# 1991

## 6-й класс

**1991.01.** В кружке тяжелого ракетостроения занимаются 40 школьников. У каждого из них есть болтики, винтики и гвоздики. Известно, что кружковцев, у которых количество гвоздиков не равно количеству болтиков, ровно 15 человек. Количество тех, у кого число винтиков равно числу гвоздиков — 10. Докажите, что есть не менее 15 кружковцев, у которых число винтиков не равно числу болтиков.

**1991.02.** На черном рынке в деревне Перестройкино, если постараться, можно обменять любые два продовольственных талона на три других, и наоборот. Может ли кооператор Вася обменять 100 талонов на масло на 100 талонов на колбасу, отдав в процессе обмена ровно 1991 талон?

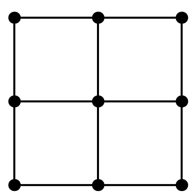
**1991.03.** По круговому замкнутому шоссе одновременно и из одной точки начинают ехать четыре автомобиля: А, В, С и Д. Первые два едут по часовой стрелке, другие два — против, причем все автомобили едут с постоянными (возможно, различными) скоростями. Известно, что А и С встречаются впервые в тот же момент, что и В и Д. Докажите, что А и В поравняются впервые в тот же момент, что и С и Д.

**1991.04.** Вот уже много лет барон Мюнхгаузен ежедневно ходит к озеру охотиться на уток. Начиная с 1 августа 1991 года он каждый день говорит своему повару: “Сегодня я подбил уток больше, чем два дня назад, но меньше, чем неделю назад”. Какое наибольшее количество дней барон может произносить эту фразу? (Не забывайте, что Мюнхгаузен никогда не лжет).

**1991.05.** Есть три одинаковых прута метровой длины: красный, синий и белый. Коля ломает первый прут на три части, после чего Вася поступает так же со вторым прутом. И, наконец, Коля ломает третий прут тоже на три части. Может ли Коля действовать так, чтобы независимо от того, как ломал прут Вася, из полученных девяти кусков можно было бы сложить три треугольника, у каждого из которых одна сторона была бы красная, другая — синяя, а третья — белая?

**1991.06.** Девять команд сыграли однокруговой волейбольный турнир. Обязательно ли выполняется следующее свойство: найдутся две команды A и B такие, что любая другая команда проиграла в турнире либо команде A, либо команде B?

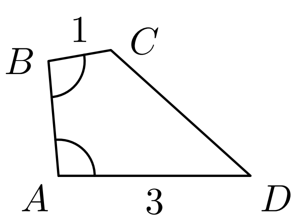
## 7-й класс



**1991.07.** Расставьте на двенадцати отрезках, изображенных на рисунке, числа от 1 до 12 так, чтобы суммы чисел на сторонах каждого маленького квадрата были одинаковы.

**1991.08.** Ныряльщики добыли несколько жемчужин в количестве, не большем 1000. Дележ жемчуга происходит у них следующим образом: они по очереди подходят к куче жемчуга и каждый ныряльщик берет либо ровно половину, либо ровно треть от числа оставшихся в куче жемчужин. После того, как все ныряльщики взяли свою долю, остаток жемчуга был пожертвован морскому богу. Какое наибольшее число ныряльщиков могло участвовать в добыче жемчуга?

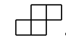
**1991.09.** За круглым столом сидят 1991 представитель четырех племен: люди, гномы, эльфы и гоблины. Известно, что люди никогда не сидят рядом с гоблинами, а эльфы никогда не сидят рядом с гномами. Докажите, что какие-то два представителя одного и того же племени сидят рядом.




**1991.10.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы $A$ и $B$ равны по величине. Известно также, что $BC = 1$, а $AD = 3$. Докажите, что длина стороны $CD$ больше, чем 2.

