1984

5-й класс

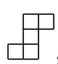
1984.01. Докажите, что в 400-значном числе

$$8419\,8419\ \ldots\ 8419$$

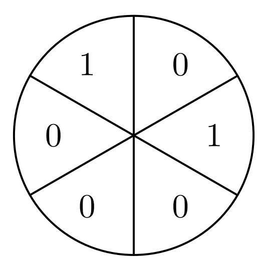
можно вычеркнуть несколько цифр в начале и несколько цифр в конце так, чтобы сумма оставшихся цифр была равна 1984.

1984.02. В клетках таблицы 4×4 расставьте числа, не равные нулю, так, чтобы сумма чисел, стоящих в углах каждого квадрата 2×2, 3×3 и 4×4, была равна нулю.

1984.03. На прямой отмечено 45 точек, лежащих вне отрезка AB. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до точки A не равна сумме расстояний от этих точек до точки B.

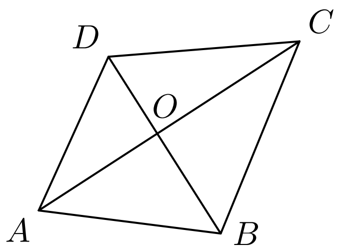
1984.04. Клетки тетрадного листа раскрашены в восемь цветов. Докажите, что найдется фигура вида , внутри которой есть две клетки одного цвета.

1984.05. Круг разделен на 6 секторов, и в них расставлены числа так, как это показано на рисунке. Разрешается одновременно увеличивать на 1 любые два стоящих рядом числа. Докажите, что с помощью таких операций нельзя добиться равенства всех шести чисел.



1984.06. В ряд выписаны числа от 1 до 100. Два игрока по очереди вставляют между этими числами знаки “+”, “−” и “×” (игроки сами выбирают, на какое место из оставшихся поставить очередной знак). Докажите, что игрок, делающий первый ход, может добиться того, чтобы окончательный результат был нечетным числом.

6-й класс



1984.07. См. задачу 3.

1984.08. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Периметры треугольников ABC и ABD равны. Равны и периметры треугольников ACD и BCD. Докажите, что $AO = BO$.

1984.09. а) См. задачу 2.

б) Докажите, что для любой такой расстановки сумма чисел, стоящих в каждом столбце, равна нулю.

1984.10. 175 Шалтаев стоят дороже, чем 125, но дешевле, чем 126 Болтаев. Докажите, что на трёх Шалтаев и одного Болтая рубля не хватит.

1984.11. См. задачу 6.

1984.12. Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 клеток вырезали 99 квадратиков, каждый из которых состоит из 4 клеток. Докажите, что можно вырезать еще один квадратик.

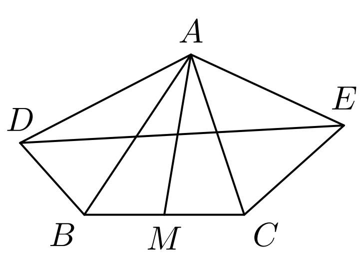
7-й класс

1984.13. Могут ли отрезки длиной 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15 быть сторонами и диагоналями выпуклого пятиугольника?

1984.14. Найдите численное значение выражения

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{2}{xy+1},$$

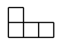
если известно, что x не равно y, и сумма первых двух слагаемых равна третьему.



1984.15. На сторонах AB и AC треугольника ABC построены равнобедренные треугольники ADB ($AD = AB$) и ACE ($AC = AE$), причем угол DAE равен сумме углов ABC и ACB. Докажите, что отрезок DE в два раза длиннее медианы AM треугольника ABC.

1984.16. На прямой отмечено 45 точек, лежащих вне отрезка AB, некоторые из которых окрашены в красный цвет, а остальные — в синий. Докажите, что результат сложения суммы расстояний от красных точек до точки A и суммы расстояний от синих точек до точки B не равен результату сложения суммы расстояний от красных точек до точки B и суммы расстояний от синих точек до точки A.

1984.17. См. задачу 12 для листа размерами 31×31.

1984.18. В какое наименьшее количество цветов можно раскрасить клетки бесконечного клетчатого листа бумаги так, чтобы в любой фигуре из четырех клеток вида  все клетки были различных цветов?

8-й класс

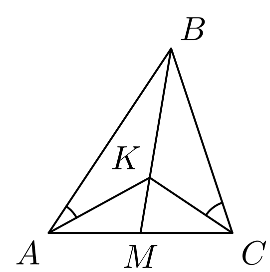
1984.19. Квадрат 100×100 сложен из прямоугольников размерами 1×2. Докажите, что какие-то два из них образуют квадрат 2×2.

1984.20. Разность шестизначных чисел $\overline{abcdef}$ и $\overline{fdebca}$ делится на 271. Докажите, что $b = d$ и $c = e$.

1984.21. Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ таковы, что $x_1^3 + x_2 = x_2^3 + x_3 = \ldots = x_{100}^3 + x_{101} = x_{101}^3 + x_1$. Докажите, что все эти числа равны между собой.

1984.22. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки плоскости до трёх вершин равнобедренной трапеции больше расстояния от этой точки до четвертой вершины.

1984.23. Известно, что для некоторой внутренней точки K медианы BM треугольника ABC углы BAK и BCK равны. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.



1984.24. Множество A состоит из натуральных чисел, причем среди любых 100 идущих подряд натуральных чисел есть число из A. Докажите, что в A найдутся четыре различных числа a, b, c, d такие, что $a + b = c + d$.

9-й класс

1984.25. См. задачу 21.

1984.26. См. задачу 22.

