1969

6-й класс

1969.01. На шахматной доске стоят 8 ладей так, что никакие две из них не бьют друг друга. Докажите, что на черных полях стоит четное число ладей.

1969.02. В таблице 3×3 расставлены натуральные числа Коля и Петя вычеркнули по 4 числа. Оказалось, что сумма чисел, вычеркнутых Петей, втрое больше суммы чисел, вычеркнутых Колей. Какое число осталось невычеркнутым?

4	12	8
13	24	14
7	5	23

1969.03. Миша и Саша выехали в полдень на велосипедах из города А в город В. Одновременно из В в А выехал Ваня. Все трое едут с постоянными, но различными скоростями. В час дня Саша был ровно посередине между Мишей и Ваней, а в половину второго Ваня был посередине между Мишей и Сашей. Когда Миша будет ровно посередине между Сашей и Ваней?

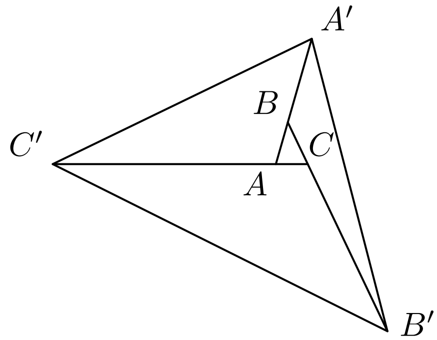
1969.04. На столе лежат 35 кучек орехов. Разрешается добавлять по одному ореху одновременно к любым 23 кучкам. Докажите, что повторяя эту операцию, можно уравнять все кучки.

1969.05. На круглом барабане 64 вертикальных полосы, и в каждую полосу нужно записать шестизначное число из цифр 1 и 2 так, чтобы все числа были различными и любые два соседних различались ровно в одном разряде. Как это сделать?

1969.06. Двум гениальным математикам сообщили по натуральному числу и сказали, что эти числа отличаются на единицу. После этого они по очереди задают друг другу один и тот же вопрос: “Знаешь ли ты мое число?” Докажите, что рано или поздно один из них ответит положительно.

7-й класс

1969.07. См. задачу 1.



1969.08. Стороны треугольника ABC продолжают так, как показано на рисунке. При этом $AA' = 3\,AB$, $BB' = 5\,BC$, $CC' = 8\,CA$. Во сколько раз площадь треугольника ABC меньше площади треугольника $A'B'C'$?

1969.09. Докажите тождество

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\ldots+\frac{20}{x^2-100}=$$
$$=11\left[\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\ldots+\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right]$$

1969.10.* В центре поля, имеющего форму квадрата, находится волк, а в вершинах квадрата — четыре собаки. Волк может бегать по всему полю, а собаки — только по сторонам квадрата. Известно, что волк задирает собаку, но две собаки задирают волка. Максимальная скорость каждой собаки в полтора раза больше максимальной скорости волка. Докажите, что собаки имеют возможность не выпустить волка из квадрата.

1969.11. Колхоз состоит из 4 деревень, расположенных в вершинах квадрата со стороной 10 км. Он имеет средства на прокладку 28 километров дорог. Может ли колхоз построить такую систему дорог, чтобы по ней можно было попасть из любой деревни в любую другую?

1969.12. См. задачу 6.

8-й класс

1969.13. На основании AD трапеции $ABCD$ нашлась такая точка E, что периметры треугольников ABE, BCE и CDE равны. Докажите, что $BC = AD/2$.

1969.14. В выпуклом пятиугольнике длины всех сторон равны. Найдите на наибольшей диагонали точку, из которой все стороны видны под углами, не превышающими прямого.

1969.15. В некотором государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединен авиалиниями не более, чем с тремя другими и из любого города в любой другой можно проехать, сделав не более одной пересадки. Какое максимальное число городов может быть в этом государстве?

1969.16. См. задачу 10.

1969.17. Четыре различных трехзначных числа, начинающихся с одной цифры, обладают тем свойством, что их сумма делится на три из них без остатка. Найдите эти числа.

1969.18. Дана конечная последовательность нулей и единиц, обладающая двумя свойствами:

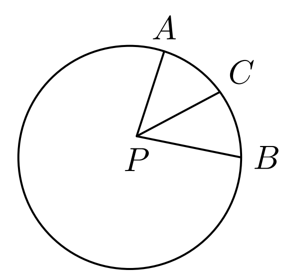
а) если в некотором произвольном месте последовательности выделить пять цифр подряд и в любом другом месте тоже выделить пять цифр подряд, то эти пятерки будут различны (они могут и перекрываться);

б) если к последовательности добавить справа любую цифру, то свойство (а) перестанет выполняться.

Докажите, что первая четверка цифр нашей последовательности совпадает с последней четверкой.

9-й класс

1969.19. A и B — две точки на окружности, C — середина дуги AB, а точка P лежит внутри окружности, причем $AP < BP$. Докажите, что $\angle APC > \angle BPC$.



