# Нестационарные упругие волны: трехмерные и двумерные задачи

С.Н. Гаврилов

http://www.pdmi.ras.ru/~serge/lectures/2020-2.pdf

## Полезная литература


В.С. Владимиров
Уравнения математической физики.
М., Наука, . . .

Л.И. Слепян
Нестационарные упругие волны.
Л., «Судостроение», 1972.

Бабич, В.М., Киселёв А.П.
Упругие волны. Высокочастотная теория.
СПб, «БХВ-Петербург», 2014.

Eringen, A.C., Şuhubi E.S.
Elastodynamics. Vol 2. Linear theory.
Academic Press, 1975.

Achenbach, J.D.
Wave propagation in elastic solids.
North Holland, 1975.

# Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$

$$\triangle u = \delta(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$$

Применяя преобразование Фурье по $x_1, x_2, x_3$, получим

$$-\mathbf{k}^2 u_F(\mathbf{k}) = 1.$$

Функция $\mathbf{k}^{-2}$ — локально интегрируемая в $\mathbb{R}^3$, поэтому

$$u = -\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\, dk_1\, dk_2\, dk_3}{\mathbf{k}^2} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-i|\mathbf{k}||\mathbf{r}|\cos\theta) k^2 \sin\theta\, dk\, d\theta\, d\phi}{k^2}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-ik|\mathbf{r}|\cos\theta) \sin\theta\, dk\, d\theta \; \boxed{\mu = \cos\theta} \; = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{1} \int_0^{\infty} \exp(-ik|\mathbf{r}|\mu)\, dk\, d\mu$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{1} \int_0^{\infty} \cos(k|\mathbf{r}|\mu)\, dk\, d\mu = -\frac{2}{(2\pi)^2|\mathbf{r}|} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\sin(k|\mathbf{r}|)}{k}\, dk}_{\text{Интеграл Дирихле} = \frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

# Интеграл Дирихле $\int_0^\infty \frac{\sin(k\alpha)}{k}\,dk$

$$\lim_{\epsilon\to+0}\oint \frac{\exp(ik\alpha)}{k+i\epsilon}\,dk = 0 \overset{\alpha\geq 0}{=} \lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_{\mathrm{Re}} + \cancel{\int_{\cap}}\right)\frac{\exp(ik\alpha)}{k+i\epsilon}\,dk =$$

Формулы Сохоцкого: $\frac{1}{k\mp i0} = \pm i\pi\delta(k) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{k}$

$$= -i\pi + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ik\alpha)}{k}\,dk \quad \overset{\mathrm{Im}}{\Longrightarrow}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(k\alpha)}{k}\,dk = \frac{\pi}{2}$$

# Разложение Гельмгольца в $\mathbb{R}^3$

$\forall$ гладкого поля $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} = \nabla\Phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi},$$

где

$$\Phi = \nabla \cdot \mathbf{W},$$
$$\boldsymbol{\Psi} = -\nabla \times \mathbf{W},$$
$$\mathbf{W} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{f} * \frac{1}{|\mathbf{r}|}.$$

Здесь $\Phi$ — скалярный потенциал, $\boldsymbol{\Psi}$ — векторный потенциал.

# Сферические волны в $\mathbb{R}^3$

$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = 0$$

$$\daleth\ u = u(r,t), \quad r = |\mathbf{r}| \qquad \Longrightarrow \qquad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

Для $r > 0$:

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r - c^{-2}\ddot{u} = 0 \qquad \overset{u=v/r}{\Longrightarrow} \qquad v_{rr} - c^{-2}\ddot{v} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad u = \frac{1}{r}\,\phi_-\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}\,\phi_+\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

# Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$

$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = \chi(t)\delta(\mathbf{r}), \qquad \chi\big|_{t<0} \equiv 0. \tag{1}$$

Начальные условия: $u\big|_{t<0} \equiv 0$.

$$\exists\ u = u(r,t), \quad r = |\mathbf{r}| \qquad \Longrightarrow \qquad \triangle = \tfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \tfrac{2}{r}\tfrac{\partial}{\partial r}$$

Для $r > 0$:

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r - c^{-2}\ddot{u} = 0 \qquad \overset{u=v/r}{\Longrightarrow} \qquad v_{rr} - c^{-2}\ddot{v} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad u = \frac{1}{r}\,\phi_-\left(t - \frac{r}{c}\right) + \cancel{\frac{1}{r}\,\phi_+\left(t + \frac{r}{c}\right)}$$

# Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$

$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = \chi(t)\delta(\mathbf{r}), \qquad \chi\big|_{t<0} \equiv 0. \tag{1}$$

Начальные условия: $u\big|_{t<0} \equiv 0$.

$\exists\ u = u(r,t), \quad r = |\mathbf{r}| \qquad \Longrightarrow \qquad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$

$u = \dfrac{1}{r}\phi\left(t - \frac{r}{c}\right)$, где $\phi$ подлежит определению. Вычислим $\triangle u$:

$$\triangle \frac{\phi(r,t)}{r} =$$

$$= \phi\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{1}{r} + \cancel{2\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \phi\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} + \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial r}} = \phi\triangle\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}$$

$$= -4\pi\phi(0,t)\delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \qquad \underset{\phi(r,t)=\phi(t-r/c)}{\overset{(1)}{\Longrightarrow}} \qquad \phi(0,t) = -\frac{1}{4\pi}\chi(t)$$

# Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$

$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = \chi(t)\delta(\mathbf{r}), \qquad \chi\big|_{t<0} \equiv 0. \tag{1}$$

Начальные условия: $u\big|_{t<0} \equiv 0$.

$\exists\ u = u(r,t), \quad r = |\mathbf{r}| \qquad \Longrightarrow \qquad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$

$$u = -\frac{\chi\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

В частности, если $\chi(t) = \delta(t)$:

$$u = \mathcal{U}_{(3)} \equiv -\frac{\delta\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

# Отражение сферической волны от центра симметрии

Ранее мы показали, что

$$\left(\triangle - c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\phi\left(t \pm \frac{r}{c}\right)}{r} = -4\phi\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Таким образом однородному волновому уравнению во всём $\mathbb{R}^3$ удовлетворяет линейная комбинация

$$\frac{\phi\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r} - \frac{\phi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r},$$

т.е. сходящаяся волна $r^{-1}\phi\left(t + \frac{r}{c}\right)$ отражается от центра симметрии аналогично волнам в струне с закреплённым концом.

# Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$

Рассмотрим источник единичной плотности в $\mathbb{R}^3$, сосредоточенный на оси $x_3$:

$$\triangle \mathcal{U}_{(2)} - c^{-2}\ddot{\mathcal{U}}_{(2)} = \delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2)1(x_3). \tag{2}$$

Начальные условия: $\mathcal{U}_{(2)}\big|_{t<0} \equiv 0$.

Предполагая, что $\mathcal{U}_{(2)} = \mathcal{U}_{(2)}(\mathfrak{r}),\ \mathfrak{r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, получаем вместо (2) уравнение в $\mathbb{R}^2$:

$$\tilde{\triangle}\mathcal{U}_{(2)} - c^{-2}\ddot{\mathcal{U}}_{(2)} = \delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2).$$

Решение (2) строится как свёртка (метод спуска):

$$\mathcal{U}_{(2)} = \mathcal{U}_{(3)} \star 1(x_3)\delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2) =$$

...

# Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$

Рассмотрим источник единичной плотности в $\mathbb{R}^3$, сосредоточенный на оси $x_3$:

$$\triangle \mathcal{U}_{(2)} - c^{-2}\ddot{\mathcal{U}}_{(2)} = \delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2)1(x_3). \tag{2}$$

Начальные условия: $\mathcal{U}_{(2)}\big|_{t<0} \equiv 0$.

Предполагая, что $\mathcal{U}_{(2)} = \mathcal{U}_{(2)}(\mathfrak{r})$, $\mathfrak{r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, получаем вместо (2) уравнение в $\mathbb{R}^2$:

$$\tilde{\triangle} \mathcal{U}_{(2)} - c^{-2}\ddot{\mathcal{U}}_{(2)} = \delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2).$$

Решение (2) строится как свёртка (метод спуска):

$$\mathcal{U}_{(2)} = \mathcal{U}_{(3)} \star 1(x_3)\delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}^{(3)}(\mathfrak{r}, x_3, t)\, dx_3 = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta\left(t - \frac{\sqrt{\mathfrak{r}^2+\xi^2}}{c}\right)}{\sqrt{\mathfrak{r}^2+\xi^2}}\, d\xi$$

$$\delta(f(t)) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t - t_i)$$

# Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$

$$\xi_0 = \sqrt{c^2t^2 - \mathfrak{r}^2}$$

$$g'_\xi\Big|_{\xi=\xi_0} = \left(t - \frac{\sqrt{\mathfrak{r}^2+\xi^2}}{c}\right)'_\xi\Big|_{\xi=\xi_0} = -\frac{2\xi}{2c\sqrt{\mathfrak{r}^2+\xi^2}}\Big|_{\xi=\xi_0} = -\frac{\sqrt{c^2t^2-\mathfrak{r}^2}}{c^2t}$$

Решение (2) строится как свёртка (метод спуска):

$$\mathcal{U}_{(2)} = \mathcal{U}_{(3)} \star 1(x_3)\delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2) =$$

$$= -\frac{H(ct-\mathfrak{r})}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\delta\big(g(\xi)\big)}{\sqrt{\mathfrak{r}^2+\xi^2}}\,d\xi = -\frac{H(ct-\mathfrak{r})}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\delta(\xi-\xi_0)}{|g'(\xi_0)|\sqrt{\mathfrak{r}^2+\xi_0^2}}\,d\xi =$$

$$= -\frac{c}{2\pi}\frac{H(ct-\mathfrak{r})}{\sqrt{c^2t^2-\mathfrak{r}^2}}$$

# Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^1$

Совершенно аналогично:

$$\mathcal{U}_{(1)} = \mathcal{U}^{(2)} \star 1(x_2)\delta(t)\delta(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_{(2)}(x_1, y, t)\, dy =$$

$$= -\frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(c^2 t^2 - x_1^2 - y^2)}{\sqrt{c^2 t^2 - x_1^2 - y^2}}\, dy =$$

$$= -\frac{cH(ct - |x_1|)}{\pi} \int_0^{\sqrt{c^2 t^2 - x_1^2}} \frac{dy}{\sqrt{c^2 t^2 - x_1^2 - y^2}} =$$

$$= -\frac{cH(ct - |x_1|)}{\pi} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = -\frac{cH(ct - |x_1|)}{\pi} \arcsin 1 =$$

$$= -\frac{cH(ct - |x_1|)}{2}$$

— уже знакомый нам результат!

# Принцип Гюйгенса ($\mathbb{R}^3$)

$$\mathcal{U}_{(3)} = -\frac{\delta\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

Принцип Гюйгенса: Возмущение от точечного, мгновенно действующего источника $\delta(\mathbf{r})\delta(t)$ к моменту времени $t > 0$ будет сосредоточено на сфере радиуса $ct$ с центром в точке $\mathbf{r} = 0$. Это значит, что такое возмущение распространяется в виде сферической волны движущейся со скоростью $c$, причем после прохождения этой волны опять тождественно равно нулю.

# Принцип Гюйгенса ($\mathbb{R}^2$)

$$\mathcal{U}_{(2)} = -\frac{c}{2\pi} \frac{H(ct - \mathfrak{r})}{\sqrt{c^2 t^2 - \mathfrak{r}^2}}$$

Принцип Гюйгенса: Возмущение от точечного, мгновенно действующего источника $\delta(\mathbf{r})\delta(t)$ к моменту времени $t > 0$ будет сосредоточено на сфере радиуса $ct$ с центром в точке $\mathbf{r} = 0$. Это значит, что такое возмущение распространяется в виде сферической волны движущейся со скоростью $c$, причем после прохождения этой волны опять тождественно равно нулю.

Для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$ принцип Гюйгенса не выполняется, т.к. за фронтом покой не наступает. Говорят, что имеет место диффузия волн.

# Принцип Гюйгенса ($\mathbb{R}^1$)

$$\mathcal{U}_{(1)} = -\frac{cH(ct - |x_1|)}{2}$$

Принцип Гюйгенса: Возмущение от точечного, мгновенно действующего источника $\delta(\mathbf{r})\delta(t)$ к моменту времени $t > 0$ будет сосредоточено на сфере радиуса $ct$ с центром в точке $\mathbf{r} = 0$. Это значит, что такое возмущение распространяется в виде сферической волны движущейся со скоростью $c$, причем после прохождения этой волны опять тождественно равно нулю.

