1980

5-й класс

1980.01. Можно ли все натуральные числа от 1 до 30 записать в таблицу 5×6 так, чтобы суммы чисел, стоящих в столбцах, были равны?

1980.02. В отряде в пионерском лагере собраны ребята 10, 11, 12 и 13 лет. Их 23 человека и им вместе 253 года. Сколько в отряде 12-летних ребят, если известно, что их в полтора раза больше, чем 13-летних?

1980.03. 200 точек на отрезке AB расположены симметрично относительно середины этого отрезка. Некоторые 100 из них окрашены в красный цвет, остальные — в синий. Докажите, что сумма расстояний от красных точек до точки A равна сумме расстояний от синих точек до точки B.

1980.04. Среди девяти монет две фальшивые. Определите фальшивые монеты за четыре взвешивания на двухчашечных весах без гирь, если известно, что обе фальшивые монеты весят одинаково, причем тяжелее настоящих.

1980.05. Разрежьте квадрат на выпуклые пятиугольники.

1980.06. В вершинах и пересечениях диагоналей выпуклого многоугольника расположены трамвайные остановки, причем известно, что никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. На некоторых диагоналях-улицах введено трамвайное движение так, что мимо каждой остановки проходит хотя бы один трамвайный путь. Докажите, что от любой остановки до любой другой можно добраться на трамвае, сделав не более двух пересадок.

6-й класс

1980.07. См. задачу 1.

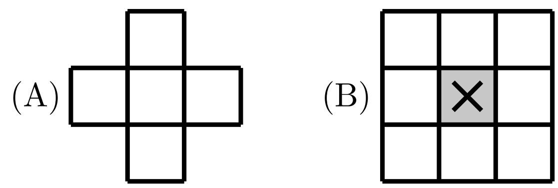
1980.08. См. задачу 3.

1980.09. Можно ли числа $1, 2, 3, \ldots, 1980$ выписать в таком порядке, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих через одно, делилась на 3?

1980.10. См. задачу 4.

1980.11. $2n$ конфет как-то разложены по n коробкам. Девочка и мальчик по очереди берут по конфете: первой выбирает девочка. Докажите, что мальчик может выбирать конфеты так, чтобы две последние конфеты были из одной коробки.

1980.12. Укажите такую раскраску клетчатого листа бумаги в 5 цветов, что в любой фигуре вида A будут клетки всех пяти цветов, а в любой восьмиклеточной фигуре вида B — не всех пяти цветов.



7-й класс

1980.13. Найдите все наборы из целых чисел A, B и C, для которых $A^2 - B^2 - C^2 = 1$, $B + C - A = 3$.

1980.14. См. задачу 9.

1980.15. Около окружности описан n-угольник. Произвольная точка внутри окружности соединена отрезками со всеми вершинами и точками касания. Полученные треугольники последовательно занумерованы числами от 1 до $2n$. Докажите, что произведение площадей треугольников с четными номерами равно произведению площадей треугольников с нечетными номерами.

1980.16. Квадрат $ABCD$ размером 9×9 разбит на квадратики 1×1. Все вершины этих квадратиков раскрашены в 4 цвета, по 25 точек каждого цвета. Рассматриваются все возможные вектора вида $\overrightarrow{MA}$, где M — точка первого цвета, вида $\overrightarrow{MB}$, где M — точка второго цвета, вида $\overrightarrow{MB}$, где M — точка третьего цвета, и вида $\overrightarrow{MB}$, где M — точка четвертого цвета. Докажите, что сумма всех этих векторов равна нуль-вектору.

1980.17. Докажите, что число $53 \cdot 83 \cdot 109 + 40 \cdot 66 \cdot 96$ — составное.

1980.18. См. задачу 11.

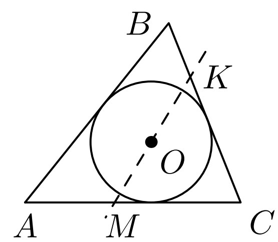
1980.19. См. задачу 12.

8-й класс

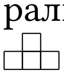
1980.20. Сумма четырех положительных чисел a, b, c и d равна 1. Докажите, что

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1}<6\,.$$

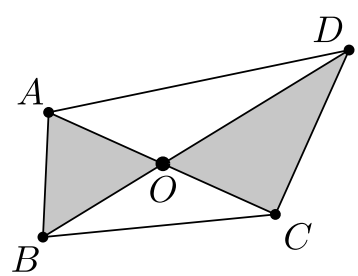
1980.21. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. На сторонах AC и BC выбрали соответственно точки M и K такие, что $|BK|\cdot|AB|=|BO|^2$ и $|AM|\cdot|AB|=|AO|^2$. Докажите, что точки M, O и K лежат на одной прямой.



1980.22. Трое играют в настольный теннис, причем игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что первый игрок сыграл 10 партий, а второй — 21. Сколько партий сыграл третий игрок?

1980.23. Можно ли расставить в клетках шахматной доски 8×8 натуральные числа от 1 до 64 так, чтобы сумма чисел в любой фигурке вида  делилась на 5?

1980.24. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника. Суммы квадратов площадей треугольников, прилежащих противоположным сторонам, равны между собой. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей делится в точке пересечения пополам.



1980.25. При каком наименьшем n в десятичной записи дроби m/n после запятой может встретиться набор цифр $\ldots 501 \ldots$?

