# 1977

## 6-й класс

**1977.01.** Можно ли разбить квадрат на 1977 треугольников так, чтобы на сторонах квадрата лежало поровну вершин этих треугольников, и чтобы никакая вершина одного треугольника не оказалась внутри стороны другого?

**1977.02.** На шахматной доске расположено 20 ладей так, что каждое поле находится под ударом хотя бы одной из них (поле, на котором стоит ладья, также бьется ею). Докажите, что можно снять 12 ладей так, чтобы оставшиеся 8 ладей по-прежнему били всю доску.

**1977.03.** Правильный 8-угольник двумя прямыми разрезами разбит на четыре части равной площади. Докажите, что эти прямые взаимно перпендикулярны.

**1977.04.** Число $111\ldots11$ (100 единиц) представлено в виде

$$a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_{99} \cdot 10^{99}\,,$$

где $a_0$, $a_1$, …, $a_{99}$ — неотрицательные целые числа, сумма которых не больше 100. Докажите, что они все равны 1.

**1977.05.** Последовательность целых чисел 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 42, 63, 94, …, начинается с двойки, а каждое следующее число получается из предыдущего умножением на $^3/_2$ и округлением по недостатку. Докажите, что в этой последовательности есть целое шестизначное число.

**1977.06.** Двое игроков поочередно ставят цифры в полоску из 12 клеток до тех пор, пока не получится 12-значное число. При этом цифры 0 и 9 ставить запрещено. Докажите, что второй игрок может добиться того, чтобы полученное число делилось на 77.

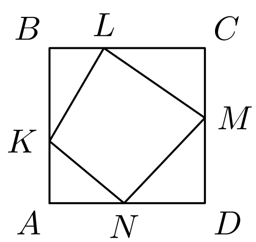
## 7-й класс

**1977.07.** См. задачу 1.

**1977.08.** Число 197719771977 представлено в виде

$$a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_{11} \cdot 10^{11},$$

где $a_0$, $a_1$, …, $a_{11}$ — неотрицательные целые числа, сумма которых не превосходит 72. Найдите эти числа.



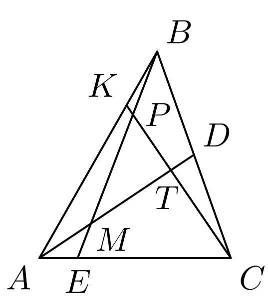

**1977.09.** На сторонах $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки $K$, $L$, $M$, $N$. Докажите, что $KL + LM + MN + NK \geqslant 2\,AC$.

**1977.10.** См. задачу 6.

**1977.11.** См. задачу 5.

**1977.12.** Точка $O$ внутри выпуклого многоугольника $P$ такова, что любая проходящая через нее прямая разбивает $P$ на две части равной площади. Докажите, что $O$ — центр симметрии многоугольника $P$.

## 8-й класс




**1977.13.** Точка $D$ лежит на стороне $BC$ треугольника $ABC$. $E$ — произвольная точка на стороне $AC$, $K$ — на стороне $AB$. Прямые $AD$ и $BE$ пересекаются в точке $M$, прямые $BE$ и $CK$ — в точке $P$, прямые $CK$ и $AD$ — в точке $T$. Докажите, что если $BM = PE$, $AT = MD$, то $CP > TK$.

**1977.14.** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества множества натуральных чисел. Докажите, что существуют такие натуральные $X$ и $Y$, что каждое из этих подмножеств либо содержит и $X$ и $Y$, либо не содержит ни $X$, ни $Y$.

**1977.15.** Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, у которого обе координаты каждой вершины — целые числа, а у любой другой точки внутри или на границе хотя бы одна из координат не целая?

**1977.16.** Рассматриваются всевозможные ломаные, идущие по сторонам клеток и соединяющие кратчайшим путем два противоположных угла квадратного листа клетчатой бумаги размерами $100 \times 100$. Какое наименьшее число таких ломаных нужно взять, чтобы их объединение содержало все вершины клеток?

**1977.17.** Отрезки $A_1$, $A_2$, …, $A_{1977}$; $B_1$, $B_2$, …, $B_{1977}$ лежат на одной прямой. Известно, что каждый отрезок $A_k$ имеет общую точку с каждым из отрезков $B_{k-1}$, $B_{k+1}$. Кроме того, отрезок $A_{1977}$ имеет общую точку с $B_1$, а $A_1$ — с $B_{1977}$. Докажите, что при каком-то $k$ отрезки $A_k$ и $B_k$ имеют общую точку.

**1977.18.** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ — вектора на плоскости, никакие два из которых не коллинеарны. Известно, что для любых двух различных номеров $i$ и $j$ среди данных векторов есть вектор вида $x\vec{a}_i + y\vec{a}_j$, где $x$ и $y$ — какие-то отрицательные числа. Докажите, что $n$ — нечетно.

## 9-й класс

**1977.19.** См. задачу 13.

**1977.20.** См. задачу 16.

**1977.21.** См. задачу 17.

**1977.22.** См. задачу 18.

**1977.23.** Функция $f$ определена на $[0; 1[$ по следующему правилу

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{2-\sqrt{2}}{2}, & \text{if } x \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ x - \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{if } x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right). \end{cases}$$

Докажите, что для любого отрезка $]a; b[ \subset [0; 1[$ найдутся точка $x$ из этого отрезка и такое натуральное $n$, что точка $f(f(f(\ldots f(x))\ldots)$ ($n$ раз) находится в отрезке $]a; b[$.

**1977.24.**[*] Есть несколько точек, некоторые из которых соединены дугами так, что из любой точки в любую другую можно добраться по этим дугам. Докажите, что на любой дуге можно поставить синюю и красную стрелки в противоположных направлениях так, чтобы из любой точки в любую можно было пройти таким путем, на котором цвет стрелки меняется не более одного раза. Идти при этом разрешается только в направлении, указываемом стрелкой какого-либо цвета.

## 10-й класс

**1977.25.** Докажите, что если $0 < x < \pi/2$, то $\sin x \cdot \operatorname{tg} x > x^2$.

**1977.26.** Сколько вершин может иметь выпуклый многогранник, у которого все координаты каждой вершины — целые числа, а у любой другой точки внутри или на границе хотя бы одна из координат не целая?

**1977.27.** $P$ — натуральное число, большее $1$; $n$, $k$ — натуральные числа. Докажите, что хотя бы одно из чисел $\binom{n}{k}$, $\binom{n+1}{k}$, $\ldots$, $\binom{n+k}{k}$ не делится на $P$.

**1977.28.** Докажите, что сумма величин всех двугранных углов треугольной пирамиды больше $360$ градусов.

**1977.29.** Вещественные числа $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_{1977}$ таковы, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{1977}$. Докажите, что

$$a_1^2 - a_2^2 + \ldots + (-1)^{1976} a_{1977}^2 \geqslant \left(a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{1976} a_{1977}\right)^2.$$

**1977.30.** См. задачу 23.

**Комментарий.**

1. В 1977 году отборочный тур не проводился, а команда Ленинграда на Всесоюзную олимпиаду по математике была отобрана сразу по результатам городского тура.
2. Задача 26 в разных архивных вариантах имеет различные формулировки: либо приведенную выше, либо дословно совпадающую с формулировкой задачи 15.