Для волнового уравнения в $\mathbb{R}^1$ принцип Гюйгенса выполняется для производных $u', \dot{u}$ и не выполняется для $u$.

# Принцип Гюйгенса ($\mathbb{R}^n, n > 1$)

Выполняется для нечётных $n$, не выполняется для чётных $n$.

# Задачи

1. Для $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ задано неоднородное волновое уравнение
$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = \delta(x_1)\delta(x_2)H(1 - |x_3|)\delta(t).$$
и нулевые начальные условия. На плоскости $x_3 = 0$ найти выражение для решения задачи.
2. Вычислить решение неоднородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$
$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = \delta(x_1)\delta(x_2)H(t),$$
удовлетворяющее нулевым НУ.

## Уравнения линейной изотропной эластодинамики (Навье, Ламе)

Баланс количества движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{K} - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Баланс кинетического момента:

$$\mathbf{T}^\top = \mathbf{T}.$$

Закон Гука для линейно-упругого изотропного материала:

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} = k \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{I} + 2\mu \operatorname{Dev} \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S$ — тензор малых деформаций, $\lambda,\ \mu$ — постоянные Ламе $(\mu > 0,\ 3\lambda + 2\mu \equiv 3k > 0)$.

$$\mu \triangle \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\rho\mathbf{K}$$

# Плоские волны

$$\mu \triangle \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

Ищем решения однородных уравнений ЭД в виде $\mathbf{u} = \mathbf{A} f(\theta)$, $\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega t$ — плоские волны.

$f$ — форма волны (произвольная функция),
$\theta$ — фаза,
$\mathbf{A}$ — векторная амплитуда,
$\mathbf{k}$ — волновой вектор.

Фазовая скорость плоской волны — нормальная скорость движения поверхности постоянной фазы:

$$\mathbf{v} = \frac{\Omega \mathbf{k}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} = \frac{\Omega}{|\mathbf{k}|} \hat{\mathbf{k}}$$

Медленность плоской волны:

$$\mathbf{s} = \frac{|\mathbf{k}|}{\Omega} \hat{\mathbf{k}} = \Omega^{-1} \mathbf{k}$$

# Плоские волны

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

Ищем решения однородных уравнений ЭД в виде $\mathbf{u} = \mathbf{A}f(\theta)$, $\theta = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega t$ — плоские волны.

$$\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla\nabla f\cdot\mathbf{A} = f''\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{A},$$

$$\triangle\mathbf{u} = \nabla\cdot\nabla\mathbf{u} = \nabla\cdot\nabla f\mathbf{A} = f''(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\mathbf{I}\cdot\mathbf{A},$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = f''\Omega^2\mathbf{A}$$

Получаем задачу на собственные значения:

$$\Big((\lambda+\mu)\mathbf{k}\mathbf{k} + \mu(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{I} - \rho\Omega^2\mathbf{I}\Big)\cdot\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

# Плоские P & S волны

$$\Big((\lambda+\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}+\mu(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{I}-\rho\Omega^2\mathbf{I}\Big)\cdot\mathbf{A}=\mathbf{0}.$$

$A \parallel \mathbf{k}$ — собственный вектор, если $(\lambda+2\mu)\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=\rho\Omega^2$. Вычисляя по определению фазовую скорость и медленность, находим

$$\mathbf{v}\equiv\frac{\Omega}{|\mathbf{k}|}\hat{\mathbf{k}}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\,\hat{\mathbf{k}}\equiv c_1\hat{\mathbf{k}},\qquad \mathbf{s}\equiv\Omega^{-1}\mathbf{k}=c_1^{-1}\hat{\mathbf{k}}.$$

Это плоские P (Primary, продольные, растяжения-сжатия, дилатации) волны.

# Плоские P & S волны

$$\left((\lambda+\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}+\mu(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{I}-\rho\Omega^2\mathbf{I}\right)\cdot\mathbf{A}=\mathbf{0}.$$

$A \parallel \mathbf{k}$ — собственный вектор, если $(\lambda+2\mu)\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=\rho\Omega^2$. Вычисляя по определению фазовую скорость и медленность, находим

$$\mathbf{v}\equiv\frac{\Omega}{|\mathbf{k}|}\hat{\mathbf{k}}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\,\hat{\mathbf{k}}\equiv c_1\hat{\mathbf{k}},\qquad \mathbf{s}\equiv\Omega^{-1}\mathbf{k}=c_1^{-1}\hat{\mathbf{k}}.$$

Это плоские P (Primary, продольные, растяжения-сжатия, дилатации) волны.

$A \perp \mathbf{k}$ — собственный вектор, если $\mu\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=\rho\Omega^2$. Вычисляя по определению фазовую скорость и медленность, находим

$$\mathbf{v}\equiv\frac{\Omega}{|\mathbf{k}|}\hat{\mathbf{k}}=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,\hat{\mathbf{k}}\equiv c_2\hat{\mathbf{k}},\qquad \mathbf{s}\equiv\Omega^{-1}\mathbf{k}=c_2^{-1}\hat{\mathbf{k}}.$$

Это плоские S (Secondary, поперечные, сдвига-вращения, искажения) волны.

# Скалярный потенциал и P-волны

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

$\exists$ поле перемещений потенциально:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi,$$

$\Phi$ — скалярный потенциал. Подставляя это представление в уравнения эластодинамики, получаем волновое уравнение

$$\cancel{(\lambda+2\mu)}\nabla\left(\triangle\Phi - c_1^{-2}\ddot{\Phi}\right) = 0.$$

## Пример

Плоской P-волне

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}f'(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega t). \qquad c_1^2\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \Omega^2$$

соответствует скалярный потенциал $\Phi = f(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega t)$.

Решения, представляемые посредством скалярного потенциала, являются P-волнами.

