1987

5-й класс

1987.01. В клетках таблицы 4×4 расставлены числа от 1 до 16 так, как это показано на левом рисунке. Разрешается прибавить единицу одновременно ко всем числам любой строки или вычесть единицу из всех чисел любого столбца. Как с помощью таких операций получить таблицу, приведенную на правом рисунке?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

1987.02. В стране Анчурии в обращении имеются купюры четырех достоинств: 1 доллар, 10 долларов, 100 долларов и 1000 долларов. Можно ли отсчитать миллион долларов так, чтобы получилось ровно полмиллиона купюр?

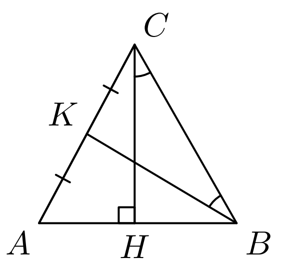
1987.03. Король хочет построить 6 крепостей и соединить каждые две из них дорогой. Начертите такую схему расположения крепостей и дорог, чтобы на ней было только три перекрестка, и на каждом из них пересекались две дороги.

1987.04. Если каждый мальчик купит пирожок, а каждая девочка — булочку, то они потратят вместе на одну копейку меньше, чем если бы каждый мальчик купил булочку, а каждая девочка — пирожок. Известно, что мальчиков больше, чем девочек. На сколько?

1987.05. Сколько билетов подряд надо приобрести в автобусной кассе, чтобы наверняка попался счастливый? Билет называется счастливым, если сумма первых трёх его цифр равна сумме трёх последних. Количество билетов в кассе не ограничено.

1987.06. Двое по очереди ставят крестики и нолики в клетки квадрата 9×9 (начинающий ставит крестики, его соперник — нолики). В конце подсчитывается, сколько имеется строчек и столбцов, в которых крестиков больше, чем ноликов, — это очки, набранные первым игроком. Количество строк и столбцов, где ноликов больше, — очки второго игрока. Как первому выиграть (набрать больше очков)?

6-й класс



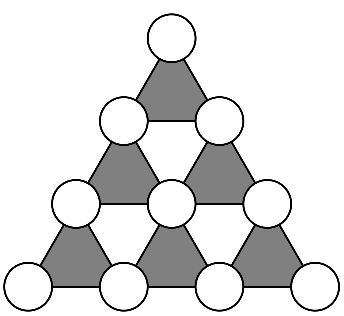
1987.07. См. задачу 1.

1987.08. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота CH и медиана BK, причем $BK = CH$, а также равны углы KBC и HCB. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

1987.09. См. задачу 4.

1987.10. В странах Диллии и Даллии денежными единицами являются диллеры и даллеры соответственно, причем в Диллии диллер меняется на 10 даллеров, а в Даллии даллер меняется на 10 диллеров. Начинающий финансист имеет 1 диллер и может свободно переезжать из одной страны в другую и менять свои деньги в обеих странах.

Докажите, что количество даллеров у него никогда не сравняется с количеством диллеров.



1987.11. См. задачу 5.

1987.12. Можно ли расставить числа от 0 до 9 (каждое по разу) в кружках на рисунке так, чтобы все суммы чисел в вершинах закрашенных треугольничков были одинаковы?

7-й класс

1987.13. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, делят его на четыре четырехугольника одинакового периметра. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

1987.14. См. задачу 4.

1987.15. См. задачу 10.

1987.16. Вершины замкнутой несамопересекающейся ломаной, имеющей восемь звеньев, — это вершины некоторого куба. Докажите, что одно из звеньев этой ломаной совпадает с ребром куба.

1987.17. Ремонтно-строительная контора "Рога и копыта" взялась построить дорогу длиной 100 км из Арбатова в Черноморск. План строительства таков: за первый месяц будет построено 1 км дороги, а далее, если к началу какого-то месяца уже готовы A км, то за этот месяц будет построено еще $1/A^{10}$ км дороги. Построит ли контора дорогу?

1987.18. Имеется инструмент для геометрических построений на плоскости ("угольник"), позволяющий делать следующее:

а) если даны две точки, то можно провести проходящую через них прямую;

б) если дана прямая и точка на ней, то можно восставить перпендикуляр к этой прямой в данной точке.

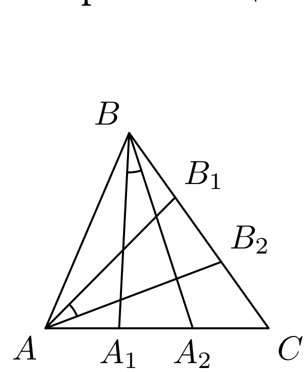
Как с помощью этого инструмента опустить перпендикуляр из данной точки на прямую, не проходящую через эту точку?

