1983

5-й класс

1983.01. В шахматном турнире участвовало 30 человек. Разряд присвоили тем, кто набрал не менее 60% возможных очков. Какому наибольшему числу участников мог быть присвоен разряд?

1983.02. 10 плиток размером 10 см $\times$ 20 см распилили на 20 треугольных плиток. Как сложить из них квадрат?

1983.03. Каждый из четырех гномов — Беня, Веня, Сеня и Женя — либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Мы подслушали такой разговор:

Беня (Вене) : Ты врун.

Женя (Бене) : Сам ты врун.

Сеня (Жене) : Да они оба вруны. (Подумав). Впрочем, и ты тоже.

Кто же из гномов правдив, а кто всегда говорит неправду?

1983.04. Из мешка с белыми и черными фишками взяли 8 фишек и расставили их по кругу. Теперь можно взять какие-нибудь три подряд стоящие фишки и поменять каждую из них на фишку другого цвета. Докажите, что повторив эту операцию несколько раз, можно добиться того, что все фишки станут белыми.

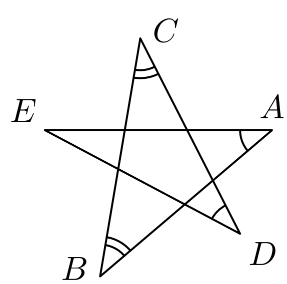
1983.05. Машина времени позволяет переноситься из 1 марта в 1 ноября любого другого года, из 1 апреля — в 1 декабря, из 1 мая — в 1 января и т.д. Два раза подряд пользоваться машиной запрещено. Барон Мюнхгаузен отправился в путешествие во времени 1 апреля. Вернувшись через мгновение, он сообщил, что путешествовал 26 месяцев. Докажите барону, что он неправ.

1983.06. Из четырех различных цифр составили два четырехзначных числа — наибольшее из всех возможных и наименьшее из всех возможных (цифры в числе не могут повторяться). Сумма этих чисел равна 10477. Какими могли быть исходные цифры?

6-й класс

1983.07. Четное число A обладает следующим свойством: если оно делится на простое число P, то $A-1$ делится на $P-1$. Докажите, что число A является степенью двойки.

1983.08. Прямолинейный прут длиной 2 метра разрезали на пять кусков, длиной не менее 17 см каждый. Докажите, что среди них найдутся три, из которых можно составить треугольник.



1983.09. В пятиугольной звезде $ABCDE$ угол A равен углу D, угол B равен углу C, и отрезок AB равен отрезку CD. Докажите, что отрезки AE и DE равны.

1983.10. По кругу расставлены 8 чисел, каждое из которых равно $+1$ или -1. За один ход можно поменять знаки на противоположные у любых трёх подряд идущих чисел. Докажите, что с помощью нескольких таких ходов из любой начальной расстановки можно получить любую другую.

1983.11. См. задачу 5.

1983.12. Можно ли внутри треугольника с синими вершинами отметить 10 синих и 20 красных точек так, чтобы никакие три синие точки не лежали на одной прямой и чтобы внутри любого треугольника с синими вершинами была хотя бы одна красная точка?

7-й класс

1983.13. См. задачу 9.

1983.14. Каждая из клеток квадратного листа клетчатой бумаги размером 100×100 закрашена в белый или в черный цвет; при этом количество черных и белых клеток одинаково. Докажите, что этот квадрат можно разрезать по линиям сетки на два многоугольника так, чтобы в каждом из них числа белых и черных клеток были одинаковы.

1983.15. Прямолинейный прут длиной 2 метра разрезан на пять кусков, длиной не менее 19 см каждый. Докажите, что из каких-то четырех из них можно составить четырехугольник.

1983.16. См. задачу 12.

1983.17. Докажите, что число $2^{58}+1$ можно представить как произведение трёх натуральных чисел, больших 1.

1983.18. В каждой клетке таблицы размером 24×24 записано число, равное $+1$ или -1. За один ход можно поменять знаки на противоположные у одного из этих чисел, а также одновременно и у всех чисел, которые находятся с ним либо в одной строке, либо в одном столбце. Докажите, что с помощью нескольких таких ходов можно из любой начальной расстановки чисел получить любую другую.

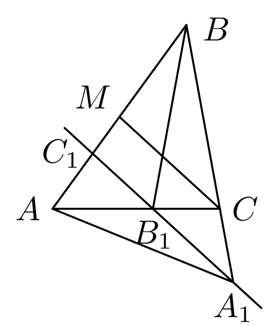
8-й класс

1983.19. Число A получено перестановкой цифр числа B. Докажите, что сумма цифр числа $5A$ равна сумме цифр числа $5B$.

1983.20. Двое шахматистов сыграли матч из 24 партий. Известно, что ни одна нечётная партия не закончилась вничью, и ни одному из участников матча не удалось выиграть три партии подряд. Какое наибольшее число очков мог набрать победитель?

