1985

5-й класс

1985.01. Имеется 68 монет, различных по весу. За 100 взвешиваний на чашечных весах без гирь найдите самую тяжелую и самую легкую монеты.

1985.02. 45-значное число составлено из одной единицы, двух двоек, трёх троек, …, девяти девяток. Докажите, что оно не является точным квадратом.

1985.03. Путешественник отправляется из своего родного города A в самый удаленный от него город страны — город B; затем из B — в самый удаленный от него город C и так далее. Докажите, что если C и A — это разные города, то путешественник никогда не вернется домой.

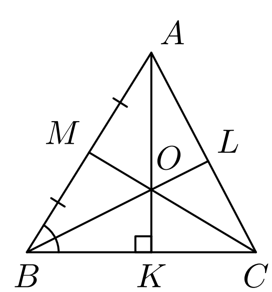
1985.04. Найдите 1000 натуральных чисел, сумма которых равна их произведению.

1985.05. В кладовой лежит 300 сапог — по 100 сапог 40-го, 41-го и 42-го размеров, причем левых и правых поровну — по 150 штук. Докажите, что из имеющихся сапог можно составить по крайней мере 50 пар (в каждой паре — левый и правый сапоги одного размера).

1985.06. См. задачу 18 при $n = 10$.

6-й класс

1985.07. На доске написано число 1. Каждую секунду к числу на доске прибавляют сумму его цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456?



1985.08. Высота AK, биссектриса BL и медиана CM треугольника ABC пересекаются в одной точке O, причем $AO = BO$. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

1985.09. Простые числа p, q и натуральное число n удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}=\frac{1}{n}\,.$$

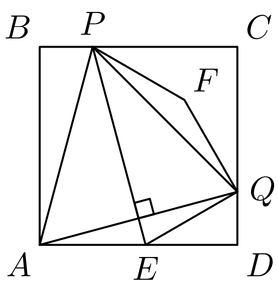
Найдите эти числа.

1985.10. См. задачу 5.

1985.11. На прямой сидят три кузнечика. Они начинают играть в чехарду, прыгая друг через друга (но не через двух сразу). Могут ли они через 1985 прыжков оказаться на исходных местах?

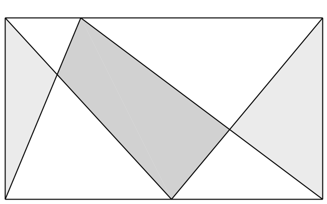
1985.12. См. задачу 18 при $n = 10$.

7-й класс



1985.13. Точки P и Q на сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ соответственно выбраны так, что треугольник APQ — равносторонний. Прямая, проходящая через точку P и перпендикулярная стороне AQ, пересекает AD в точке E. Точка F вне треугольника APQ выбрана так, что треугольники PQF и AQE равны. Докажите, что отрезок FE в два раза длиннее отрезка FC.

1985.14. Натуральное число возвели в квадрат и от результата отняли 600, с полученным числом проделали то же самое и т.д. Каким могло быть исходное число, если известно, что после нескольких таких операций было получено снова это же число?



1985.15. Две точки, выбранные на противоположных сторонах прямоугольника, соединены отрезками с вершинами этого прямоугольника. Докажите, что площади семи частей, на которые разбился при этом прямоугольник, не могут оказаться все одинаковы.

1985.16. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора $1, 2, 3, \ldots, 1985$ так, что разность любых двух из выбранных чисел не является простым числом?

1985.17. На плоскости расположены 1985 точек красного, синего и зеленого цветов так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек разного цвета соединены отрезками, причем оказалось, что изо всех точек выходит одно и то же число отрезков. Докажите, что найдется красная точка, соединенная отрезками и с синей, и с зеленой точками.