**1991.11.** Условие задачи в задачнике выглядит следующим образом: “Имеется $N$ чисел, сумма любых десяти из которых больше, чем сумма остальных чисел. Докажите, что все числа положительны.” Известно, что вместо $N$ в условии должно было стоять некоторое натуральное число, не равное 20, однако при наборе была допущена ошибка. Какое это число? Нужно найти все возможные варианты.

**1991.12.** В некотором государстве каждые два города соединены ровно одной дорогой: это либо шоссе, либо железная дорога. Докажите, что можно выбрать один вид транспорта — автомобиль или поезд — так, чтобы из любого города в любой другой можно было проехать, заезжая по дороге не более, чем в два других города, и используя только этот вид транспорта.

**1991.13.** Квадрат $7 \times 7$ разрезан на фигурки трёх типов, ,  и . Докажите, что в разрезании участвует ровно одна фигурка из четырех клеток (т.е. второго или третьего типа).

## 8-Й КЛАСС

**1991.14.** См. задачу 9.

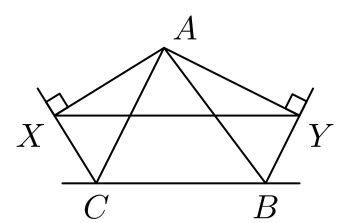
**1991.15.** Натуральное число $X$ не имеет нулей в десятичной записи и удовлетворяет равенству

$$X \cdot \overline{X} = 1000 + P(X)\,.$$

Здесь через $\overline{X}$ обозначено число, записанное теми же цифрами, что и $X$, но в обратном порядке, а $P(X)$ — произведение цифр числа $X$. Найдите все такие числа.

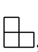
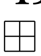
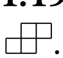
**1991.16.** См. задачу 5.

**1991.17.** Из вершины $A$ треугольника $ABC$ опущены перпендикуляры $AX$ и $AY$ на биссектрисы внешних углов $B$ и $C$. Докажите, что длина отрезка $XY$ равна полупериметру треугольника $ABC$.




**1991.18.** Докажите равенство

$$\frac{(2^3-1)(3^3-1)\dots(100^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)\dots(100^3+1)} = \frac{3367}{5050}\,.$$

**1991.19.** Квадрат $(2n-1) \times (2n-1)$ разрезан на фигурки трёх типов ,  и . Докажите, что в разрезании участвует не менее $4n-1$ фигурок первого типа (т.е. “уголков”).

**1991.20.** Имея набор $A$ из $10$ различных вещественных чисел, можно построить набор $A(5)$, состоящий из всевозможных сумм по $5$ различных чисел из набора $A$. Существуют ли два разных набора $A$ и $B$ такие, что наборы $A(5)$ и $B(5)$ совпадают?

## 9-й класс

**1991.21.** Даны неотрицательные вещественные числа $A$, $B$ и $C$. Докажите неравенство:

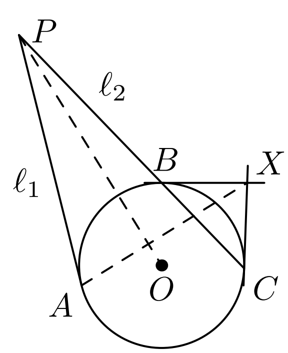
$$\max(A^2 - B, B^2 - C, C^2 - A) \geqslant \max(A^2 - A, B^2 - B, C^2 - C)\,.$$

Здесь через $\max(X, Y, \ldots)$ обозначено наибольшее число из набора $\{X, Y, \ldots\}$.

**1991.22.** В остроугольном треугольнике $ABC$ $AB > BC$. На сторонах $AB$ и $BC$ взяты точки $X$ и $Y$ соответственно так, что $AX = BY$. Докажите, что $XY \geqslant AC/2$.

**1991.23.** Треугольник имеет целые длины сторон $x$, $y$ и $z$, причем известно, что длина одной из его высот равна сумме длин двух других высот. Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2$ — квадрат целого числа.

