1978

6-й класс

1978.01. В вершинах правильного треугольника расставлены цифры 1, 2, 3. Можно ли сложить несколько таких треугольников в стопку так, чтобы сумма чисел в каждой вершине равнялась 55?

1978.02. Многоугольник разбит диагоналями на треугольники, которые раскрашены в черный и белый цвета так, что любые два треугольника, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета. Докажите, что количество черных треугольников не превосходит утроенного числа белых треугольников.

1978.03. Верно ли, что 57599 — простое число?

1978.04. Какое наименьшее число королей нужно взять, чтобы после их произвольной расстановки на шахматной доске 8×8 обязательно нашлись бы два короля, бьющих одно поле?

1978.05. Можно ли расставить натуральные числа от 1 до 1978 в строку так, чтобы любые два числа, стоящих рядом или через одно, были взаимно просты?

1978.06. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 20 градусов. Докажите, что а) $3|AC| > |AB|$; б) $2|AC| < |AB|$.

7-й класс

1978.07. Пять целых чисел дают десять попарных сумм. Могут ли они образовывать 10 последовательных целых чисел?

1978.08. A — натуральное число. После того, как его разделили с остатком на все числа, меньшие его, и сложили остатки, получилось A. Чему равно A?

1978.09. См. задачу 4.

1978.10. Внутри квадрата взята произвольная точка и соединена отрезками со всеми вершинами квадрата. После этого из каждой вершины квадрата опущен перпендикуляр на отрезок, выходящий из соседней по часовой стрелке вершины. Докажите, что эти четыре перпендикуляра пересекаются в одной точке.

1978.11. По кругу в вершинах правильного 100-угольника расставлено сто трехзначных чисел. Докажите, что существует диаметр, разность сумм чисел по разные стороны от которого не превосходит по модулю 900.

1978.12. Дан выпуклый N-угольник ($N \geqslant 5$). Докажите, что у него есть три стороны, продолжения которых образуют треугольник, содержащий наш N-угольник.

8-й класс

1978.13. Диагонали разбивают четырехугольник на четыре треугольника одинакового периметра. Докажите, что этот четырехугольник — ромб.

1978.14. Пятизначное число делится на 41. Докажите, что любое пятизначное число, полученное из него круговой перестановкой цифр, также делится на 41.

1978.15. Трасса велоэстафеты — шестиугольник, все углы которого — 120 градусов, а длины сторон выражаются целыми числами километров. Каждый этап эстафеты — одна из сторон шестиугольника, причем 1-й, 3-й и 5-й этапы проезжают женщины, а 2-й, 4-й и 6-й — мужчины. После эстафеты женщины утверждали, что суммарная длина их участков на 3 километра больше, чем суммарная длина мужских участков, а мужчины утверждали, что суммарная длина их участков на 5 километров больше суммарной длины женских участков. Кто из них явно неправ?

1978.16. Существует ли расстановка целых чисел в клетках бесконечного листа клетчатой бумаги такая, что в любом прямоугольнике 1918×1978 сумма чисел равна 60?

1978.17. На плоскости нарисовано шесть окружностей, причем 1-я касается 6-й и 2-й, 2-я касается 1-й и 3-й, 3-я касается 2-й и 4-й и т.д. Докажите, что существует новая окружность, пересекающая все шесть данных окружностей.

9-й класс

1978.18. См. задачу 14.

1978.19. Многочлен с положительным старшим коэффициентом принимает простые значения только при простых натуральных значениях аргумента. Докажите, что при всех простых значениях аргумента значения многочлена просты.

1978.20. Про положительные числа a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 известно, что выполнены неравенства:

$$\sum_{i\leqslant j} a_i a_j \leqslant 1\,, \qquad \sum_{i\leqslant j} b_i b_j \leqslant 1\,.$$

Докажите, что

$$\sum_{i\leqslant j} (a_i - b_i)(a_j - b_j) \leqslant 1\,.$$

1978.21. См. задачу 16.

1978.22. а) См. задачу 17.

б) Верно ли соответствующее утверждение для восьми окружностей?

10-й класс

1978.23. См. задачу 19.