# Векторный потенциал и S-волны

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

$\urcorner$ поле перемещений соленоидально:

$$\mathbf{u} = \nabla\times\boldsymbol{\Psi},$$

$\boldsymbol{\Psi}$ — векторный потенциал. Подставляя это представление в уравнения эластодинамики, получим волновое уравнение

$$\cancel{\mu\nabla\times}\left(\triangle\boldsymbol{\Psi} - c_2^{-2}\ddot{\boldsymbol{\Psi}}\right) = \mathbf{0}.$$

**Пример**

Плоской S-волне

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}\times\mathbf{m}\,f'(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega t), \qquad c_2^2\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \Omega^2$$

соответствует векторный потенциал $\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{m}f(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega t)$.

Решения, представляемые посредством векторного потенциала, являются S-волнами.

# Потенциалы: общий случай при наличии внешних сил

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\rho\mathbf{K}$$

$\exists\ \mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla\times\mathbf{\Psi},\quad \mathbf{K} = \nabla X + \nabla\times\mathbf{Y}$:

$$(\lambda+2\mu)\nabla\left(\triangle\Phi - c_1^{-2}\ddot{\Phi}\right) + \mu\nabla\times\left(\triangle\mathbf{\Psi} - c_2^{-2}\ddot{\mathbf{\Psi}}\right) = -\rho(\nabla X + \nabla\times\mathbf{Y}).$$

$$\Longleftarrow\qquad \begin{aligned} \triangle\Phi - c_1^{-2}\ddot{\Phi} &= -c_1^{-2}X,\\ \triangle\mathbf{\Psi} - c_2^{-2}\ddot{\mathbf{\Psi}} &= -c_2^{-2}\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{4\pi r} * \left(-c_1^{-2}X\right),\\ \mathbf{\Psi} &= -\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} * \left(-c_2^{-2}\mathbf{Y}\right), \end{aligned}$$

В общем случае решения уравнений ЭД являются суммой P и S волн, распространяющихся со скоростями $c_1$ и $c_2$ соответственно.

# Уравнения линейной изотропной эластодинамики (Навье, Навье-Коши, Ламе)

Баланс количества движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{K} - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Баланс кинетического момента:

$$\mathbf{T}^\top = \mathbf{T}.$$

Закон Гука для линейно-упругого изотропного материала:

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}\ \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} = k \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}\ \mathbf{I} + 2\mu \operatorname{Dev} \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S$ — тензор малых деформаций, $\lambda,\ \mu$ — постоянные Ламе $(\mu > 0,\ 3\lambda + 2\mu \equiv 3k > 0)$.

$$\mu \triangle \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\rho\mathbf{K}$$

# Уравнения линейной изотропной эластодинамики (Навье, Навье-Коши, Ламе)

Баланс количества движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{K} - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Баланс кинетического момента:

$$\mathbf{T}^\top = \mathbf{T}.$$

Закон Гука для линейно-упругого изотропного материала:

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}\ \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} = k \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}\ \mathbf{I} + 2\mu \operatorname{Dev} \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S$ — тензор малых деформаций, $\lambda,\ \mu$ — постоянные Ламе ($\mu > 0,\ 3\lambda + 2\mu \equiv 3k > 0$).

$$-\mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\rho\mathbf{K}$$

# Уравнения линейной изотропной эластодинамики (Навье, Навье-Коши, Ламе)

Баланс количества движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{K} - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Баланс кинетического момента:

$$\mathbf{T}^\top = \mathbf{T}.$$

Закон Гука для линейно-упругого изотропного материала:

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} = k \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{I} + 2\mu \operatorname{Dev} \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S$ — тензор малых деформаций, $\lambda,\ \mu$ — постоянные Ламе ($\mu > 0,\ 3\lambda + 2\mu \equiv 3k > 0$).

$$-c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + c_1^2 \nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}$$

# Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$-c_2^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+c_1^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\ddot{\mathbf{u}}=-\chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n},$$

Начальные условия $\mathbf{u}\big|_{t<0}\equiv 0$, при этом предполагаем $\chi\big|_{t<0}\equiv 0$.

$\exists\ \phi=\nabla\cdot\mathbf{u},\ \boldsymbol{\psi}=\nabla\times\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot: &\qquad \triangle\phi-c_1^{-2}\ddot{\phi}=-c_1^{-2}\chi(t)\nabla\cdot\mathbf{n}\delta(\mathbf{r})\\ \nabla\times: &\qquad \triangle\boldsymbol{\psi}-c_2^{-2}\ddot{\boldsymbol{\psi}}=-c_2^{-2}\chi(t)\nabla\times\mathbf{n}\delta(\mathbf{r})\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\phi=c_1^{-2}\nabla\cdot\mathbf{n}\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{4\pi r},$$

$$\boldsymbol{\psi}=c_2^{-2}\nabla\times\mathbf{n}\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r}$$

# Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} + c_1^2 \nabla \phi + \chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

$\exists\ \phi = \nabla \cdot \mathbf{u},\ \boldsymbol{\psi} = \nabla \times \mathbf{u}$:

$$\triangle \phi - c_1^{-2} \ddot{\phi} = -c_1^{-2} \chi(t) \nabla \cdot \mathbf{n} \delta(\mathbf{r})$$

$$\triangle \boldsymbol{\psi} - c_2^{-2} \ddot{\boldsymbol{\psi}} = -c_2^{-2} \chi(t) \nabla \times \mathbf{n} \delta(\mathbf{r})$$

$\Longrightarrow$

$$\phi = c_1^{-2} \nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{4\pi r},$$

$$\boldsymbol{\psi} = c_2^{-2} \nabla \times \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r}$$

# Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c_2^2\nabla\times\boldsymbol{\psi} + c_1^2\nabla\phi + \chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

$\daleth$ $\phi = \nabla\cdot\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\psi} = \nabla\times\mathbf{u}$:

$$\triangle\phi - c_1^{-2}\ddot{\phi} = -c_1^{-2}\chi(t)\nabla\cdot\mathbf{n}\delta(\mathbf{r})$$
$$\triangle\boldsymbol{\psi} - c_2^{-2}\ddot{\boldsymbol{\psi}} = -c_2^{-2}\chi(t)\nabla\times\mathbf{n}\delta(\mathbf{r})$$

$\Longrightarrow$

$$\phi = c_1^{-2}\nabla\cdot\mathbf{n}\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{4\pi r},$$
$$\boldsymbol{\psi} = c_2^{-2}\nabla\times\mathbf{n}\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r}$$

объемная деформация (дилатация)

