# 1973

## 6-й класс

**1973.01.** В трех магазинах было 1973 учебника. В первые три дня первый магазин продал соответственно $^1/_{47}$, $^1/_7$ и $^1/_2$ часть своих учебников, второй магазин — $^1/_{41}$, $^1/_5$ и $^1/_3$ часть своих учебников, а третий магазин — $^1/_{25}$, $^1/_{20}$ и $^1/_{10}$ часть своих учебников. Сколько учебников было в каждом магазине?

**1973.02.** Шоколадка имеет углубления в виде двух продольных и трёх поперечных канавок, по которым ее можно разламывать. Какое наименьшее число разломов необходимо, чтобы разломать ее на кусочки, не имеющие канавок, если одним разломом можно ломать и несколько кусков, приложив их друг к другу?

**1973.03.** Докажите, что число, записываемое с помощью шестисот шестерок и некоторого количества нулей, не может быть точным квадратом.

**1973.04.** Докажите, что квадрат можно разрезать на 1973 квадрата.

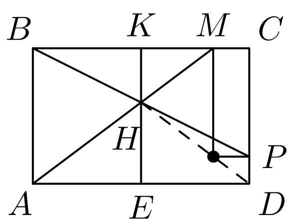
**1973.05.** На доске написаны три столбца чисел, причем никакое число не написано дважды в одном столбце. В 4-й столбец выписали все числа, встретившиеся ровно один раз в первых двух столбцах, в 5-й столбец — числа, встретившиеся ровно один раз в 3-м и 4-м столбцах, в 6-й столбец — числа, встретившиеся ровно один раз во 2-м и 3-м столбцах, а в 7-й столбец — числа, встретившиеся ровно один раз в 1-м и 6-м столбцах. Докажите, что в 5-м и 7-м столбцах написано одинаковое количество чисел.

**1973.06.** Дан равнобедренный треугольник, один из углов которого равен 108 градусов. Докажите, что его можно разрезать на остроугольные треугольники.

## 7-й класс

**1973.07.** См. задачу 2.

**1973.08.** См. задачу 3.



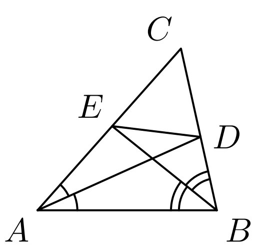

**1973.09.** $E$ и $K$ — середины сторон $AD$ и $BC$ прямоугольника $ABCD$, $H$ — произвольная точка отрезка $EK$, $M$ — точка пересечения прямых $AH$ и $BC$, $P$ — точка пересечения прямых $BH$ и $CD$. Через точку $M$ проведена прямая, параллельная $CD$, а через точку $P$ — прямая, параллельная $AD$. Докажите, что точка пересечения проведенных прямых лежит на прямой $DH$.

**1973.10.** Докажите, что $2^{10} + 5^{12}$ — составное число.

**1973.11.** На каждой стороне параллелограмма выбрали по точке таким образом, чтобы площадь образованного ими четырехугольника равнялась половине площади параллелограмма. Докажите, что одна из диагоналей четырехугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

**1973.12.** Стороны $a$, $b$ и $c$ некоторого треугольника удовлетворяют равенству $2(a^8 + b^8 + c^8) = (a^4 + b^4 + c^4)^2$. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

## 8-й класс




**1973.13.** $AD$ и $BE$ — биссектрисы треугольника $ABC$. Докажите, что если $AC > BC$, то $AE > DE > BD$.

**1973.14.** Сумма цифр десятизначного числа равна 4. Какой может быть сумма цифр квадрата этого числа?

**1973.15.** Для каждых двух точек плоскости $A$ и $B$ через $A*B$ обозначим точку, симметричную точке $A$ относительно точки $B$. Даны три вершины квадрата. Можно ли, используя операцию $(*)$, получить четвертую вершину квадрата?

**1973.16.** Треугольник разрезан на несколько выпуклых многоугольников. Докажите, что среди них либо есть треугольник, либо найдутся два многоугольника с одинаковым числом сторон.

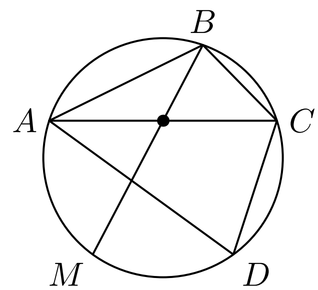
**1973.17.** По окружности выписано несколько натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами выписывается их НОД. Затем старые числа стираются и над оставшимися проделывают ту же операцию.

Докажите, что через несколько шагов все числа на окружности станут равными.

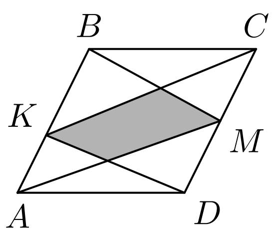
**1973.18.** Дано несколько точек, некоторые из которых соединены отрезками, причем так, что по этим отрезкам можно из любой точки попасть в любую другую. Всегда ли можно убрать одну из точек вместе с выходящими из нее отрезками так, чтобы оставшиеся точки по-прежнему были бы связаны между собой путями, идущими по отрезкам?