1980.26. Среди девяти монет две фальшивые. Настоящая монета весит 10 грамм, а фальшивая — 11 грамм. Как обнаружить фальшивые монеты за 5 взвешиваний на одночашечных весах? (Цена деления — 1 грамм).

9-й класс

1980.27. Угол A треугольника ABC в два раза больше угла B. Докажите, что $|BC|^2=(|AC|+|AB|)|AC|$.

1980.28. Трое играют в настольный теннис, причем игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что первый игрок сыграл 10 партий, второй — 15, третий — 17. Кто проиграл во второй партии?

1980.29. Найдите два различных натуральных числа, среднее арифметическое и среднее геометрическое которых являются двузначными числами, одно из которых получается из другого перестановкой цифр.

1980.30. Докажите, что если для любого значения x из отрезка $[0; 1]$ выполняется неравенство $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$, то $|a| + |b| + |c| \leqslant 17$.

1980.31. Назовем средней линией выпуклого четырехугольника отрезок, соединяющий середины противоположных сторон. Докажите, что если сумма длин средних линий четырехугольника равна его полупериметру, то этот четырехугольник — параллелограмм.

1980.32. См. задачу 25.

1980.33. В клетках квадратной таблицы 8×8 записаны вещественные числа. Разрешается вместо любых двух чисел записать в обе клетки их среднее арифметическое. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы во всех клетках были записаны одинаковые числа.

10-й класс

1980.34. Трое играют в настольный теннис, причем игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что первый игрок выиграл 10 партий, второй — 12, третий — 14. Сколько партий сыграл каждый игрок?

1980.35. Сколько различных чисел встречается в последовательности

$$\left[\frac{1^2}{1980}\right], \left[\frac{2^2}{1980}\right], \ldots, \left[\frac{1980^2}{1980}\right] ?$$

1980.36. Существуют ли числа a и b такие, что при всех x из отрезка $[0; 2\pi]$ выполнено неравенство

$$f^2(x) - f(x)\cos x < \frac{1}{4}\sin x ,$$

где $f(x) = ax + b$?

1980.37. См. задачу 31.

1980.38. В клетках квадратной таблицы $N \times N$ записаны вещественные числа. Разрешается вместо любых двух чисел записать в обе клетки их среднее арифметическое. Найдите все натуральные числа N, при которых для любой начальной расстановки чисел в таблице такими операциями можно добиться того, чтобы во всех клетках были записаны одинаковые числа.

1980.39.* Докажите, что любые две точки на поверхности правильного тетраэдра с ребром длины 1 можно соединить ломаной, идущей по поверхности тетраэдра, длина которой не превосходит $2/\sqrt{3}$.

1980.40.* На контуре выпуклого многоугольника сидят два таракана. Одновременно они начинают двигаться по контуру в одном направлении с одинаковой скоростью. При каком начальном расположении тараканов минимальное расстояние между ними в процессе движения будет наибольшим?

Отборочный тур (8–9 классы)

1980.41. Во Всесоюзной олимпиаде участвуют школьники 8, 9 и 10 классов. В команду Ленинграда входят k победителей городской олимпиады и победители Всесоюзной олимпиады прошлого года. Каково максимально возможное число членов команды?

1980.42. Докажите, что для любых x, y, z из отрезка $[0;1]$ выполнено неравенство

$$3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) - 2xyz(x+y+z) \leqslant 3\,.$$

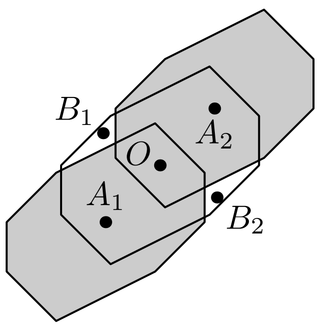
1980.43. Найдите внутри данного треугольника точку с максимальным произведением длин перпендикуляров, опущенных из нее на стороны треугольника.

1980.44. В стране провели анкету, в которой требовалось назвать любимого писателя, художника и композитора. Оказалось, что каждый упомянутый хоть раз деятель искусств является любимым ровно k людьми. Докажите, что всех проанкетированных можно разделить на $3k-2$ группы так, что в каждой группе любые два человека имеют совершенно разные вкусы.

1980.45. Докажите, что длина биссектрисы, проведенной к наибольшей стороне треугольника, не превосходит длины высоты, опущенной на наименьшую сторону треугольника.

1980.46. Вершины выпуклого многоугольника с нечетным числом сторон окрасили в три цвета так, что любые две соседние вершины окрашены в разные цвета. Докажите, что многоугольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника цвета всех вершин были различны.

1980.47. Какое наибольшее число параллелепипедов $1 \times 1 \times 4$ можно поместить внутрь куба $6 \times 6 \times 6$ так, чтобы их грани были параллельны соответствующим граням куба?



1980.48.* O — центр симметрии выпуклого многоугольника F; A_1 и A_2, B_1 и B_2 — пары точек многоугольника, симметричных относительно точки O. Известно, что объединение многоугольников, полученных из F параллельными переносами на вектора $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$, не покрывает точек B_1 и B_2. Докажите, что объединение многоугольников, полученных из F параллельными переносами на вектора $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OB_2}$, покрывает весь многоугольник F.