8-й класс

1987.19. На доске размером 10×10 расставлено 50 шашек; 25 в левой нижней четверти и 25 в правой верхней четверти. За один ход любая шашка может перепрыгнуть через шашку, соседнюю с ней по горизонтали, вертикали или диагонали на следующее поле, если оно свободно. Могут ли через несколько ходов все шашки оказаться на левой половине доски?

1987.20. Имеется неограниченный запас монет достоинством $1, 2, 5, 10, 20, 50$ коп., и 1 руб. Известно, что a копеек можно разменять при помощи b монет. Докажите, что тогда b рублей можно разменять при помощи a монет.

1987.21. Даны произвольные вещественные числа a, b, c, d. Докажите, что $(1+ab)^2 + (1+cd)^2 + (ac)^2 + (bd)^2 \geqslant 1$.



1987.22. Дан треугольник ABC. Точки A_1 и A_2 делят на три равные части сторону AC, а точки B_1 и B_2 — сторону BC. Докажите, что если углы A_1BA_2 и B_1AB_2 равны, то треугольник ABC равнобедренный.

1987.23. На ветвях большого дуба сидят несколько ворон. По сигналу они начинают пересаживаться. Каждую минуту одну из ворон прогоняют соседки, сидящие на той же ветке, и эта ворона перелетает на следующую по высоте (более высокую) ветку; если сверху веток нет, ворона улетает. Все ветки расположены на различной высоте. Докажите, что время, через которое процесс закончится (т.е. на каждой ветке будет не более одной вороны), не зависит от порядка перелетов, но только от начального расположения ворон.

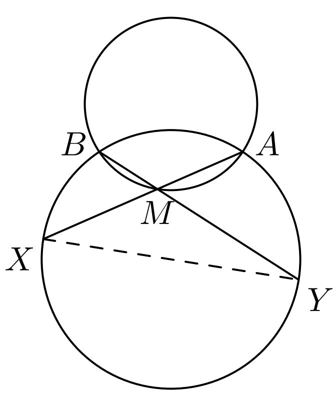
1987.24. 64 кубика уложили в виде квадрата 8×8. Можно ли эти же кубики уложить в виде куба $4 \times 4 \times 4$ таким образом, чтобы кубики, которые были раньше соседними, соседними бы и остались? Соседними считаются два куба, имеющие общую грань.

9-й класс

1987.25. Клетки доски 8×8 раскрашены в шахматном порядке. Разрешается менять местами любые две горизонтали или любые две вертикали. Можно ли при помощи этих операций получить доску, вся левая половина которой окрашена в черный цвет, а правая половина – в белый?

1987.26. Вычислите

$$\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\ddots_{\displaystyle 2-\frac{1}{2}}}} \qquad \text{(100 двоек)}$$



1987.27. В точках A и B пересечения двух окружностей касательные к этим окружностям взаимно перпендикулярны. Пусть M — произвольная точка на одной из окружностей, лежащая внутри другой окружности. Продолжим отрезки AM и BM за точку M до пересечения в точках X и Y с окружностью, содержащей M внутри себя. Докажите, что XY — диаметр этой окружности.

1987.28. См. задачу 21.

1987.29. Найдите наибольшее натуральное число, каждая некрайняя цифра которого меньше среднего арифметического соседних с ней цифр.

1987.30. Астроном, наблюдая на небе 50 звезд, обнаружил, что сумма всех попарных расстояний между ними равна S. Набежавшее облако заслонило 25 звезд. Докажите, что сумма попарных расстояний между видимыми звездами меньше $S/2$.

10-й класс

1987.31. См. задачу 20.

1987.32. См. задачу 26.

1987.33. См. задачу 27.

1987.34. См. задачу 21.

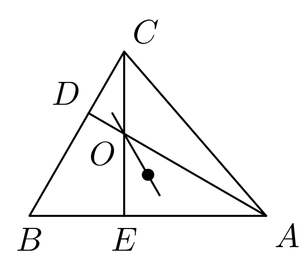
1987.35. Найдется ли такое натуральное n, что $n^n + (n+1)^n$ делится на 1987?

1987.36. См. задачу 30.

Заключительный тур

8-й класс

1987.37. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен $60°$, а высоты CE и AD пересекаются в точке O. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на общей биссектрисе углов AOE и COD.



1987.38. Даны положительные числа a, b, c, d. Докажите, что если $cd = 1$, то на промежутке с концами ab и $(a+c)(b+d)$ найдется по крайней мере один квадрат целого числа.

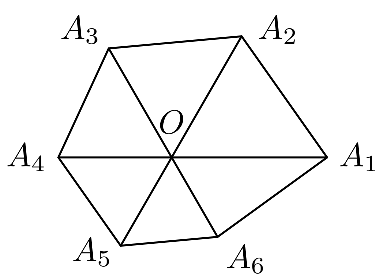
1987.39. На доске нарисовано поле для игры "в цифры":

$$(((((((((\_\_ * \_\_) * \_\_) * \_\_) * \_\_) * \_\_) * \_\_) * \_\_) * \_\_) * \_\_)\,.$$

Играют двое. Ходят по очереди. Первый игрок начальным ходом записывает на месте первого (самого левого) пробела __ какую-нибудь цифру.

