

Principe local-global en sémantique comme la base d'un critère d'identité des significations

Oleg Prosorov

Institut Mathématique Steklov, Saint-Pétersbourg
CREA - UMR 7656, École Polytechnique - CNRS, Paris

En mathématiques, le principe local-global abstrait est un principe informel selon lequel certaines propriétés concernant des objets globaux sont vraies si et seulement si elles sont vraies pour des objets locaux associés. Le plus célèbres exemples en sont les théorèmes de Hasse-Minkowski, de Pfister, de Kato, de Deligne et Mumford, pour n'en citer que quelques-uns ; il y a aussi bien d'autres théorèmes appelés simplement principe local-global. Il ne faut pas penser que ledit principe soit toujours et partout vrai. La construction d'un contre-exemple à ce principe dans une situation particulière apporte parfois une information essentielle sur le domaine étudié ; on pose alors le problème d'obstruction au principe local-global en considération. Au sens large, le principe local-global concerne non seulement un type des théorèmes mais il s'étend aussi à un type des définitions comme, par exemple, une définition de la continuité selon laquelle une fonction numérique $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en tout point x de I ; il y a aussi bien d'autres définitions classiques de ce genre. Appelé principe local-global en mathématiques, le même type de raisonnement reliant les données locales et celles globales s'est vu appliqué aux circonstances où l'on a besoin de comparer quelques objets complexes. Par exemple, pour reconnaître que deux voitures quelconques sont de la même marque, il faut qu'elles aient le même type de carrosserie, de moteur, d'équipement électronique, etc. De même pour la comparaison, disons, de deux immeubles du point de vue architectural, laquelle se réduit à la comparaison de leurs arcs, colonnes, toits, etc. Un autre exemple du même principe d'identification se rencontre dans la pratique d'usage d'un photo-robot pour identifier la personne cherchée par la police.

En science du langage, et plus particulièrement en herméneutique, on trouve aussi un principe théorique reliant les données locales et globales, celui du cercle herméneutique qui prescrit « comprendre une partie à partir de la compréhension d'un tout et comprendre un tout à partir de la compréhension de ses parties constitutives ». Au fond, une théorie de la compréhension des expressions linguistiques n'est pas autre chose qu'une théorie de la signification. Le but de notre travail est de reformuler mathématiquement le principe du cercle herméneutique pour introduire un principe local-global en sémantique traité comme un *critère d'identité des significations fragmentaires* à tout palier de description sémantique (mot, phrase, texte) qu'on utilise implicitement dans la pratique d'interprétation de textes. Notre analyse de l'activité interprétative dans la communication linguistique débouche sur une sémantique formelle des textes (2006) qui se rattache à la tradition herméneutique.

1. Concepts de base. – Nous considérons un langage naturel comme moyen de communication entre les membres d'une même communauté linguistique ; donc les textes et les discours en sont les unités communicatives minimales de base. Tous les textes que nous considérons sont supposés être écrits en bonne volonté et destinés à la compréhension humaine ; nous les appelons *textes admissibles*. Nous considérons un texte comme la séquence de ses phrases ; son fragment quelconque est une sous-séquence de la séquence donnée.

Nous distinguons les notions sémantiques principales *sens*, *signification* et *référence*.

Pour ce qui concerne le terme *sens*, notre acception est en quelque sorte une version laïque de celle des quatre sens de l'Écriture en herméneutique biblique. A chaque niveau sémantique (mot, phrase, texte), nous utilisons le terme *sens* pour indiquer une certaine direction des efforts interprétatifs qui concerne la totalité de ce qui est à interpréter. Dans cette acception, le terme *sens* suit l'usage du mot « sens » en français courant : 1° pour désigner la faculté d'éprouver des

sensations ou la faculté de juger, et comme une faculté, il caractérise le sujet qui la dispose ; 2° pour désigner la direction ou l'orientation spatiale de mouvement et comme orientation d'une action, encore il caractérise plutôt le sujet qui exerce une telle activité. Bref, nous concevons le *sens* plutôt comme une direction des efforts interprétatifs, comme un mode de lecture pour ainsi dire qui caractérise plutôt l'attitude d'un lecteur qu'un texte. A chaque niveau, le *sens* se manifeste comme une orientation sémantique de la part du lecteur dans ses efforts interprétatifs et non pas celle immanente au texte.