1969.20. Трамвайный билет называют счастливым *по-ленинградски*, если сумма первых трёх его цифр равна сумме трёх последних цифр. Трамвайный билет называют счастливым *по-московски*, если сумма его цифр, стоящих на четных местах, равна сумме его цифр, стоящих на нечетных местах. Сколько существует билетов, счастливых и по-ленинградски, и по-московски, включая и билет $000\,000$?

1969.21. m, n — натуральные числа, причем $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$. Докажите, что $\frac{m}{n} < \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.

1969.22. Найдите геометрическое место центров прямоугольников, описанных вокруг данного выпуклого четырехугольника.

1969.23. $k > 1$ — натуральное число. Последовательность (x_n) строится следующим образом: $x_1 = 1, x_2 = k, x_n = kx_{n-1} - x_{n-2}$ при $n > 2$. Докажите, что для любого натурального n существует такое $m > n$, что x_m делится на x_n.

1969.24.* В дом отдыха с четырехразовым питанием на 15 дней приехала группа из 60 отдыхающих. За обеденным столом 61 место. На одном месте постоянно сидит директор дома отдыха. Директор хочет сам познакомиться с каждым отдыхающим и перезнакомить их между собой. Для этого он хочет сажать отдыхающих каждый раз по-новому, чтобы ни один из них не сидел дважды на одном и том же месте и чтобы у всех отдыхающих и у директора каждый раз был новый сосед справа. Как это сделать?

10-й класс

1969.25. В тетраэдре $ABCD$ AB перпендикулярно CD, O — произвольная точка пространства. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки O до середин ребер AC и BD равна сумме квадратов расстояний от точки O до середин AD и BC.

1969.26. См. задачу 20.

1969.27. См. задачу 24.

1969.28. $K > 1$ — натуральное число. Последовательность (x_n) строится следующим образом: $x_1 = 1$, $x_2 = K$, $x_n = Kx_{n-1} - x_{n-2}$ при $n > 2$. Докажите, что для любого натурального n существует такое $m > n$, что $x_m - 1$ и x_n взаимно просты.

1969.29. Постройте такую последовательность натуральных чисел, что среди разностей между ее членами встречаются все натуральные числа ровно по одному разу.

1969.30.* AA', BB' и CC' — высоты остроугольного треугольника ABC с длинами соответствующих сторон a, b и c. A_1 и A_2 — проекции точки A' на стороны AB и AC соответственно, B_1 и B_2 — проекции точки B' на стороны BC и BA соответственно, C_1 и C_2 — проекции точки C' на стороны CA и CB соответственно. Докажите, что

$$a^2S(A'A_1A_2) + b^2S(B'B_1B_2) + c^2S(C'C_1C_2) = \frac{S^3}{R^2},$$

где S — площадь треугольника ABC, а R — радиус описанного около него круга.

Отборочный тур

1969.31. Каким наименьшим числом кругов радиуса 1 можно покрыть круг радиуса $1,5$?

1969.32.* На площади собралось 50 гангстеров. Они одновременно стреляют друг в друга, причем каждый стреляет в ближайшего к нему или в одного из ближайших (гангстеры стреляют без промаха и убивают наповал). Каково минимальное возможное количество убитых?

1969.33. Сумма положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равна 1. Докажите, что

$$\sum_{i<j} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leqslant \frac{n-1}{4}\,.$$

1969.34. Плоскость раскрашена в три цвета. Докажите, что на ней можно найти треугольник площади 1, все вершины которого окрашены в один и тот же цвет.

1969.35.* Из квадрата со стороной $1\,000\,000$ вырезан квадратный уголок со стороной $0,001$. Оставшаяся часть квадрата разбита на 10 прямоугольников. Докажите, что хотя бы в одном из них отношение длин сторон больше девяти.

1969.36. Центры четырех одинаковых кругов расположены в вершинах квадрата. Постройте четырехугольник наибольшего периметра с вершинами на этих окружностях.

1969.37. $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — многочлены с целыми коэффициентами. Докажите, что при некотором целом a все числа $F_1(a)$, $F_2(a)$, $\ldots$, $F_n(a)$ — составные.

1969.38.* $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ — натуральные числа. Докажите неравенство

$$\frac{\sqrt{x_1 - x_0}}{x_1} + \ldots + \frac{\sqrt{x_n - x_{n-1}}}{x_n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n^2}\,.$$

Комментарий.

1. Вариант 8-го класса полностью совпадает с вариантом Всесоюзной олимпиады 1969 г. Дело в том, что эти олимпиады проходили почти одновременно, а команда Ленинграда была отобрана еще до олимпиады младших классов.
2. Задачи 9 и 10 класса, к сожалению, были найдены лишь в одном архиве, поэтому восстановленный вариант, возможно, отличается от истинного.
3. В 1969 году впервые была проведена олимпиада 5-го класса. На протяжении нескольких последующих лет составление варианта этой олимпиады возлагалось на преподавателей Ленинградского государственного педагогического института имени А. И. Герцена. По этой и по другим причинам, многие варианты олимпиад 5-го класса (вплоть до 1979 года) не сохранились в архиве жюри.