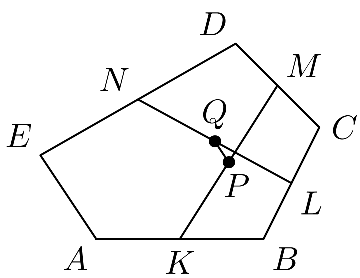
7-й класс

1968.07. В квадрат вписан прямоугольник, не являющийся квадратом. Докажите, что его полупериметр равен диагонали квадрата.

1968.08. Найдите пять чисел, попарные суммы которых равны 0, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 17.

1968.09. В 1000-значном числе все цифры, кроме одной, пятерки. Докажите, что это число не является точным квадратом.

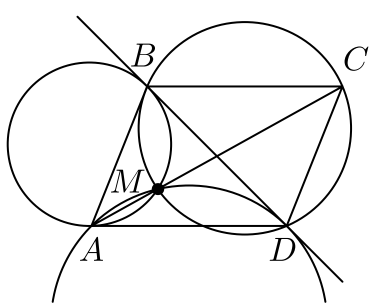
1968.10. См. задачу 5.



1968.11. В пятиугольнике $ABCDE$ K — середина AB, L — середина BC, M — середина CD, N — середина DE, P — середина KM, Q — середина LN. Докажите, что отрезок PQ параллелен стороне AE и равен ее четверти.

1968.12. В круг радиуса 3 произвольным образом помещено несколько кругов, сумма радиусов которых равна 25. Докажите, что найдется прямая, которая пересекает не менее 9 из этих кругов.

8-й класс



1968.13. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD. Точка M на диагонали AC такова, что около четырехугольника $BCDM$ можно описать окружность. Докажите, что BD — общая касательная окружностей, описанных около треугольников ABM и ADM.

1968.14. A — нечетное целое число, X и Y — корни уравнения $t^2 + At - 1 = 0$. Докажите, что $X^4 + Y^4$ и $X^5 + Y^5$ — целые взаимно простые числа.

1968.15. Правильный треугольник отражается симметрично относительно одной из своих сторон. Новый треугольник снова отражается симметрично относительно одной из своих сторон. Это повторяется несколько раз. Оказалось, что полученный в конце концов треугольник совпадает с исходным. Докажите, что было сделано четное число отражений.

1968.16. См. задачу 12.

1968.17. Все двузначные числа, не оканчивающиеся нулем, выписывают одно за другим так, что каждое следующее число начинается с той же цифры, на которую оканчивается предыдущее число. Докажите, что можно это сделать, и найдите сумму наибольшего и наименьшего из всех многозначных чисел, которые можно получить таким способом.

1968.18.* Все 10-значные числа, состоящие из цифр 1, 2 и 3, подписали одно под другим. К каждому числу приписали справа еще одну цифру 1, 2 или 3, причем оказалось, что к числу $111\ldots11$ приписали 1, к числу $222\ldots22$ приписали 2, а к числу $333\ldots33$ приписали 3. Известно, что к любым двум числам, которые отличаются во всех десяти разрядах, приписаны разные цифры. Докажите, что приписанный столбец цифр совпадает с одним из десяти столбцов, написанных ранее.

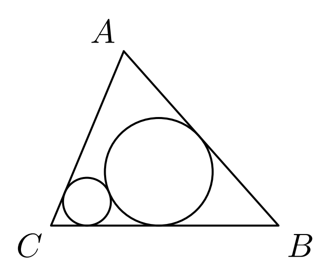
9-й класс

1968.19. Решите уравнение $x = 1 - 1968(1 - 1968x^2)^2$.

1968.20. Постройте четырехугольник по серединам трёх сторон, про которые заранее известно, что они равны по длине (а также дано, какая из трёх данных точек является серединой средней из этих трёх сторон).

1968.21. Бесконечный лист клетчатой бумаги закрашен 9 красками так, что каждая клетка закрашена в один цвет, и все краски использованы. Две краски назовем соседними, если найдутся две клетки с общей стороной, закрашенные этими красками. Каково наименьшее возможное число пар соседних красок?