Pour ce qui concerne notre acception du terme *signification*, disons qu'elle est basée étymologiquement sur le verbe « signifier » du français courant et non pas sur le terme linguistique « signe » appartenant aux sciences sémiotiques. Selon l'usage courant, « vouloir dire » et « signifier » sont des synonymes. C'est ainsi que la signification (et le fait de signifier) d'une expression linguistique est conçue en connexion avec la situation d'emploi dans un discours ou dans un processus de lecture et non pas avec une propriété assignée aux signes. Dans (2004), nous avons montré qu'il en est de même au niveau de phrase et au niveau de mot. Alors, les expressions acquièrent leur significations dans une situation de communication effective, compte tenu du mode de lecture (*sens*) adopté. Côté émetteur (auteur, locuteur, destinataire, etc.), la signification d'une expression est ce que l'on veut exprimer par celle-là, ce que l'on veut communiquer dans le processus de production d'un message. Côté récepteur (lecteur, auditeur, destinataire, etc.), la signification d'une expression est ce que l'on a compris comme véhiculé par celle-là. Cela veut dire qu'une signification fragmentaire est un résultat des efforts interprétatifs réussis qui suivent un mode de lecture (*sens*) adopté. A chaque niveau sémantique (texte, phrase, mot), la signification qu'on a saisie par la compréhension d'un fragment est un objet bien distinct de notre intuition ou de notre pensée. Elle est enracinée dans la pratique sociale de la communication linguistique au sein d'une communauté qui partage un même langage. La compétence linguistique qu'on présuppose chez un lecteur se développe au cours de l'apprentissage d'une langue et de son usage quotidien grâce auxquels on dispose des mécanismes qui permettent pour les membres de la communauté d'arriver au consensus sur la signification d'une telle ou d'une autre expression langagière, ce qui permet d'associer les significations aux expressions employées dans un discours ou dans un texte ; ces significations ne sont pas immanentes au texte mais sont saisies dans le processus d'interprétation. Une fois qu'on a compris une expression langagière (une phrase, un texte ou son fragment quelconque), on a la conviction d'en avoir saisi une signification, i.e. d'avoir compris ce qu'elle veut dire. Cette signification se présente comme un objet bien distinct de notre intuition ou de notre pensée. Une signification fragmentaire a une objectivité de type normatif enracinée dans une pratique sociale de la communication langagière qui contrôle la compréhension individuelle par intériorisation du même système de normes et adoption des mêmes formes d'expression langagières.

2. Topologies et faisceaux sur un texte admissible. – La compréhension d'un texte au cours de la lecture n'est pas remise à sa fin : elle se fait au fur et à mesure de ce processus. On a donc bon droit de considérer certains fragments du texte comme ayant des significations. Des travaux philologiques en présentent maints exemples cités de textes étudiés. Un fragment significatif mérite un commentaire, ou il peut faire l'objet d'une discussion en tant que celui qui vaut l'interprétation.

Il est bien d'accord avec notre intuition linguistique que l'ensemble de ces fragments significatifs possèdent les propriétés suivantes :

- (i) *la réunion d'une famille arbitraire des fragments significatifs est un fragment significatif ; le texte X tout entier est sûrement significatif en tant qu'un texte admissible ;*
- (ii) *l'intersection non-vide de deux fragments significatifs doit l'être aussi.*

La propriété (i) est en effet une façon particulière d'exprimer le principe dit de cercle herméneutique selon lequel on comprend un tout à la base de compréhension de ses parties. La propriété

(ii) exprime en effet le caractère local de la compréhension en processus de lecture d'un texte.

Du point de vue mathématique ces propriétés (i) et (ii) sont évidemment caractéristiques pour les ouverts d'une topologie sur X . Parce que le texte admissible X est significatif par sa définition même, il nous reste à contourner un détail technique en munissant d'une signification le fragment vide pour définir sur un texte admissible une topologie que nous appelons *phonocentrique*. Dans cette topologie, l'ensemble $\mathcal{O}(X)$ des ouverts est constitué de toutes les parties significatives $U \subseteq X$.

Il est clair que nous considérons un texte comme une séquence de ses phrases et son fragment quelconque comme une sous-séquence de la séquence donnée ; de même, nous considérons une phrase comme une séquence des mots (morphèmes). Les structures mathématiques (topologie, ordre, faisceaux etc.) sont à définir donc sur le graphe fonctionnel correspondant. Pour définir une topologie, nous sommes donc obligé de fixer un niveau de considération sémantique pour formuler notre définition de façon dite axiomatique. A chaque niveau sémantique, nous distinguons un tout qui est un espace topologique, ses éléments primitifs qui sont les points de cet espace, et les fragments d'un tout qui sont les ensembles ouverts de cet espace.