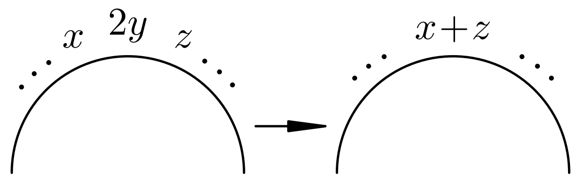
**1991.24.** Последовательность натуральных чисел $(a_n)$ строится по следующему правилу. Каждый ее член с четным номером $a_{2n}$ получается из $a_{2n-1}$ вычитанием из него какой-либо цифры этого числа, а каждый член с нечетным номером $a_{2n+1}$ получается из $a_{2n}$ прибавлением к нему какой-либо цифры числа $a_{2n}$. Докажите, что все члены данной последовательности не превосходят $10a_1$.




**1991.25.** Точка $P$ находится вне окружности с центром $O$. Прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ проходят через точку $P$, причем $\ell_1$ касается окружности в точке $A$, а $\ell_2$ пересекает окружность в точках $B$ и $C$. Касательные к окружности в точках $B$ и $C$ пересекаются в точке $X$. Докажите, что $AX$ и $PO$ перпендикулярны.

**1991.26.** На симпозиуме каждый делегат знаком хотя бы с одним из остальных участников, но при этом для любых двух делегатов найдется третий, не знакомый с ними обоими. Докажите, что всех делегатов можно разбить на три группы так, чтобы каждый участник симпозиума был знаком хотя бы с одним человеком из своей группы.

**1991.27.** По окружности расставлены целые числа. Разрешается делать следующее: стереть любое четное число, после чего заменить соседние с ним числа на их сумму (см. рисунок). Такие операции производятся до тех пор, пока на окружности либо не останется ни одного четного числа, либо количество чисел станет равно 1 или 2. Докажите, что количество чисел, оставшихся на окружности, не зависит от способа действий, а зависит лишь от исходной расстановки чисел.

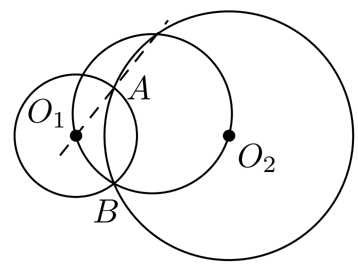



## 10-й класс

**1991.28.** Даны неотрицательные вещественные числа $a$, $b$, $c$ и $d$. Докажите неравенство:

$$\max(a^2-b, b^2-c, c^2-d, d^2-a) \geqslant \max(a^2-a, b^2-b, c^2-c, d^2-d)\,.$$

**1991.29.** Две окружности с центрами $O_1$ и $O_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Окружность $(O_1BO_2)$ пересекает вторую окружность также и в точке $P$. Докажите, что точки $O_1$, $A$ и $P$ лежат на одной прямой.




**1991.30.** На симпозиуме каждый делегат знаком хотя бы с одним из остальных участников, но не со всеми. Докажите, что всех делегатов можно разбить на две группы так, чтобы каждый участник симпозиума был знаком хотя бы с одним человеком из своей группы.

**1991.31.** Непрерывная и строго монотонно возрастающая функция $f$ такова, что $f(0)=0$ и $f(1)=1$. Докажите, что

$$f\left(\frac{1}{10}\right)+f\left(\frac{2}{10}\right)+\ldots+f\left(\frac{9}{10}\right)+$$
$$+f^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)+f^{-1}\left(\frac{2}{10}\right)+\ldots+f^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)\leqslant\frac{99}{10}\,.$$

**1991.32.** Компьютер “КПК-1991” умеет выполнять следующие две операции над натуральными числами:

(1) возведение в квадрат;

(2) $n$-значное ($n > 3$) число $X$ переходит в число $A + B$, где $A$ — число, образованное последними тремя цифрами числа $X$, а $B$ — число, образованное первыми $n - 3$ цифрами числа $X$. Можно ли при помощи компьютера получить число 703 из числа 604?