1983.21. Точка, лежащая внутри данного правильного шестиугольника, соединена отрезками с его вершинами. Докажите, что из этих отрезков можно составить шестиугольник, площадь которого не меньше двух третей площади исходного шестиугольника.

1983.22. Прямая P параллельна медиане CM треугольника ABC. Прямые AB, BC и AC пересекают прямую P в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что площадь треугольника AA_1C_1 равна площади треугольника BB_1C_1.



1983.23. Правильный 400-угольник разрезан на параллелограммы. Докажите, что среди этих параллелограммов есть не менее 100 прямоугольников.

1983.24.* На окружности расположено несколько точек. Они начинают двигаться с постоянными, равными по величине, скоростями (некоторые по часовой стрелке, а некоторые — против). Столкнувшись, две точки разлетаются, сохраняя при этом прежнюю величину скорости и оставаясь на окружности. Докажите, что наступит момент, когда каждая точка окажется в первоначальном положении.

9-й класс

1983.25. В треугольнике ABC проведены высоты AH и CP. Найдите величину угла B, если известно, что $|AC| = 2|PH|$.

1983.26. Точка координатной плоскости называется целой, если обе ее координаты — целые числа. "Целая" точка называется "простой", если обе ее координаты — простые числа. Квадрат, вершины которого — "целые" точки, называется "простым", если всякая "целая" точка на его контуре является "простой". Найдите все "простые" квадраты.

1983.27. По кругу стоят несколько ребят: у каждого из них несколько конфет. По сигналу ведущего каждый передает половину своих конфет стоящему справа от него (если число конфет у кого-либо нечетно, то ведущий предварительно добавляет ему одну конфету). Это повторяется много раз. Докажите, что когда-нибудь у всех будет поровну конфет.

1983.28. Для каких $n \geqslant 2$ неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant x_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})$$

справедливо при всех вещественных значениях переменных x_i?

1983.29. Два круга K_1 и K_2 не имеют общих внутренних точек. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются этих кругов внешним образом в четырех точках, являющихся вершинами описанного четырехугольника. Докажите, что круги K_1 и K_2 касаются друг друга.

1983.30. См. задачу 24.

10-й класс

1983.31. Две последовательности чисел (x_n) и (y_n) построены так, что $x_1 = x_2 = 10$, $y_1 = y_2 = -10$, и

$$x_{n+2} = (x_n + 1)x_{n+1} + 1, \quad y_{n+2} = (y_{n+1} + 1)y_n + 1$$

при всех натуральных n. Докажите, что любое натуральное число встречается не более, чем в одной из этих последовательностей.

1983.32. См. задачу 27.

1983.33. См. задачу 28.

1983.34. Дан трехгранный угол. Известно, что биссектрисы двух его плоских углов взаимно перпендикулярны. Докажите, что проходящая через эти биссектрисы плоскость перпендикулярна плоскости третьего плоского угла.

1983.35. В правильной 20-угольной пирамиде центр вписанного шара совпадает с центром описанного шара. Найдите плоские углы боковой грани (в градусах).

1983.36. См. задачу 24.

Отборочный тур

1983.37. В правильном 20-угольнике отметили 9 вершин. Докажите, что найдется равнобедренный треугольник с вершинами в отмеченных точках.

1983.38. Докажите, что для любой точки плоскости площадь многоугольника, полученного в пересечении данного треугольника ABC с треугольником, симметричным ему относительно этой точки, не превосходит 2/3 площади треугольника ABC.

1983.39. Двое игроков по очереди ставят крестики и нолики в клетки бесконечного листа клетчатой бумаги. Первый стремится к тому, чтобы какие-то четыре крестика образовывали квадрат со сторонами, параллельными линиям сетки, а второй старается помешать ему. Может ли первый игрок выиграть?

1983.40. Угол A при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 100°. На луче AB отложен отрезок AM, равный основанию BC. Найдите величину угла BCM.

1983.41. При каких n можно расставить на окружности n чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n (не все равные нулю) так, чтобы для любого $k \leqslant n$ сумма k подряд стоящих чисел, начиная с a_k, равнялась нулю?

1983.42. Бесконечный клетчатый лист бумаги покрыт слоем прямоугольных плиток размером 1×2 со сторонами, идущими по линиям сетки. Докажите, что его можно покрыть еще тремя слоями плиток аналогичным образом так, чтобы никакая плитка не лежала в точности над какой-то другой.

1983.43.* Возрастающая последовательность натуральных чисел (a_n) такова, что любое натуральное число, не равное члену последовательности, можно представить в виде $a_k + 2k$ для некоторого натурального k. Докажите, что при всех k выполнено неравенство $a_k < \sqrt{2}k$.

1983.44. В Стране Дураков n^2 городов, расположенных в виде квадрата, причем расстояние между соседними городами равно 10 километров. Города соединены системой дорог, состоящей из прямолинейных участков, параллельных сторонам квадрата. Какова минимальная длина такой системы дорог, если известно, что из любого города можно проехать в любой другой?