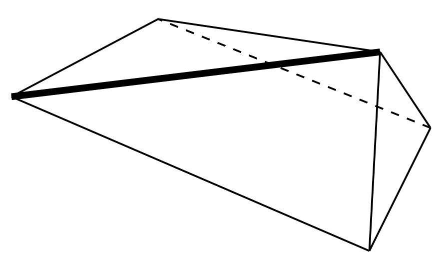
1984.27. Найдите наименьшее натуральное число, которое можно тремя разными способами представить в виде $13x+73y$, где x и y — натуральные числа.

1984.28. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Найдите углы этого треугольника, если известно, что он подобен треугольнику $A_1B_1C_1$.

1984.29. См. задачу 24.

1984.30. Сумма целых чисел A, B и C равна нулю. Докажите, что число $2(A^4+B^4+C^4)$ — квадрат целого числа.

10-й класс



1984.31. См. задачу 22 для произвольной точки пространства.

1984.32. См. задачу 24.

1984.33. Докажите, что разность квадратов длин смежных сторон параллелограмма меньше произведения длин его диагоналей.

1984.34. После нескольких операций дифференцирования и умножения на $x+1$, выполненных в каком-то порядке, многочлен x^8+x^7 превратился в $ax+b$. Докажите, что разность целых чисел a и b делится на 49.

1984.35. Какое наибольшее значение может принимать сумма

$$|x_1-1|+|x_2-2|+\ldots+|x_{63}-63|\,,$$

если $x_1, x_2, \ldots, x_{63}$ — это некоторым образом переставленные числа 1, 2, 3, …, 63?

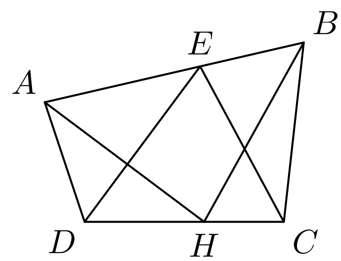
1984.36. В вершинах 50-угольной призмы расставлены числа 1, 2, 3, …, 100. Докажите, что у призмы найдется такое ребро, что стоящие в его концах числа различаются не более, чем на 48.

Заключительный тур

8, 9-е классы

1984.37. На сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ даны точки E и H.

Докажите, что если треугольники ABH и CDE равновелики и $AE : BE = DH : CH$, то прямая BC параллельна прямой AD.



1984.38. Двое играют в такую игру. Первый игрок пишет какую-либо цифру; второй игрок приписывает к ней слева или справа еще одну цифру; первый игрок приписывает к образовавшемуся числу еще одну цифру и т.д. Докажите, что первый игрок может играть так, чтобы ни одно число, получающееся после хода второго игрока, не было квадратом целого числа.

1984.39. На координатной плоскости даны четыре точки с целыми координатами. Разрешается заменять любую из этих точек на точку, симметричную ей относительно любой другой из этих точек. Можно ли за несколько таких операций перейти от точек с координатами $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$, $(1;1)$ к точкам с координатами $(0;0)$, $(1;1)$, $(3;0)$, $(2;-1)$?

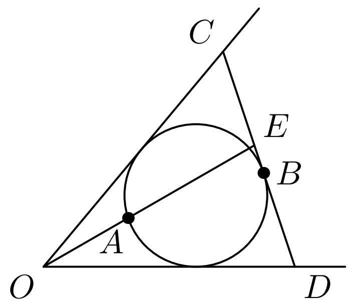
1984.40. Даны числа: единица и девять нулей. Разрешается выбрать два числа и заменить каждое их средним арифметическим. Какое наименьшее число может оказаться на месте единицы после серии таких операций?

1984.41. Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ таковы, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_n\,.$$

Докажите, что в прямоугольной таблице размерами $k \times n$ можно расставить неотрицательные числа, среди которых по крайней мере $(k-1)(n-1)$ нулей, так, чтобы суммы чисел в строках были равны $a_1, a_2, \ldots, a_k$, а в столбцах — $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

1984.42. Фишка может находиться в одной из 169 точек $(x; y)$, где x и y — целые числа, $0 \leqslant x \leqslant 12$, $0 \leqslant y \leqslant 12$. Фишка может пойти из точки (x_1, y_1) в точку (x_2, y_2), только если каждое из чисел $|x_1 - x_2|$, $|x_1 - y_2|$, $|y_1 - x_2|$, $|y_1 - y_2|$ не меньше 2 и не больше 9. Докажите, что фишка не может обойти все 169 точек, побывав в каждой из них ровно по разу.



1984.43. На окружности, касающейся сторон угла с вершиной O, выбраны две диаметрально противоположные точки A и B (отличные от точек касания). Касательная к окружности в точке B пересекает стороны угла в точках C и D, а прямую OA — в точке E. Докажите, что $BC = DE$.

1984.44.* Докажите, что существует такое множество A, состоящее из натуральных чисел, что любое не принадлежащее ему натуральное число является средним арифметическим двух различных чисел из A, а никакое число из A этим свойством не обладает.

10-й класс

1984.45. См. задачу 40.

1984.46. Докажите, что если сумма плоских углов при вершине пирамиды больше 180 градусов, то каждое боковое ребро пирамиды меньше полупериметра ее основания.

1984.47. Целое число a таково, что число $3a$ представимо в виде x^2+2y^2, где x и y — целые числа. Докажите, что и число a представимо в таком виде.

1984.48. См. задачу 39.

1984.49. См. задачу 43.

1984.50. См. задачу 44.

1984.51.* Целые числа a, b, c, d, e таковы, что числа $a + b + c + d + e$ и $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ делятся на нечетное число n. Докажите, что число $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 - 5abcde$ также делится на n.

1984.52. В последовательности $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ каждый член, начиная с седьмого, равен последней цифре суммы шести предыдущих членов. Докажите, что в этой последовательности не встречаются подряд шесть чисел $0, 1, 0, 1, 0, 1$.