1974

6-й класс

1974.01. Найдите все такие числа $\overline{ABC}$, что

$$\overline{ABC} = 2(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC})\,.$$

1974.02. Существует ли выпуклый многоугольник, у которого ровно 1974 диагонали?

1974.03. Из листа картона вырезали несколько правильных треугольников. в вершинах каждого написали цифры 1, 2 и 3. Затем их сложили в стопку. Могло ли оказаться так, что сумма чисел вдоль каждого ребра стопки равна 55?

1974.04. А может ли сумма в задаче 3 всегда равняться 50?

1974.05. На старте 3 спринтера: A, B и C. C задержался на старте, но затем в процессе бега либо он обгонял, либо его обгоняли ровно 6 раз. B ушел со старта позже A. В процессе бега либо A обгонял, либо его обгоняли ровно 5 раз. К финишу B пришел раньше A. В каком порядке спринтеры пришли к финишу?

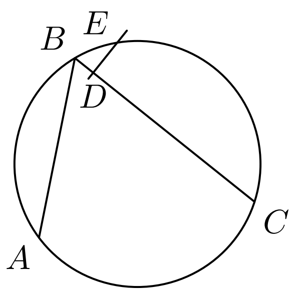
1974.06. В стране 1974 города. Из столицы выходит 101 авиалиния, а из города Дальний — 1 авиалиния. Из всех остальных городов выходит по 20 авиалиний. Докажите, что из столицы можно прилететь в Дальний, возможно, с пересадками.

7-й класс

1974.07. Известно, что $a + b + c = 7$, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} = \frac{7}{10}$. Найдите $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$.

1974.08. O — центр равностороннего треугольника ABC. Найдите множество точек X таких, что любая прямая, проходящая через X, пересекает отрезок AB или отрезок OC.

1974.09. Найдите все числа $\overline{abcd}$, такие что $\overline{abcd} = \overline{ad} \cdot \overline{ada}$.



1974.10. Дана окружность и точки A, B и C на ней. D — середина ломаной ABC, лежащая на отрезке BC, E — середина дуги ABC. Докажите, что прямая ED перпендикулярна прямой BC.

1974.11. См. задачу 6.

1974.12. В равнобедренном треугольнике проведены биссектрисы тупого и острого углов. Биссектриса из вершины вдвое меньше биссектрисы угла при основании. Найдите углы треугольника.

8-й класс

1974.13. На плоскости даны два круга, один вне другого. Существует ли такая точка на плоскости, лежащая вне обоих кругов, что всякая прямая, проходящая через эту точку, пересекает хотя бы один из кругов?

1974.14. Решите уравнение в натуральных числах:

$$x^{x^{x^x}} = (19 - y^x)y^{x^y} - 74\,.$$

1974.15. Из доски 8×8 вырезали угловую клетку. Можно ли оставшуюся часть доски разрезать на 17 равновеликих треугольников?

1974.16. В клетке $a1$ шахматной доски 8×8 стоит белая пешка, а в клетке $h8$ — черная. Белая пешка может ходить только вверх или вправо, а черная — только вниз или влево. Нельзя ходить на клетку, занятую другой пешкой, но пешка может пропускать ход любое число раз. Известно, что через некоторое время пешки поменялись местами. Докажите, что в процессе перемещения пешек был момент, когда прямая, соединяющая центры клеток, на которых стояли пешки, была перпендикулярна прямой, соединяющей центры клеток $a1$ и $h8$.

1974.17. Докажите, что на плоскости не существует конечного множества из n точек ($n > 4$) никакие три из которых не лежат на одной прямой, такого, что для любых трёх точек этого множества найдется четвертая точка из множества, образующая вместе с ними параллелограмм.

1974.18. Есть бактерия, которая делится в некоторый момент времени на две. Какая-то из половин вновь делится на две и так далее. Образовалось 1000 бактерий. Докажите, что была бактерия, потомство которой содержит не менее 334 и не более 667 потомков.

9-й класс

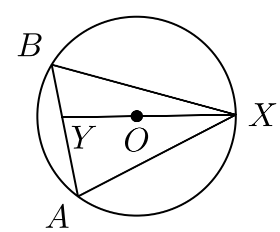
1974.19. См. задачу 15.

1974.20. См. задачу 14.

1974.21. См. задачу 16 для доски 9×9.

1974.22. На плоскости даны треугольник ABC и окружность S радиуса $R/2$, где R — радиус окружности, описанной вокруг ABC.