**1991.33.** На плоскости расположены прямая $L$, точка $P$ и $n$-угольник $M$. Прямая $L$ пересекает все стороны многоугольника $M$ во внутренних точках, причем известно, что эти точки есть основания перпендикуляров, опущенных на стороны $M$ из точки $P$. Докажите, что $n = 4$.

**1991.34.*** Поля доски $N \times N$ раскрашены в красный, синий и зеленый цвета, причем так, что рядом с любой красной клеткой есть синяя, рядом с любой синей есть зеленая, и рядом с любой зеленой есть красная клетка (т.е. соответствующие клетки имеют общую сторону). Докажите, что для количества красных клеток $k$ выполняются неравенства

а) $k \leqslant 2N^2/3$;

б) $k \geqslant N^2/11$.

## 11-й класс

**1991.35.** См. задачу 28.

**1991.36.** Можно ли разбить числа 1, 2, 3, ..., 100 на три группы так, чтобы в первой группе сумма чисел делилась на 102, во второй – на 203, а в третьей — на 304?

**1991.37.** См. задачу 25.

**1991.38.** Последовательность натуральных чисел $a_n$ строится по следующему правилу. Каждый ее член с четным номером $a_{2n}$ получается из $a_{2n-1}$ прибавлением к нему какой-либо цифры числа $a_{2n-1}$, а каждый член с нечетным номером $a_{2n+1}$ получается из $a_{2n}$ вычитанием из него какой-либо цифры этого числа. При этом и прибавлять, и вычитать на каждом шагу разрешается лишь ненулевые цифры. Докажите, что все члены данной последовательности не превосходят $4a_1 + 44$.

**1991.39.** Существуют ли четыре различных числа таких, что любые два из них — $x$ и $y$ — связаны соотношением

$$x^{10} + x^9y + x^8y^2 \ldots + xy^9 + y^{10} = 1\ ?$$

**1991.40.** На сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ выбраны точки $X$ и $Y$ соответственно так, что $\angle AXY = 2\angle ACB$, $\angle CYX = 2\angle BAC$. Докажите неравенство

$$\frac{S(AXYC)}{S(ABC)} \leqslant \frac{|AX|^2 + |XY|^2 + |YC|^2}{|AC|^2}\,.$$

**1991.41.*** На планете Транай 1991 город, каждые два из которых соединены дорогой. Каждый день Министерство строительства закрывает три дороги на ремонт, после чего Министерство транспорта вводит на одной из незакрытых дорог одностороннее движение. Те дороги, на которых такое движение уже введено, Министерство строительства не закрывает. Докажите, что Министерство транспорта может добиться того, чтобы из любого города в любой другой можно было проехать, двигаясь только в разрешенном направлении.

## Отборочный тур

### 9, 10-е классы

**1991.42.** Дано 70 различных натуральных чисел, не превосходящих 200. Докажите, что какие-то два из них различаются на 4, 5 или 9.

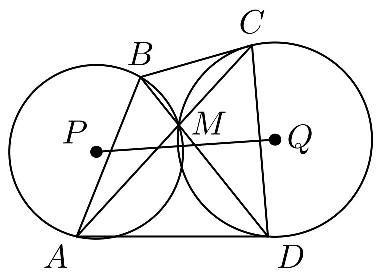
**1991.43.** Две окружности одинакового радиуса пересекаются в точках $A$ и $B$. Произвольная прямая, проходящая через точку $B$, пересекает окружности еще и в точках $X$ и $Y$. Найдите геометрическое место середин отрезков $XY$.

**1991.44.** Натуральные числа $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ таковы, что для любого натурального $k < n$ сумма любых $k$ чисел из данного набора не меньше $k(k-1)$, а сумма всех чисел в наборе равна $n(n-1)$. Докажите, что футбольный однокруговой турнир $n$ команд мог закончиться так, что количества очков, набранные командами, совпадут с числами $A_i$.