Selon F. Rastier (1995) : « les textes ne connaissent jamais le suspens de l'interprétation. Elle est compulsive et incoercible. Par exemple, les mots inconnus, les noms propres, voire les non-mots sont interprétés, validement ou non, peu importe. » Alors, pour tout couple x, y de phrases distinctes d'un texte admissible X , il existe donc un fragment significatif (i. e. un ouvert) U qui contient l'une de phrases x, y (celle lue la première) et ne contient pas l'autre. Cela veut dire qu'au niveau sémantique dont les éléments primitifs (points) sont les phrases, la topologie phonocentrique satisfait à l'axiome T_0 de Kolmogoroff. Il y en a de même à tous les niveaux de description sémantique d'un texte admissible. Ces niveaux se distinguent par ses éléments primitifs : chapitres, paragraphes, phrases, mots.

Pour un texte admissible, toute topologie définie sur n'importe quel niveau sémantique doit être celle d'Alexandroff en tant qu'une topologie sur un espace fini ; rappelons qu'une topologie est celle d'Alexandroff si l'intersection d'une famille arbitraire des ouverts est aussi un ouvert.

Soient X un texte admissible muni de la topologie phonocentrique, \mathcal{F} un sens (mode de lecture) adopté. Alors, pour toute partie ouverte $U \subset X$ correspond un certain ensemble $\mathcal{F}(U)$ des significations fragmentaires ; chaque élément $s \in \mathcal{F}(U)$ est une signification du fragment U saisie dans un processus de lecture dans le sens \mathcal{F} adopté. Toutes les significations fragmentaires possibles sous un même mode de lecture (sens) \mathcal{F} sont réunies en un ensemble $\mathcal{F}(U)$ dans une idéalisation platonicienne propre à une pratique de raisonnement mathématique non-constructif grâce à laquelle nous avons bon droit de réunir en une totalité des objets bien distincts de notre intuition ou de notre pensée.

Nous sommes donc en présence d'une application $\mathcal{F} : U \mapsto \mathcal{F}(U)$ définie sur l'ensemble $\mathcal{O}(X)$ de tous les ouverts $U \subset X$. Chaque élément $s \in \mathcal{F}(U)$ est une signification fragmentaire de U qui varie avec la situation de lecture, l'attitude du lecteur, ses préjugés, ses préférences sa culture personnelle, etc., i.e. avec ce que nous appelons sens ou mode de lecture \mathcal{F} adopté ; le sens \mathcal{F} s'y présente pour ainsi dire *in extenso* comme l'ensemble $\mathcal{F}(U)$ de toutes les significations fragmentaires possibles pour chaque fragment $U \subset X$ lu dans le sens \mathcal{F} .

Le précepte du cercle herméneutique « comprendre une partie à partir de la compréhension d'un tout » définit, pour tout couple d'ouverts $U \subset V$, une application dite de restriction $\text{res}_{V,U} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$, de telle sorte que 1° $\text{res}_{V,V} = \text{id}_{\mathcal{F}(V)}$ pour tout ouvert V , et 2° la condition de transitivité $\text{res}_{V,U} \circ \text{res}_{W,V} = \text{res}_{W,U}$ soit vérifiée pour tous les ouverts $U \subset V \subset W$. Pour un espace topologique X quelconque, la donnée de $(\mathcal{F}(V), \text{res}_{V,U})_{V,U \in \mathcal{O}(X)}$ soumise à de telles conditions s'appelle dans les mathématiques actuelles *préfaisceau d'ensembles* sur X .