Каждый следующий ход состоит в том, чтобы записать цифру на месте очередного пробела и заменить стоящую слева от нее звездочку $*$ на знак сложения или умножения. При этом никакая цифра не может встречаться дважды. В конце игры вычисляется значение полученного выражения. Если это четное число, то выигрывает первый игрок, если нечетное — то второй. Кто выигрывает при правильной игре?

1987.40. В городе Райземнойске разрешается производить только обмены квартирами (но не размены!). Две семьи, обменявшиеся квартирами, не имеют права в этот же день участвовать в других обменах. Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня.



1987.41. В шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ нашлась точка O, из которой все стороны видны под углом $60°$. Докажите, что если $OA_1 > OA_3 > OA_5$ и $|OA_2| > |OA_4| > |OA_6|$, то $|A_1A_2| + |A_3A_4| + |A_5A_6| < |A_2A_3| + |A_4A_5| + |A_6A_1|$.

1987.42. Разложите число $989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320$ на простые множители.

1987.43.* Плоскость разрезали по нескольким окружностям, среди которых есть пересекающиеся; но окружности не лежат друг в друге. Докажите, что вырезанные при этом из плоскости куски не удастся сложить в виде нескольких непересекающихся кругов.

1987.44.* Стража ловит забравшегося во дворец к султану Багдадского вора. Чтобы поймать вора, стражнику нужно оказаться с ним в одной комнате. Дворец состоит из 1000 комнат, соединенных дверьми. Планировка дворца такова, что из комнаты в соседнюю комнату нельзя пройти иначе, как через соединяющую их (всегда единственную) дверь.

а) Докажите, что при любой планировке дворца 10 стражников могут составить план действий, гарантирующий поимку вора.

б) Докажите, что 5 стражникам это может не удаться.

в) Докажите, что для поимки заведомо достаточно 6 стражников.

9-й класс

1987.45. См. задачу 37.

1987.46. См. задачу 38.

1987.47. Восемь неотрицательных вещественных чисел, сумма которых равна единице, расставлены в вершинах куба. Для каждого ребра стоящие в его концах числа перемножили. Докажите, что сумма всех полученных таким образом произведений не превосходит $1/4$.

1987.48. Дана последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$, в которой $a_1 < 1987$ и $a_k + a_{k+1} = a_{k+2}$ для всех натуральных k. Докажите, что если для некоторого n числа $a_1 - a_n$ и $a_2 + a_{n-1}$ делятся на 1987, то число n нечетно.

1987.49. См. задачу 41.

1987.50. См. задачу 42.

1987.51. Дана стопка из $2n+1$ карточек, с которой разрешается производить следующие две операции:

а) сверху снимается часть карточек и перекладывается вниз с сохранением порядка;

б) верхние n карточек с сохранением порядка вкладываются в n промежутков между нижними $n+1$ карточками.

Докажите, что при помощи указанных операций из исходного расположения карточек в стопке нельзя получить более $2n(2n+1)$ различных расположений карточек.

1987.52. См. задачу 44.

10-й класс

1987.53. См. задачу 37.

1987.54. Непрерывные функции $f, g\colon [0;1] \to [0;1]$ обладают тем свойством, что $f(g(x)) = g(f(x))$ для любого x из $[0;1]$. Докажите, что если f возрастает, то найдется $a \in [0;1]$, такое, что $f(a) = g(a) = a$.

1987.55. См. задачу 47.

1987.56. Даны последовательность вещественных чисел $X_1, X_2, X_3, \ldots$ и натуральное число T. Докажите, что если среди всевозможных упорядоченных T-элементных наборов вида $(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_{k+T})$ имеется не более T различных, то последовательность $X_1, X_2, X_3, \ldots$ периодична.

1987.57. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что

$$\frac{|AB|}{|CD|}+\frac{|CD|}{|AB|}+\frac{|BC|}{|AD|}+\frac{|AD|}{|BC|}\leqslant\frac{|OA|}{|OC|}+\frac{|OC|}{|OA|}+\frac{|OB|}{|OD|}+\frac{|OD|}{|OB|}\,.$$

1987.58. См. задачу 42.

1987.59. См. задачу 51.

1987.60.* В m-элементном множестве выделили S подмножеств, содержащих a_1, a_2, $\ldots$, a_s элементов соответственно. Известно, что среди этих подмножеств ни одно не содержится в другом. Докажите, что

$$\frac{1}{\binom{m}{a_1}}+\frac{1}{\binom{m}{a_2}}+\ldots+\frac{1}{\binom{m}{a_s}}\leqslant 1\,,$$

где $\binom{m}{a_k}=m!/a_k!(m-a_k)!$.