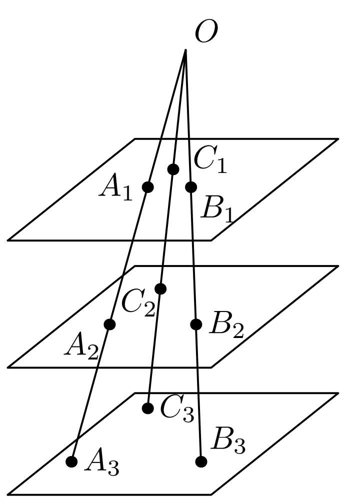
Докажите, что существует точка T такая, что отрезки TA, TB и TC делятся окружностью S пополам.



1974.23. На окружности, центр которой находится в точке O, лежит точка X. На диаметре, выходящем из точки X, возьмем точку Y так, чтобы O лежала между X и Y. Требуется провести через точку Y хорду AB так, чтобы угол AXB был минимален.

1974.24.* В марсианском языке три слова А, В и С таковы, что слово ААВВ совпадает со словом СС. Докажите, что есть такое слово Д, что каждое из слов А, В и С получается выписыванием слова Д несколько раз подряд.

10-й класс



1974.25. Существует ли 20-значное число, являющееся точным квадратом, десятичная запись которого начинается с 11 единиц?

1974.26. Лучи OS_1, OS_2, OS_3, исходящие из точки O, пересекаются с тремя параллельными плоскостями соответственно в точках A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3. Пусть V — объем пирамиды $OA_1B_2C_3$. Объемы пирамид $OA_1B_1C_1$, $OA_2B_2C_2$, $OA_3B_3C_3$ обозначим соответственно через V_1, V_2, V_3. Докажите, что $V \leqslant (V_1 + V_2 + V_3)/3$.

1974.27. Найдите максимум выражения

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4 +$$
$$+ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4$$

при $|x_1| \leqslant 1$, $|x_2| \leqslant 1$, $|x_3| \leqslant 1$, $|x_4| \leqslant 1$.

1974.28. Докажите, что в пространстве не существует конечного множества из n точек ($n > 4$) такого, что для любых трёх его точек найдется четвертая, образующая с первыми тремя параллелограмм.

1974.29. На плоскости дана точка O, из которой выходит 12 лучей; соседние лучи образуют углы, меньшие $\pi/4$. На луче S_1 отмечена точка A_1 на расстоянии 729 от точки O. Из точки A_1 проводится прямая, параллельная лучу S_{12} до пересечения с лучом S_2 в точке A_2. Из точки A_2 проводится прямая, параллельная лучу S_1 до пересечения с лучом S_3 в точке A_3 и так далее. Наконец, строится точка A_{13} на луче S_1. Докажите, что $|OA_{13}| \leqslant 1$.

1974.30. На доске написано число 2^n. Под ним написаны два натуральных числа, в сумме составляющие первоначальное. Далее под каждым из последовательно получаемых чисел выписываются два натуральных числа, в сумме составляющих его, пока не встретится единица. Докажите, что сумма всех написанных чисел не меньше $n2^n$.

Отборочный тур

1974.31. Над планетой, имеющей форму шара, летают 37 точечных спутников. Докажите, что в любой момент на поверхности планеты есть точка, из которой видно не более 17 спутников.

1974.32. В некоторой группе людей каждые два человека, имеющие там одинаковое число знакомых, не имеют общих знакомых. Докажите, что в этой группе либо никто ни с кем не знаком, либо кто-то имеет ровно одного знакомого.

1974.33. Докажите, что в выпуклом многоугольнике с четным числом сторон есть диагональ, не параллельная ни одной из сторон.

1974.34. В клетки прямоугольной таблицы вписаны натуральные числа. Разрешается удваивать одновременно все числа одного столбца или вычитать по единице из всех чисел строки. Докажите, что с помощью таких операций можно получить таблицу из одних нулей.

1974.35. Стороны квадрата занумерованы последовательно числами 1, 2, 3, 4. Для произвольной точки A и стороны k обозначим через A_k точку, симметричную проекции A на прямую k относительно точки A. Найдите все точки A такие, что каждая из точек A_1, A_{12}, A_{123}, A_{1234}, $A_{12341}, \ldots$ лежит внутри нашего квадрата.

1974.36. Сумма ста натуральных чисел, меньших 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько, сумма которых равна 100.

1974.37. Найдите все натуральные числа k, обладающие тем свойством, что не существует k-угольника, на продолжении любой стороны которого лежала бы другая сторона этого k-угольника. Рассматриваются лишь многоугольники с непараллельными соседними сторонами.

1974.38.* Дано простое число p. Докажите, что из $p+1$ попарно различных натуральных чисел можно выбрать два числа таких, что отношение большего из них к их наибольшему общему делителю не меньше $p+1$.

Комментарий.

К сожалению, в разных архивах имеются разные варианты олимпиады 7 класса. Например, в одном из них вместо задачи 8 указана задача 5. В тексте приведен вариант, взятый из архива А. Г. Гольдберга.