Un texte admissible est un moyen par lequel son auteur veut exprimer quelque chose à quelqu'un. Ce qui lui vient à l'esprit en prime abord, c'est le contenu qu'il veut exprimer par la signification d'un texte futur imaginaire qu'il cherche à écrire ; ensuite, dans le processus

de composition, viendront ses parties constitutives, chacune avec une signification, lesquelles, en tant que parties (données locales), constituent le moyen pour déterminer une signification voulue d'un tout (donnée globale). C'est ainsi que l'on procède du global au local au cours de la création d'un texte admissible X ou de son fragment significatif quelconque U ; cela munit les significations fragmentaires d'une structure de préfaisceau au sens mathématique du terme. Lorsqu'on lit un fragment significatif U , une aspiration majeure est d'en saisir une signification en tant qu'un tout. Quand on veut comparer deux significations $s, t \in \mathcal{F}(U)$ au sujet de leur identité, on analyse le processus de lecture du fragment U (modélisée comme un recouvrement ouvert $U = \bigcup_{j \in J} U_j$ par les fragments déjà lus) pour comparer toutes les significations locales $s_j = \text{res}_{U, U_j}(s)$ et $t_j = \text{res}_{U, U_j}(t)$. Si l'on constate les identités des significations locales $s_j = t_j$, on en déduit l'identité $s = t$ des significations globales, en vertu de l'identité incontestable du lecteur à soi-même. Alors, deux significations s, t sont reconnues identiques globalement, si et seulement si elles sont identiques localement. C'est un *critère d'identité des significations fragmentaires* formulé comme un **principe local-global en sémantique** ; en termes mathématiques, il s'exprime comme :

Condition S (séparabilité). – Soient X un texte admissible, U un ouvert de X , et soient s, t deux significations fragmentaires dans $\mathcal{F}(U)$. S'il existe un recouvrement ouvert $U = \bigcup_{j \in J} U_j$ de U par des ouverts U_j contenus dans U tel que, pour tout U_j , $\text{res}_{U, U_j}(s) = \text{res}_{U, U_j}(t)$, alors $s = t$.

Le précepte du cercle herméneutique « comprendre un tout à partir de la compréhension de ses parties constitutives » exprime implicitement un principe compositionnel discursif dont le cas particulier au niveau de phrase est le principe compositionnel classique de Frege, d'où :

Condition C (compositionnalité). – Soient X un texte admissible, U un ouvert de X et $U = \bigcup_{j \in J} U_j$ un recouvrement ouvert de U par des ouverts U_j contenus dans U . Supposons donnée une famille $(s_j)_{j \in J}$ de significations fragmentaires ($s_j \in \mathcal{F}(U_j)$ pour tout U_j) telle que $\text{res}_{U_i, U_i \cap U_j}(s_i) = \text{res}_{U_j, U_i \cap U_j}(s_j)$. Alors il existe une signification s du fragment U telle que $\text{res}_{U, U_j}(s) = s_j$ pour chaque fragment U_j .

D'après la définition mathématique, un préfaisceau satisfaisant aux conditions S et C est appelé *faisceau*, d'où :

Principe compositionnel généralisé de Frege. – Tout préfaisceau de significations fragmentaires lié naturellement à un texte admissible est en fait un faisceau.

Il semble que Frege lui-même n'a formulé aucun critère explicite d'identité pour ses *Sinn* et *Bedeutung*. Selon Quine (1977), il n'y a « point d'entité sans identité » ; sinon, on ne peut pas faire des opérations logiques sur les propositions concernant de tels objets ni les réunir en ensembles et faire des opérations ensemblistes sur eux, ni quantifier sur eux. Nous avons formulé un critère d'identité des *significations fragmentaires* comme un principe local-global. Pour ce qui concerne les *sens*, nous avons argumenté dans (2006) qu'un critère raisonnable d'identité des sens est fourni par la notion d'*équivalence naturelle* empruntée à la théorie des faisceaux.

Références

- Prozorov, O. (2005a). Compositionality and contextuality as adjoint principles. In M. Werning, E. Macher, & G. Schurz (Eds.), *The compositionality of meaning and content, (Vol. II : Applications to Linguistics, Psychology and Neuroscience)* (pp. 149–174). Frankfurt : Ontos-Verlag.
- Prozorov, O. (2005b). Formal hermeneutics based on Frege duality. In E. Maier, C. Bary, & J. Huitink (Eds.), *Proceedings of SuB9* (pp. 286–298). Nijmegen : NCS.
- Prozorov, O. (2006). Sheaf-theoretic formal semantics. *TRAMES Journal of the Humanities and Social Sciences*, 10(1), 57–80.
- Quine, W. V. (1977). *Relativité de l'ontologie et quelques autres essais* (J. Largeaut, Trans.). Paris : Aubier-Montaigne.
- Rastier, F. (1995). Communication ou transmission. *Césure*, 8, 151–195.