1968.22. В остроугольный треугольник ABC помещены две окружности, касающиеся сторон AC и BC, и сторон AB и BC соответственно, а также друг друга. Докажите, что сумма их радиусов больше радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC.



1968.23. Докажите, что при любом натуральном N

$$1!\,(N-1)! + 2!\,(N-2)! + \ldots + (N-1)!\,1! \leqslant \frac{2}{N}!\,.$$

1968.24.* Докажите, что равносторонний треугольник нельзя разрезать на несколько попарно неравных равносторонних треугольников.

10-й класс

1968.25. Треугольники ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ с площадями S, S_1, S_2 таковы, что $AB = A_1B_1 + A_2B_2$, $BC = B_1C_1 + B_2C_2$, $AC = A_1C_1 + A_2C_2$. Докажите, что $S \geqslant 4\sqrt{S_1S_2}$.

1968.26. Сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} \cos x_1 = x_2\,, \\ \cos x_2 = x_3\,, \\ \quad \ldots \\ \cos x_n = x_1 \quad ? \end{cases}$$

1968.27. ABC и $A_1B_1C_1$ — правильные одинаково ориентированные треугольники. $AA_1 = a$, $BB_1 = b$. Угол между AA_1 и BB_1 равен α. Найдите CC_1.

1968.28. См. задачу 21 для 10 красок.

1968.29.* Докажите, что правильный тетраэдр нельзя разрезать на несколько попарно различных правильных тетраэдров.

1968.30.* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, k — натуральное число. Докажите, что

$$(\sqrt{2}-1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \leqslant \sqrt[k]{a_1^k \cdot 2 + a_2^k \cdot 2^2 + \ldots + a_n^k \cdot 2^n}\,.$$

Отборочный тур

1968.31. В окружности проведены две хорды AB и AC. Из середины M дуги BAC опущен перпендикуляр на бóльшую из хорд. Докажите, что его основание делит пополам ломаную BAC.

1968.32. На окружности дано N точек. Двое играют в игру: передвигают карандаш из одной точки в другую по отрезку, соединяющему эти точки. Ходы делаются по очереди, причем запрещается дважды проводить один и тот же отрезок. Проигрывает тот, кто не имеет хода. Докажите, что первый игрок выигрывает при правильной игре.

1968.33. На плоскости дано M точек, причем не все они лежат на одной прямой. Докажите, что можно найти не менее $(M-1)(M-2)/2$ треугольников с вершинами в этих точках.

1968.34. $a_1, a_2, \ldots, a_p$ — вещественные числа, M — самое большое из них, а m — самое маленькое. Докажите, что

$$(p-1)(M-m) \leqslant \sum_{i<j} |a_i - a_j| \leqslant p^2 \frac{(M-m)}{4}\,.$$

1968.35. Докажите, что сумма расстояний от точки внутри тетраэдра до его вершин меньше его периметра.

1968.36.* Найдите такое целое n, что среди цифр десятичной записи числа 5^n есть по крайней мере 1968 нулей подряд.

1968.37.* Дан выпуклый многогранник, в каждой вершине которого сходится три грани. Каждая грань закрашена в один из четырех цветов, причем грани с общим ребром имеют разный цвет. Докажите, что число граней первого цвета с нечетным числом сторон имеет ту же четность, что и число граней второго цвета с нечетным числом сторон.

1968.38. Назовем словом любую конечную последовательность букв А и Б. Есть две операции над словами:

1) В любом месте слова вставить А и в конце слова приписать Б.

2) В любом месте слова вставить АБ.

Докажите, что слова, которые можно получить из слова АБ, используя только первую операцию, — это те и только те слова, которые можно получить из слова АБ, используя только вторую операцию.

Комментарий.

Представленный выше вариант отборочного тура был обнаружен лишь в одном архиве и потому не может считаться стопроцентно верным.