1985.18. На складе в два штабеля сложены в произвольном порядке n контейнеров, которые имеют номера $1, 2, 3, \ldots, n$. Автопогрузчик подъезжает к одному из штабелей, снимает сверху несколько контейнеров и устанавливает их на другой штабель. Докажите, что за $2n-1$ таких операций можно расположить все контейнеры в одном штабеле по порядку номеров (внизу # 1, затем # 2 и так далее).

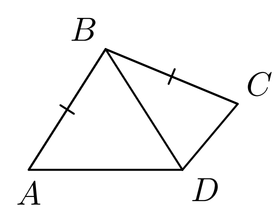
8-й класс

1985.19. Арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит точный квадрат. Докажите, что она содержит бесконечно много точных квадратов.

1985.20. Решите систему уравнений:

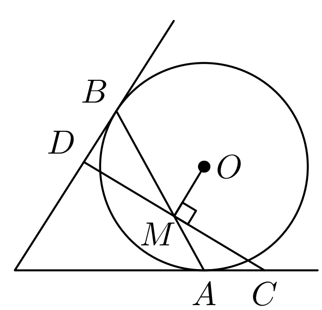
$$\begin{cases} (x+y)^3 = z \\ (y+z)^3 = x \\ (z+x)^3 = y\,. \end{cases}$$

1985.21. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол ABD равен 65 градусов, угол CBD равен 35 градусов, угол ADC равен 130 градусов, и $AB = BC$. Найдите углы четырехугольника $ABCD$.



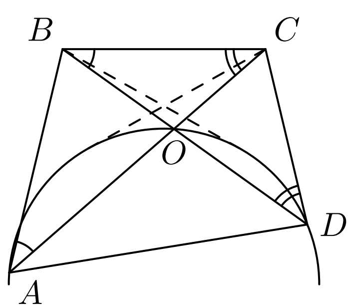
1985.22. Про положительные числа $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ известно, что $b_1^2 \leqslant a_1c_1$, $b_2^2 \leqslant a_2c_2$. Докажите, что $(a_1+a_2+5)(c_1+c_2+2) > (b_1+b_2+3)^2$.

1985.23. Окружность с центром O касается сторон угла в точках A и B. Через произвольную точку M отрезка AB, отличную от точек A и B, проведена прямая, перпендикулярная прямой OM и пересекающая стороны угла в точках C и D. Докажите, что $MC = MD$.



1985.24. Игра для двух участников состоит из прямоугольного поля 1×25, разбитого на 25 квадратных клеток, и 25 фишек. Клетки занумерованы последовательно числами $1, 2, \ldots, 25$. За один ход игрок либо выставляет новую фишку в одну из свободных клеток, либо передвигает ранее выставленную фишку в ближайшую свободную клетку с большим номером. В начальной позиции все клетки свободны. Игра заканчивается, когда все клетки будут заняты фишками, причем победителем считается игрок, сделавший последний ход. Игроки ходят поочередно. Кто победит при правильной игре: начинающий или его соперник?

9-й класс



1985.25. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O, равны между собой углы BAC и CBD, а также углы BCA и CDB. Докажите, что касательные, проведенные к окружности (AOD) из точек B и C, имеют равную длину.

1985.26. Вещественные числа a, b, c, x, y, z таковы, что $x = by + cz$, $y = cz + ax$, $z = ax + by$, причем хотя бы одно из чисел x, y, z не равно нулю. Докажите, что $2abc + ab + ac + bc = 1$.

1985.27. Длины сторон выпуклого четырехугольника не больше 7. Докажите, что четыре круга с радиусами 5 и центрами в вершинах четырехугольника полностью покрывают четырехугольник.

1985.28. Вещественные числа a, b, c таковы, что $a+b+c > 0$, $ab+ac+bc > 0$, $abc > 0$. Докажите, что числа a, b, c положительны.

1985.29.* Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ задана условиями $x_1 = 0,001$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$. Докажите, что $x_{1001} < 0,0005$.

1985.30. См. задачу 24.

