1971

6-й класс

1971.01. Из города A в город B одновременно выехали два мотоциклиста Петров и Иванов, и в тот же момент из города B навстречу им выехали мотоциклисты Ивановский и Петровский. Иванов едет в два раза быстрее Петрова, а Ивановский в три раза быстрее Петровского. Иванов встретил Петровского в тот же момент, когда Петров встретил Ивановского. Чья встреча произошла ближе к городу A: Иванова с Ивановским или Петрова с Петровским?

1971.02. Среди всех треугольников, имеющих данную сумму медиан, укажите тот, который имеет наибольшую сумму длин высот.

1971.03. Коля, Женя и Надя сдают несколько экзаменов, на которых получают определенное целое число очков в зависимости от занятого места — 1-го, 2-го или 3-го, причем занявший более высокое место получает больше очков. После всех экзаменов Коля набрал 22 очка, а Женя и Надя — по 9 очков. Женя был первым по алгебре. Кто был вторым по физике?

1971.04. Найдите целое число, если известно, что десятичная запись его шестой степени состоит из цифр $0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4$.

1971.05. Двое играют, по очереди бросая кубик, на каждой грани которого написана цифра 1 или 2. В начале игры на доске написано число 200. Каждый игрок по желанию может прибавить или отнять от написанного на доске числа выпавшую на кубике цифру, или пропустить ход. Выигрывает тот, кто первым напишет четырехзначное число. Игра считается закончившейся вничью, если на доске окажется двузначное число, или если было сделано три пропуска хода подряд. Докажите, что при правильном ведении игры начинающий сумеет не проиграть.

1971.06. Можно ли покрыть всю плоскость квадратами, среди которых всего два одинаковых?

7-й класс

1971.07. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2y^2 + xy^2 + x^2y + xy + x + y + 3 = 0\,, \\ x^2y + xy + 1 = 0\,. \end{cases}$$

1971.08. Среди всех треугольников с данной суммой длин биссектрис найдите треугольник с максимальной суммой длин высот.

1971.09. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка K. Через вершины A, B, C и D проведены перпендикуляры к прямым BK, CK, DK и AK соответственно. Докажите, что все они пересекаются в одной точке.

1971.10. См. задачу 5.

1971.11. Докажите, что любой выпуклый многоугольник, отличный от параллелограмма, можно поместить в треугольник, образованный продолжениями трёх каких-то сторон многоугольника.

1971.12. Дно прямоугольной коробки было выложено плитками размерами 2×2 и 1×4. Их высыпали из коробки и при этом потеряли одну из плиток размером 2×2. Пришлось заменить ее на запасную плитку 1×4. Докажите, что теперь выложить дно коробки нельзя.

8-й класс

1971.13. Точки A и B равномерно движутся с одинаковыми скоростями по двум пересекающимся прямым. Докажите, что в плоскости существует точка, которая в любой момент равноудалена от точек A и B.

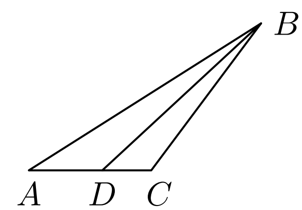
1971.14. Даны числа 5^{1971} и 2^{1971}. Они записаны подряд. Каково количество цифр полученного числа?

1971.15. По окружности выписано 100 целых чисел, сумма которых равна 1. Цепочкой назовем несколько чисел, стоящих подряд. Найдите количество цепочек, сумма чисел в которых положительна.

1971.16. В двух кучках по 100 спичек. Двое играют в следующую игру: первый выбрасывает одну из двух кучек, а другую делит на две не обязательно равных кучки. Затем второй производит ту же операцию и так далее. Может ли первый игрок выиграть, если проигравшим считается тот, кто не может разделить кучку на две части? Как для этого должен играть первый игрок?

1971.17. Натуральное число n таково, что $n+1$ делится на 24. Докажите, что сумма всех делителей n, включая 1 и само число n, делится на 24.

1971.18. ABC — треугольник, BD — его биссектриса. Длина стороны AB — 15, стороны BC — 10. Докажите, что длина BD не превосходит 12.



9-й класс

1971.19. Решите систему уравнений

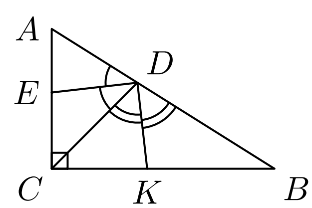
$$\begin{cases} x_0 = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{100}^2 \\ x_1 = 2(x_0x_1 + x_1x_2 + \ldots + x_{99}x_{100}) \\ x_2 = 2(x_0x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{98}x_{100}) \\ x_3 = 2(x_0x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_{97}x_{100}) \\ \ldots \\ x_{100} = 2x_1x_{100}\,. \end{cases}$$

1971.20. См. задачу 13.