удвоенный вектор малого поворота

# Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} + c_1^2 \nabla \phi + \chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

$$c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{n}) \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} = (-\triangle \mathbf{n} + \nabla\nabla \cdot \mathbf{n}) \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} =$$

$$= \nabla\nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} - \triangle \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} \mathbf{n} =$$

$$= \nabla\nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} + \chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n} - \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi c_2^2 r} \mathbf{n}$$

# Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} + c_1^2 \nabla \phi + \cancel{\chi(t)\delta(\mathbf{r})}\mathbf{n}$$

$$c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{n}) \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} = (-\triangle \mathbf{n} + \nabla\nabla \cdot \mathbf{n}) \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} =$$

$$= \nabla\nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} - \triangle \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} \mathbf{n} =$$

$$= \nabla\nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} + \cancel{\chi(t)\delta(\mathbf{r})}\mathbf{n} - \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi c_2^2 r} \mathbf{n}$$

# Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{n}\cdot\nabla\nabla\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{r} - \frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{r}\right) + \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\mathbf{n}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} =$$

# Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{n}\cdot\nabla\nabla\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{r} - \frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{r}\right) + \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\mathbf{n}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} = \quad \nabla\left(\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\chi - \frac{\dot{\chi}}{cr}\hat{\mathbf{r}}\right) = \nabla\left(-\frac{\chi}{r^3}\mathbf{r} - \frac{\dot{\chi}}{cr^2}\mathbf{r}\right)$$

# Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{n}\cdot\nabla\nabla\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{r} - \frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{r}\right) + \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\mathbf{n}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} = \nabla\left(\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\chi - \frac{\dot{\chi}}{cr}\hat{\mathbf{r}}\right) = \nabla\left(-\frac{\chi}{r^3}\mathbf{r} - \frac{\dot{\chi}}{cr^2}\mathbf{r}\right)$$

$$\overset{\nabla\mathbf{r}=\mathbf{I}}{=} \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I})$$

# Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{n}\cdot\nabla\nabla\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{r} - \frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{r}\right) + \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\mathbf{n}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} = \nabla\left(\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\chi - \frac{\dot{\chi}}{cr}\hat{\mathbf{r}}\right) = \nabla\left(-\frac{\chi}{r^3}\mathbf{r} - \frac{\dot{\chi}}{cr^2}\mathbf{r}\right)$$

$$\overset{\nabla\mathbf{r}=\mathbf{I}}{=} \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I})$$

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}) +$$

$$+\left(\frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1} - \frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2} + \chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right) - \chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)\right)\frac{((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n})}{r^3}$$

# Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\rho\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}) +$$

$$+\left(\frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1} - \frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2} + \chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right) - \chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)\right)\frac{((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n})}{r^3}$$

$$\daleth\ z = \int_{r/c_1}^{r/c2} \tau\chi(t-\tau)\,d\tau \qquad \Longrightarrow$$

$$\ddot{z} = \frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1} - \frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2} + \chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right) - \chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)$$

# Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\left((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\right)+$$

$$+\left(\frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1} - \frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2} + \chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right) - \chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)\right)\frac{\left((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\right)}{r^3}$$

$$z = \int_{r/a}^{r/b} \tau\chi(t-\tau)\,d\tau \Rightarrow \ddot{z} = \int_{r/a}^{r/b} \tau\ddot{\chi}(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{t-r/a}^{t-r/b} (t-\tau)\,d\dot{\chi} = \frac{r}{b}\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{b}\right) - \frac{r}{a}\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{a}\right) -$$

$$+ \int_{t-r/a}^{t-r/b} d\chi = \frac{r}{b}\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{b}\right) - \frac{r}{a}\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{a}\right) + \chi\Big|_{t-r/a}^{t-r/b}$$

# Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}) + \\ + \frac{d^2}{dt^2}\left(\int_{r/c_1}^{r/c2} \tau\chi(t-\tau)\,d\tau\right)\frac{((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n})}{r^3}$$

# Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\mathbf{u} = \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\left((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}\right) +$$

$$+ \left(\int_{r/c_1}^{r/c2} \tau\chi(t-\tau)\,d\tau\right)\frac{\left((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}\right)}{r^3}$$

# Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$-c_2^2\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + c_1^2\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0} \equiv 0.$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}) + \right.$$

$$\left. + \int_{r/c_1}^{r/c2} \tau\chi(t-\tau)\, d\tau \, \frac{((3\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n})}{r^3}\right)$$

# Фундаментальное решение уравнений эластодинамики: $\daleth\,\chi = \delta$

$$-c_2^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) + c_1^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\delta(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0} \equiv 0$.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}) + \right.$$

$$\left. + \int_{r/c_1}^{r/c_2}\tau\delta(t-\tau)\,d\tau\,\frac{((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n})}{r^3}\right)$$

# Фундаментальное решение уравнений эластодинамики: $\beth\,\chi = \delta$

$$-c_2^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) + c_1^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\delta(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0} \equiv 0$.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\left((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\right) + \right.$$
$$\left. + t\big(H(t-r/c_1) - H(t-r/c_2)\big)\frac{\left((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\right)}{r^3}\right)$$

The basic singular solution of elastodynamics

# Тензор Стокса

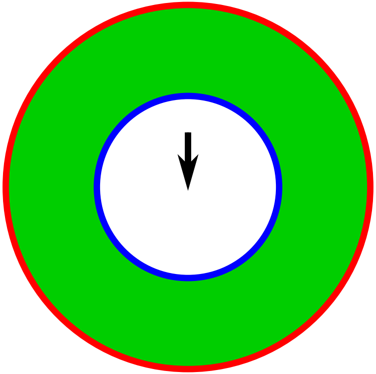
$$-c_2^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+c_1^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\ddot{\mathbf{u}}=-\delta(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0}\equiv 0$.

$$\mathbf{u}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}-\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{I})+t\big(H(t-r/c_1)-H(t-r/c_2)\big)\frac{3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{I}}{r^3}\right)\cdot\mathbf{n}$$

# Тензор Стокса: характер волнового поля

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{I}) + t\big(H(t-r/c_1)-H(t-r/c_2)\big)\frac{3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{I}}{r^3}\right)\cdot\mathbf{n}$$