## 9-й класс

**1973.19.** Известно, что для вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство $AB/BC = AD/DC$. Прямая, проходящая через вершину $B$ и середину диагонали $AC$, пересекает окружность в точке $M$, отличной от $B$. Докажите, что $AM = CD$.




**1973.20.** Сумма цифр девятизначного числа равна 3. Какой может быть сумма цифр куба этого числа?




**1973.21.** На сторонах $AB$ и $CD$ параллелограмма $ABCD$ найдите такие точки $K$ и $M$, чтобы площадь четырехугольника, полученного при пересечении треугольников $AMB$ и $CKD$, была наибольшей.

**1973.22.** См. задачу 17.

**1973.23.** См. задачу 16.

**1973.24.** 10 белых и 20 черных фишек расставлены по окружности. Разрешается поменять местами любые две фишки, между которыми стоят еще три фишки. Две расстановки фишек (в данных 30 точках) назовем эквивалентными, если одну из них можно перевести в другую несколькими такими перестановками. Сколько существует неэквивалентных перестановок?

## 10-й класс

**1973.25.** См. задачу 13.

**1973.26.** Докажите, что если из бесконечной арифметической прогрессии с первым членом $A$ и разностью $d$, не равной нулю, можно выделить бесконечную геометрическую прогрессию, то $A/d$ — рациональное число.

**1973.27.** Докажите, что

$$\cos\frac{\pi}{4}\cdot\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\frac{\pi}{8}\cdot\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)+\ldots$$
$$\ldots+256\cos\frac{\pi}{1024}\cdot\left(1-\cos\frac{\pi}{1024}\right)<\frac{1}{2}\,.$$

**1973.28.** Докажите, что в выпуклом многограннике есть две грани с одинаковым числом сторон.

**1973.29.** Дан выпуклый 1973-угольник, точка $O$ внутри него и острый угол $\alpha$. Известно, что как бы ни построить угол, равный $\alpha$, с вершиной в точке $O$, площадь общей части многоугольника и угла будет одной и той же. Докажите, что многоугольник — правильный.

**1973.30.** См. задачу 24.

## Отборочный тур

**1973.31.** Известно, что сумма модулей попарных разностей пяти неотрицательных чисел равна 1. Найдите наименьшее возможное значение суммы этих чисел.

**1973.32.** На плоскости дано $2k+3$ точки общего положения, никакие четыре из которых не лежат на одной окружности. Докажите, что через три из них можно провести окружность, внутри которой лежит ровно $k$ точек из данных.

**1973.33.** Дан многочлен $P(x)=a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, все коэффициенты которого — целые числа. Известно, что уравнения $P(x)=1$, $P(x)=2$, $P(x)=3$ имеют целые корни. Докажите, что уравнение $P(x)=5$ не может иметь двух или более целых корней.

**1973.34.** Несколько волейбольных команд провели турнир в один круг. Известно, что если A выиграла у B, то найдется команда C, которая проиграла A, но выиграла у B. Какое наименьшее число команд могло принимать участие в турнире?

**1973.35.** Дан квадрат со стороной длины 1. В него вписан четырехугольник. В этот четырехугольник вписан квадрат, стороны которого параллельны сторонам большого квадрата. Докажите, что если стороны малого квадрата имеют длину 1/2, то вершины этого квадрата делят стороны вписанного четырехугольника пополам.

**1973.36.** Дан выпуклый многоугольник площади 9. Его пересекают девять параллельных прямых, отстоящих друг от друга на единичные расстояния. Докажите, что сумма длин отрезков, высеченных многоугольником на этих прямых, не больше 10.

**1973.37.*** Играют двое. Один задумывает десятизначное число, а второй может спрашивать у него о том, какие цифры стоят на конкретном наборе мест в записи. Первый отвечает ему, но без указания того, какие именно цифры на каких именно местах стоят. За какое минимальное число вопросов заведомо можно отгадать число?

**1973.38.*** На клетчатую бумагу бросают кубик со стороной $A$. Докажите, что он не может покрыть более, чем $(A+1)^2$ вершин клеток.

**Комментарий.**

В некоторых архивных вариантах вместо задач 16 и 23 указаны задачи 39 и 40.

**1973.39.*** По контуру выпуклого многоугольника ползут в одном направлении с одинаковой скоростью два жука и две мухи. Каким должно быть начальное положение жуков, чтобы при любом начальном положении мух минимальное расстояние между мухами было бы не больше минимального расстояния между жуками? (сравните с задачей **1980.40**).

**1973.40.** В единичный квадрат кинули 1973 фигуры, сумма площадей которых больше 1972. Докажите, что все они имеют общую точку.

Не исключено, что эти задачи вместе с другими предлагались участникам олимпиады в качестве дополнительных.