**1991.45.** Найдите 8 натуральных чисел $a_i$ таких, что

$$\sqrt{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_1 - 1}} + \ldots + \sqrt{\sqrt{a_8} - \sqrt{a_8 - 1}} = 2\,.$$

**1991.46.** Существует ли функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая, что $f(f(f(\ldots f(x))\ldots)) = x + 1$ для любого натурального $x$ ($f$ применена $f(x)$ раз)?



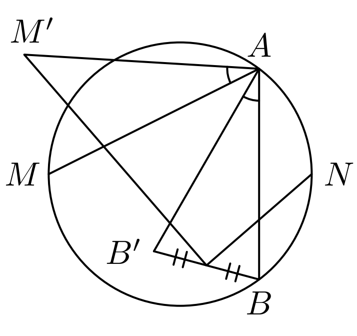

**1991.47.*** В ряд выписано 26 ненулевых цифр. Докажите, что этот ряд можно разбить на несколько частей так, чтобы сумма чисел, образованных цифрами каждой из частей, делилась на 13.

**1991.48.** $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, диагонали которого пересекаются в точке $M$. Пусть $P$ и $Q$ — центры окружностей, описанных вокруг треугольников $ABM$ и $CDM$. Докажите, что $AB + CD \leqslant 4PQ$.

**1991.49.*** Тасовкой колоды из $n$ карт называется следующая операция: колода делится на некоторое (произвольное) число частей, которые без изменения положения карт внутри них перекладываются в обратном порядке. Докажите, что колоду из 1000 карт можно перевести из любого положения в любое другое не более, чем за 56 тасовок.

## 11-й класс

**1991.50.** В верхнем правом углу доски $8\times 8$ стоит черная фишка. За ход разрешается поставить на любое поле доски белую фишку и перекрасить все фишки, стоящие на полях, соседних с данным (т.е. имеющих с этим полем общую вершину). Можно ли добиться того, чтобы вся доска была заполнена белыми фишками?




**1991.51.** $AB$ — хорда окружности, делящая ее на два сегмента. $M$ и $N$ — середины дуг, на которые делят окружность точки $A$ и $B$. При повороте вокруг точки $A$ на некоторый угол точка $B$ переходит в точку $B'$, а точка $M$ — в точку $M'$. Докажите, что отрезки, соединяющие середину отрезка $BB'$ с точками $M'$ и $N$, перпендикулярны.

**1991.52.** Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лежат в отрезке $[-1; 1]$, причем сумма кубов этих чисел равна нулю. Докажите, что сумма $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ не превосходит $n/3$.

**1991.53.** С натуральным числом разрешается делать следующие две операции:

а) умножать его на любое натуральное число;

б) вычеркивать в его десятичной записи нули.

Докажите, что при помощи этих операций из любого числа можно получить однозначное число.

**1991.54.*** Даны две непрерывные функции $f, g\colon [0;1] \to [0;1]$, причем функция $f$ монотонно возрастает. Докажите неравенство

$$\int\limits_0^1 f(g(x))\,dx \leqslant \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_0^1 g(x)\,dx\,.$$

**1991.55.*** Назовем конечную последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $p$-уравновешенной, если все суммы вида $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \ldots$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ равны между собой. Докажите, что если 50-членная последовательность $p$-уравновешенна для $p = 3$, 5, 7, 11, 13, 17, то все ее члены равны нулю.

**1991.56.*** Докажите, что число $512^3 + 675^3 + 720^3$ — составное.

**1991.57.*** Назовем шаблоном произвольный набор из $n$ вершин правильного $2n$-угольника. Верно ли, что заведомо существуют $100$ поворотов $2n$-угольника такие, что образы шаблона при этих поворотах покрывают все множество из $2n$ вершин?