$r = c_1 t$: дилатация и сдвиг

$r = c_2 t$: поворот и сдвиг

сдвиг

# Тензор Стокса: характе

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0,$$

$$\nabla \mathbf{r} = \mathbf{I},$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{I}}{r^3} = -\frac{3\,\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{I}}{r^4},$$

$$\nabla \times \frac{\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}{r^3} = \nabla \times \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} =$$

$$= -5\frac{\cancel{(\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{r})}\,\mathbf{r}}{r^6} + \frac{\cancel{(\nabla \times \mathbf{r})}\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{r} \times (\nabla \mathbf{r})}{r^5} =$$

$$= -\frac{\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{I}}{r^4}$$

## Задача

Показать непосредств т между фронтами P и S волн равны нулю:

- $\nabla \cdot \dfrac{3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}}{r^3} = \mathbf{0},$
- $\nabla \times \dfrac{3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}}{r^3} = \mathbf{0}.$

## Решение через потенциалы

$$-c_2^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+c_1^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\ddot{\mathbf{u}}=-\chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n},$$

Начальные условия $\mathbf{u}\big|_{t<0}\equiv 0$, при этом предполагаем $\chi\big|_{t<0}\equiv 0$.

$\exists\ \mathbf{u}=\nabla\Phi+\nabla\times\boldsymbol{\Psi}$:

$$\triangle\Phi-{c_1}^{-2}\ddot{\Phi}={c_1}^{-2}\chi(t)\nabla\cdot\frac{\mathbf{n}}{4\pi r}$$

$$\triangle\boldsymbol{\Psi}-{c_2}^{-2}\ddot{\boldsymbol{\Psi}}=-{c_2}^{-2}\chi(t)\nabla\times\frac{\mathbf{n}}{4\pi r}$$

$\Longrightarrow\qquad \exists\ \Phi=\nabla\cdot\varphi\mathbf{n},\quad \boldsymbol{\Psi}=-\nabla\times\psi\mathbf{n}$

$$\cancel{\nabla\cdot}:\qquad \triangle\varphi-{c_1}^{-2}\ddot{\varphi}={c_1}^{-2}\frac{\chi(t)}{4\pi r},\qquad \varphi\big|_{t<0}\equiv 0;$$

$$\cancel{\nabla\times}:\qquad \triangle\psi-{c_2}^{-2}\ddot{\psi}={c_2}^{-2}\frac{\chi(t)}{4\pi r},\qquad \psi\big|_{t<0}\equiv 0.$$

$\Longrightarrow\qquad \exists\ \varphi=\dfrac{\varphi_0(r)}{4\pi r},\quad \psi=\dfrac{\psi_0(r)}{4\pi r}$ :

$$\varphi_0''-{c_1}^{-2}\ddot{\varphi}_0={c_1}^{-2}\chi(t),\qquad \varphi_0\big|_{t<0}\equiv 0;$$

$$\psi_0''-{c_2}^{-2}\ddot{\psi}_0={c_2}^{-2}\chi(t),\qquad \psi_0\big|_{t<0}\equiv 0.$$

## Решение через потенциалы

$$\varphi = \frac{\varphi_0(r)}{4\pi r}, \quad \psi = \frac{\psi_0(r)}{4\pi r}:$$

$$\varphi_0'' - c_1^{-2}\ddot{\varphi}_0 = c_1^{-2}\chi(t), \qquad \varphi_0\big|_{t<0} \equiv 0;$$

$$\psi_0'' - c_2^{-2}\ddot{\psi}_0 = c_2^{-2}\chi(t), \qquad \psi_0\big|_{t<0} \equiv 0.$$

$$4\pi\varphi = \frac{1}{r}\left(\int_0^{t-r/c_1} \tau\chi(t - r/c_1 - \tau)\,d\tau - \int_0^t \tau\chi(t-\tau)\,d\tau\right)$$

$$4\pi\psi = \frac{1}{r}\left(\int_0^{t-r/c_2} \tau\chi(t - r/c_2 - \tau)\,d\tau - \int_0^t \tau\chi(t-\tau)\,d\tau\right)$$

$$\mathbf{u} = \nabla\nabla\cdot\varphi\mathbf{n} - \nabla\times(\nabla\times\psi\mathbf{n}) = \nabla\nabla\cdot(\varphi-\psi)\mathbf{n} + \triangle\psi\mathbf{n} =$$

$$\nabla\nabla\cdot\frac{\mathbf{n}}{4\pi r}\left(\int_0^{t-r/c_1} \tau\chi(t - r/c_1 - \tau)\,d\tau - \int_0^{t-r/c_2} \tau\chi(t - r/c_2 - \tau)\,d\tau\right) +$$

$$+\frac{\chi(t - r/c_2)\mathbf{n}}{4\pi c_2^2 r}$$

и далее, упрощая полученное выражение, приходим к прежнему ответу (см. Achenbach).

## Решение через потенциалы

$$\varphi = \frac{\varphi_0(r)}{4\pi r}, \quad \psi = \frac{\psi_0(r)}{4\pi r}:$$

$$\varphi_0'' - c_1^{-2}\ddot{\varphi}_0 = c_1^{-2}\chi(t), \qquad \varphi_0\big|_{t<0} \equiv 0;$$

$$\psi_0'' - c_2^{-2}\ddot{\psi}_0 = c_2^{-2}\chi(t), \qquad \psi_0\big|_{t<0} \equiv 0.$$

$$4\pi\varphi = \frac{1}{r}\left(\int_0^{t-r/c_1} \tau\chi(t - r/c_1 - \tau)\,d\tau - \int_0^t \tau\chi(t-\tau)\,d\tau\right)$$

$$4\pi\psi = \frac{1}{r}\left(\int_0^{t-r/c_2} \tau\chi(t - r/c_2 - \tau)\,d\tau - \int_0^t \tau\chi(t-\tau)\,d\tau\right)$$

### Важный вывод

Для $\chi(t)$: $\chi(t) \neq 0$ при $t > 0$ потенциалы мгновенно становятся ненулевыми во всём $\mathbb{R}^3$, однако вне фронта $r = c_1 t$ их вклад в перемещения равен нулю.

# Переход от волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$ к уравнению Гельмгольца

Рассмотрим волновое уравнение в гармоническом случае:

$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = K(\mathbf{r})\exp(-i\Omega t)$$

Здесь $\Omega > 0$ — частота.