10-й класс

1985.31. Вещественные числа a, b, c, x, y, z таковы, что $a^x = bc$, $b^y = ca$, $c^z = ab$, причем числа a, b, c положительны и хотя бы одно из них не равно 1. Докажите, что $x + y + z - xyz$ — целое число.

1985.32. См. задачу 23.

1985.33. Прямые, проведенные перпендикулярно граням тетраэдра через центры вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке. Докажите, что суммы длин противоположных ребер этого тетраэдра равны между собой.

1985.34. Докажите неравенство

$$9 < \int\limits_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}\,dx + \int\limits_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}\,dx < 9{,}0001\,.$$

1985.35. См. задачу 29.

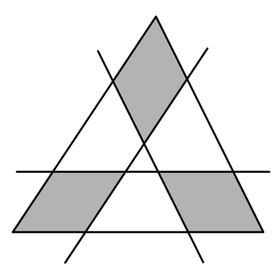
1985.36. См. задачу 24.

Заключительный тур

8-й класс

1985.37. Число 1584 обладает следующими свойствами:
а) оно не является квадратом целого числа;
б) оно отлично от своего обращенного 4851;
в) произведение чисел 1584 и 4851 является квадратом целого числа.
Найдите 20-значное число, обладающее теми же свойствами.

1985.38. Периметр треугольника равен 100 см, а площадь равна 100 см^2. Три прямые, проведенные параллельно сторонам треугольника на расстоянии 1 см от них, разбивают треугольник на семь частей, три из которых — параллелограммы. Докажите, что сумма площадей параллелограммов меньше 25 см^2.



1985.39. 15 волейбольных команд разыграли турнир в один круг, причем каждая команда одержала ровно 7 побед. Сколько в этом турнире таких троек команд, которые во встречах с собой имеют по одной победе?

1985.40. Каждая клетка доски 100×100 окрашена в один из четырех цветов, причем в любом квадрате 2×2 встречаются все четыре цвета. Докажите, что угловые клетки доски окрашены в разные цвета.

1985.41. Трапеция с основаниями a и b описана около окружности радиуса R. Докажите, что $ab \geqslant 4R^2$.

1985.42. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такова, что $a_1 = 1$ и $a_{k+1} - a_k$ равно 0 или 1 при всех k. Докажите, что если $a_m = m/1000$ при некотором m, то найдется n такое, что $a_n = n/500$.

1985.43. В последовательности $f_1, f_2, \ldots$ первые два члена равны 1, а каждый из остальных равен сумме двух предыдущих. Докажите, что

$$\frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_2 f_4} + \frac{1}{f_3 f_5} + \ldots + \frac{1}{f_{98} f_{100}} < 1\,.$$

1985.44. Каждому натуральному числу $k \leqslant 100$ сопоставлено некоторое натуральное число $f(k)$, также не превосходящее 100. Строится последовательность $a_1 = 1$, $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$ и т.д. Докажите, что найдется номер $n \leqslant 100$, для которого $a_n = a_{2n}$.

9, 10-е классы

1985.45. См. задачу 38.

1985.46. См. задачу 40.

1985.47. 20 волейбольных команд разыграли турнир в один круг. Пусть T — число троек команд, которые во встречах между собой имеют по одной победе. Докажите, что

а) если каждая команда выиграла не менее 9 и не более 10 встреч, то $T = 330$.

б) $T \leqslant 330$.

1985.48. См. задачу 41.

1985.49. См. задачу 42.

1985.50. См. задачу 43.

1985.51. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ натуральных чисел такова, что $a_{n+2} = a_{n+1}a_n + 1$ при всех n. Докажите, что при любом $n > 10$ число $a_n - 22$ — составное.

1985.52.* В классе поровну мальчиков и девочек. Каждый мальчик дружит с четным числом девочек. Докажите, что можно выбрать группу из нескольких мальчиков так, чтобы с каждой девочкой дружило четное число мальчиков из этой группы.