1978.24. Какое максимально возможное количество равносторонних треугольников может образоваться на плоскости при пересечении шести прямых?

1978.25. См. задачу 14.

1978.26. См. задачу 20.

1978.27. Дан выпуклый шестиугольник, каждая большая диагональ которого делит его площадь пополам. Докажите, что эти диагонали пересекаются в одной точке.

Заключительный тур

1978.28. Клетки доски 100×100 окрашены в четыре цвета, причем клетки, окрашенные в один цвет, не имеют общих вершин. Докажите, что клетки в углах доски окрашены в разные цвета.

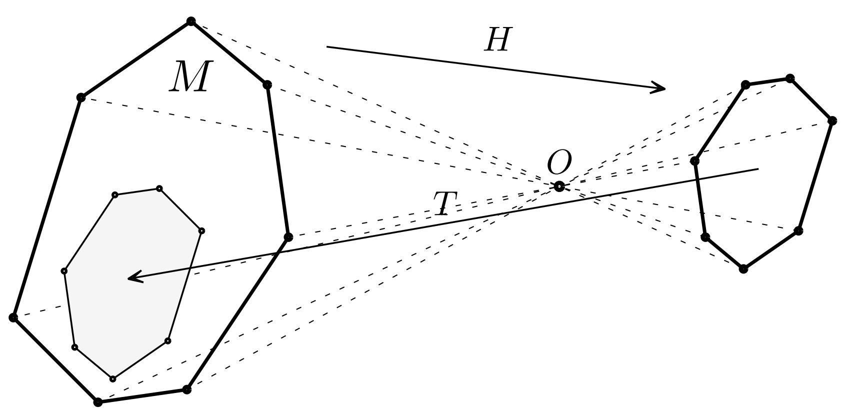
1978.29. Пусть A и B — два конечных множества на плоскости. Положим $d_H(A, B) = \max(d_1; d_2)$, где d_1 — максимальное из расстояний от точек множества A до множества B, а d_2 — максимальное из расстояний от точек множества B до множества A. Докажите для d_H неравенство треугольника, т.е. докажите, что для любых трёх конечных множеств X, Y и Z на плоскости имеет место неравенство $d_H(X, Y) + d_H(Y, Z) \geqslant d_H(X, Z)$.

1978.30. В вершинах правильного 100-угольника расставлены целые числа. Каждую минуту каждое из чисел заменяется на свою разность с числом, следующим за ним по часовой стрелке. Докажите, что через пять минут сумма чисел в вершинах нашего 100-угольника будет делиться на 5.

1978.31. На прямой дано 1978 отрезков, никакие два из которых не имеют общих концов. Докажите, что эти отрезки нельзя занумеровать так, чтобы для любого k от 1 до 1978 k-й отрезок содержал бы ровно k концов других отрезков.

1978.32.* Последовательность (a_n), все члены которой равны 0 или 1, такова, что если $k < 2^n$, то a_k не равно a_{k+2^n}. Докажите, что она непериодична.

1978.33. M — выпуклый многоугольник, а H — гомотетия с коэффициентом $(-1/2)$. Докажите, что существует параллельный перенос T такой, что многоугольник $T(H(M))$ лежит внутри многоугольника M.



1978.34.* Вершины конечного графа раскрашены в два цвета. Каждую секунду каждая точка меняет свой цвет на тот, в который окрашено большинство ее соседей. Докажите, что для любой точки найдется момент времени, после которого она либо не меняет цвета, либо меняет его каждую секунду.

1978.35.* Дан выпуклый многоугольник M такой, что длины всех его сторон и диагоналей — целые числа. K — данный квадрат. Докажите, что есть конечный набор многоугольников, конгруэнтных M, такой, что их объединение содержит K и любая точка квадрата, не лежащая на стороне одного из многоугольников, покрыта одним и тем же количеством многоугольников из этого набора.

Комментарий.

В 1978 году, в отличие от предыдущих лет, городской тур олимпиады проводился письменно. Победители этого тура приняли участие в заключительном (устном) туре олимпиады, по результатам которого было проведено награждение дипломами, а также была отобрана команда Ленинграда на Всесоюзную олимпиаду.