$\exists\ u(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}; \Omega)\exp(-i\Omega t)$: переходим к амплитудам.

Получим уравнение Гельмгольца:

$$\triangle u + \kappa^2 u = K(\mathbf{r}), \qquad \kappa \equiv \frac{\Omega}{c},$$

$\kappa$ — волновое число.

Физические смещения: $\operatorname{Re} u$.

## Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

$$\triangle u + \kappa^2 u = \delta(\mathbf{r})$$

Для $r > 0$:

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \kappa^2 u = 0 \quad \xRightarrow{u=v/r} \quad v_{rr} + \kappa^2 v = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad u = \frac{1}{r}\big(C_+ \exp(i\kappa r) + C_- \exp(-i\kappa r)\big)$$

Как найти $C_\pm$?

# Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

$$\triangle u + \kappa^2 u = \delta(\mathbf{r})$$

Для $r > 0$:

$$u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \kappa^2 u = 0 \qquad \overset{u=v/r}{\Longrightarrow} \qquad v_{rr} + \kappa^2 v = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad u = \frac{1}{r}\big(C_+ \exp(i\kappa r) + C_- \exp(-i\kappa r)\big)$$

Вспоминая, что $u(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}; \Omega) \exp(-i\Omega t)$ выбрасываем член, соответствующий волнам, приходящим с бесконечности:

$$u = \frac{C_+}{r} \exp i\kappa r$$

Как найти $C_+$?

# Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

$$\triangle u + \kappa^2 u = \delta(\mathbf{r})$$

Для $r > 0$:

$$u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \kappa^2 u = 0 \quad \xRightarrow{u=v/r} \quad v_{rr} + \kappa^2 v = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad u = \frac{1}{r}\left(C_+ \exp(i\kappa r) + C_- \exp(-i\kappa r)\right)$$

Вспоминая, что $u(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}; \Omega) \exp(-i\Omega t)$ выбрасываем член, соответствующий волнам, приходящим с бесконечности:

$$u = \frac{C_+}{r} \exp i\kappa r$$

Для определения $C_+$ подставляем разложение

$$u = \frac{C_+}{r}(1 + i\kappa r + \dots)$$

решения в окрестности нуля в исходное уравнение

# Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

$$\triangle u + \kappa^2 u = \delta(\mathbf{r})$$

Для $r > 0$:

$$u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \kappa^2 u = 0 \quad \stackrel{u=v/r}{\Longrightarrow} \quad v_{rr} + \kappa^2 v = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad u = \frac{1}{r}\big(C_+ \exp(i\kappa r) + C_- \exp(-i\kappa r)\big)$$

Вспоминая, что $u(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}; \Omega) \exp(-i\Omega t)$ выбрасываем член, соответствующий волнам, приходящим с бесконечности:

$$u = \frac{C_+}{r} \exp i\kappa r$$

Для определения $C_+$ подставляем разложение

$$u = \frac{C_+}{r}(1 + i\kappa r + \dots)$$

решения в окрестности нуля в исходное уравнение $\quad \Longrightarrow \quad C_+ = -\frac{1}{4\pi}$.

# Единственность решения и принцип предельного поглощения

$$\triangle u + \kappa^2 u = \delta(\mathbf{r})$$

$$u = -\frac{\exp i\kappa r}{4\pi r}$$

# Единственность решения и принцип предельного поглощения

$$\triangle u + \kappa^2 u = \delta(\mathbf{r})$$

$$u = -\frac{\exp i\kappa r}{4\pi r} + C \exp i\kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathrm{const}$, $|\mathbf{n}| = 1$.

Как быть с единственностью?

# Единственность решения и принцип предельного поглощения

$$\triangle u + \kappa^2 u = \delta(\mathbf{r})$$

$$u = -\frac{\exp i\kappa r}{4\pi r} \cancel{+ C \exp i\kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathrm{const}$, $|\mathbf{n}| = 1$.

## Принцип предельного поглощения

$\exists\ \kappa = \mathrm{Re}\,\kappa + i\epsilon, \quad \mathrm{Re}\,\kappa > 0, \quad \epsilon > 0 \quad \Longrightarrow$ растущие при $|\mathbf{r}| \to \infty$ решения должны быть выброшены

Поскольку для уравнения Гельмгольца $\kappa = \frac{\Omega}{c}$, $\Omega > 0$, ППП может быть равносильно переформулирован так:

$\exists\ \Omega = \mathrm{Re}\,\Omega + i\epsilon, \quad \mathrm{Re}\,\Omega > 0, \quad \epsilon > 0 \quad \Longrightarrow$ растущие при $|\mathbf{r}| \to \infty$ решения должны быть выброшены.

# Физическая мотивация принципа предельного поглощения

Вернемся к исходному волнового уравнению...

$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = K(\mathbf{r})\exp(-i\Omega t)$$

$\exists\ u(\mathbf{r},t) = u(\mathbf{r};\Omega)\exp(-i\Omega t), \quad \Omega > 0.$

Соответствующее уравнение Гельмгольца:

$$\triangle u + \kappa^2 u = K(\mathbf{r}),$$

$$\kappa \equiv \frac{\Omega}{c}.$$

Выкидывая теперь растущие решения, приходим к ранее формально сформулированному ППП.

# Физическая мотивация принципа предельного поглощения

...и добавим в него малый диссипативный член. Получим телеграфное уравнение ($\gamma > 0$)

$$\triangle u - 2\gamma \dot{u} - c^{-2}\ddot{u} = K(\mathbf{r})\exp(-i\Omega t)$$

$\beth\ u(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}; \Omega)\exp(-i\Omega t), \quad \Omega > 0.$

Соответствующее уравнение Гельмгольца:

$$\triangle u + \kappa^2 u = K(\mathbf{r}),$$

$$\kappa^2 \equiv \frac{\Omega^2}{c^2} + 2i\gamma\Omega.$$

При $\gamma \to +0$ имеем $\operatorname{Re}\kappa > 0$, $\operatorname{Im}\kappa \to +0$.

Выкидывая теперь растущие решения, приходим к ранее формально сформулированному ППП.