1971.21. Число $\overline{abc}$ — простое. Докажите, что число $b^2 - 4ac$ не может быть точным квадратом.

1971.22. См. задачу 16. Дополнительный вопрос: каким должно быть начальное количество спичек в кучках, чтобы первый не смог выиграть?

1971.23. CD — биссектриса прямого угла треугольника ABC. DE и DK — биссектрисы треугольников ADC и BDC. Докажите, что $AD^2 + BD^2 = (AE + BK)^2$.



1971.24. Можно ли замостить плоскость попарно различными треугольниками с рациональными длинами сторон?

10-й класс

1971.25. См. задачу 17.

1971.26. В тетраэдре одна из высот пересекает две другие. Докажите, что все высоты пересекаются в одной точке.

1971.27. По двум скрещивающимся в пространстве прямым ползут мухи с равными постоянными скоростями. Докажите, что существует точка в пространстве, которая все время равноудалена от обеих мух.

1971.28. Докажите, что

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{200} + \left(\frac{1}{2}\right)^{199} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{198} \cdot \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{200} + \frac{1}{201} < \frac{1}{90}\,.$$

1971.29. Докажите, что если числа 2^1, 2^2, 2^4, 2^8, $\ldots$, выписать друг за другом после нуля и запятой, то полученное число будет иррациональным.

1971.30.* На плоскости дано N попарно непараллельных прямых и точка P. Точка P проектируется на все данные прямые, полученные проекции опять проектируются на все прямые и т.д. Докажите, что все точки, полученные таким образом, можно покрыть одним кругом.

Отборочный тур

1971.31. Вещественные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n положительны. Докажите, что уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \ldots - a_n = 0$$

имеет не более одного положительного корня.

1971.32. Дан набор вещественных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Для $k \leqslant n$ обозначим через A_k наибольшее из чисел

$$a_k,\ \frac{a_{k-1}+a_k}{2},\ \ldots,\ \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}\,.$$

Докажите, что наименьшее из чисел A_1, A_2, $\ldots$, A_n не больше среднего арифметического чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

1971.33. Через вершину A треугольника ABC проведена произвольная прямая; B_1 и C_1 — проекции на нее точек B и C; B_2 — проекция точки B_1 на AC; C_2 — проекция C_1 на AB. Докажите, что точка пересечения прямых B_1B_2 и C_1C_2 лежит на одной из высот треугольника ABC или на ее продолжении.

1971.34.* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — целые числа, сумма которых равна 1. Для $k \leqslant n$ обозначим через N_k число положительных чисел в наборе

$$b_k,\ b_k + b_{k+1},\ b_k + b_{k+1} + b_{k+2},\ \ldots,\ b_k + b_{k+1} + \ldots + b_n + b_1 + \ldots + b_{k-1}$$

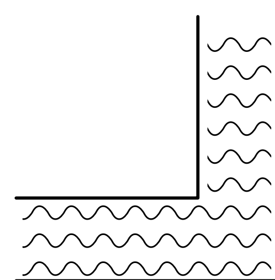
Докажите, что все числа N_k различны.

1971.35. Квадрат со стороной $n-1$ и прямоугольник со сторонами $a-1$ и $b-1$ разбиты на единичные квадратики; $ab = n^2$. Каждому из n^2 узлов квадрата сопоставлен один узел прямоугольника, причем разным узлам сопоставлены разные. Известно, что каждой из четырех вершин и центру каждого квадратика 2×2 сопоставлены соответственно четыре вершины и центр параллелограмма с вершинами и центром в узлах сетки прямоугольника (параллелограмм, возможно, вырожден). Докажите, что $a = b$, если известно, что $a, b > 2$.[1].

1971.36.* Ребра полного графа с $2n+1$ вершинами окрашены в три цвета. Докажите, что можно выбрать один из цветов и $n+1$ вершин графа так, что из каждой из них в любую другую выбранную вершину можно добраться по ребрам указанного цвета.

1971.37. Докажите, что уравнение $x^3 + y^3 + z^3 = 2$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

1971.38.* По обоим участкам реки, имеющей форму, указанную на рисунке, проплыла щепка. Докажите, что к щепке можно прибить плот такой формы, что при повторении щепкой того же пути плот проплывет по реке, коснувшись при этом берегов всеми точками своего края.



[1] Дополнительное требование $a, b > 2$ было пропущено в найденном архивном варианте, но без него утверждение задачи попросту неверно.