# Выводы

- Уравнение Гельмгольца представляет собой волновое уравнение в частотной области.
- ППП используется для уравнения Гельмгольца вместо условия $u\big|_{t<0} \equiv 0$, используемого для волнового уравнения, а именно, “отсекает” волны, приходящие из прошлого (с бесконечности).
- Переход от волнового уравнения к уравнению Гельмгольца $\Longleftrightarrow$ переходу от нестационарной к стационарной постановке задачи.
- Технически стационарные задачи существенно проще нестационарных, но надо правильно написать условия излучения (например, ППП).
- Для сред с дисперсией корректное написание условий излучения может быть непростой задачей.
- Если возникают сомнения, как правильно написать условия излучения, нужно от стационарной постановки вернуться к нестационарной.

# Уравнения эластодинамики в гармоническом случае

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}(\mathbf{r})\exp(-i\Omega t)$$

$\daleth$ $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}; \Omega)\exp(-i\Omega t)$
Здесь $\Omega > 0$ — частота.

## Уравнения эластодинамики в гармоническом случае

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}(\mathbf{r})\exp(-i\Omega t)$$

$\exists\ \mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \mathbf{u}(\mathbf{r};\Omega)\cancel{\exp(-i\Omega t)}$: переходим к амплитудам
Здесь $\Omega > 0$ — частота.

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + \rho\Omega^2\mathbf{u} = -\rho\mathbf{K}$$

Физические смещения: $\operatorname{Re}\mathbf{u}$

# Гармонические плоские волны

$$\mu \triangle \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

Плоские волны общего вида: $\mathbf{u} = \mathbf{A} f(\theta)$, $\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega t$

- $f$ — форма волны (произвольная функция)
- $\theta$ — фаза
- $\mathbf{A}$ — векторная амплитуда
- $\mathbf{k}$ — волновой вектор

# Гармонические плоские волны

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + \rho\Omega^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Гармонические плоские волны: $\mathbf{u} = \mathbf{A}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\cancel{\exp(-i\Omega t)}$

- $f$ — форма волны: $f(\theta) = \exp i\theta$
- $\theta$ — фаза
- $\mathbf{A}$ — векторная амплитуда
- $\mathbf{k}$ — волновой вектор
- $\Omega$ — частота

# Гармонические плоские волны

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + \rho\Omega^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Гармонические плоские волны: $\mathbf{u} = \mathbf{A}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\cancel{\exp(-i\Omega t)}$

$$\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla\nabla f\cdot\mathbf{A} = -\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{A},$$

$$\nabla\cdot\nabla\mathbf{u} = \nabla\cdot\nabla f\mathbf{A} = -(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}.$$

Подставляя в уравнения эластодинамики, получаем задачу на собственные значения:

$$\Big((\lambda+\mu)\mathbf{k}\mathbf{k} + \mu(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{I} - \rho\Omega^2\mathbf{I}\Big)\cdot\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Дисперсионное уравнение $\Omega = \Omega(\mathbf{k})$:

$$\det\Big((\lambda+\mu)\mathbf{k}\mathbf{k} + \mu(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{I} - \rho\Omega^2\mathbf{I}\Big) = 0.$$

# Гармонические плоские P & S волны

$$\left((\lambda+\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}+\mu(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{I}-\rho\Omega^2\mathbf{I}\right)\cdot\mathbf{A}=\mathbf{0}.$$

$\mathbf{A}\parallel\mathbf{k}$ — собственный вектор, если выполнено дисперсионное соотношение $(\lambda+2\mu)\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=\rho\Omega^2$. Вычисляя по определению фазовую скорость и медленность, находим

$$\mathbf{v}\equiv\frac{\Omega}{|\mathbf{k}|}\hat{\mathbf{k}}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\,\hat{\mathbf{k}}\equiv c_1\hat{\mathbf{k}},\qquad \mathbf{s}\equiv\Omega^{-1}\mathbf{k}=c_1^{-1}\hat{\mathbf{k}}.$$

Это P (Primary, продольные, растяжения-сжатия, дилатации) волны.

$\mathbf{A}\perp\mathbf{k}$ — собственный вектор, если выполнено дисперсионное соотношение $\mu\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=\rho\Omega^2$. Вычисляя по определению фазовую скорость и медленность, находим

$$\mathbf{v}\equiv\frac{\Omega}{|\mathbf{k}|}\hat{\mathbf{k}}=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,\hat{\mathbf{k}}\equiv c_2\hat{\mathbf{k}},\qquad \mathbf{s}\equiv\Omega^{-1}\mathbf{k}=c_2^{-1}\hat{\mathbf{k}}.$$

Это S (Secondary, поперечные, сдвига-вращения, искажения) волны.

## Скалярный потенциал и гармонические P-волны

$$\mu \triangle \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \rho\Omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$\exists$ поле перемещений потенциально:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi,$$

$\Phi$ — скалярный потенциал. Подставляя это представление в уравнения эластодинамики, получаем уравнение Гельмгольца

$$\cancel{(\lambda + 2\mu)\nabla}\left(\triangle\Phi + \varkappa_1^2\Phi\right) = 0,$$

$\varkappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}$ — волновое число P-волны.

### Пример

Плоской гармонической P-волне

$$\mathbf{u} = \mathbf{s}\exp(i\Omega\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}), \qquad |\mathbf{s}| = c_1^{-1}$$

соответствует скалярный потенциал $\Phi = (i\Omega)^{-1}\exp(i\Omega\mathbf{s}\cdot\mathbf{r})$.

# Векторный потенциал и гармонические S-волны

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + \rho\Omega^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

⅂ поле перемещений соленоидально:

$$\mathbf{u} = \nabla\times\boldsymbol{\Psi},$$

$\boldsymbol{\Psi}$ — векторный потенциал. Подставляя это представление в уравнения эластодинамики, получим векторное уравнение Гельмгольца

$$\cancel{\mu\nabla\times}\left(\triangle\boldsymbol{\Psi} + \varkappa_2^2\boldsymbol{\Psi}\right) = \mathbf{0},$$

$\varkappa_2 = \frac{\Omega}{c_2}$ — волновое число S-волны.

## Пример

Плоской гармонической S-волне

$$\mathbf{u} = \mathbf{s}\times\mathbf{m}\,\exp(i\Omega\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}), \qquad |\mathbf{s}| = c_2^{-1}$$

соответствует векторный потенциал $\boldsymbol{\Psi} = (i\Omega)^{-1}\mathbf{m}\exp(i\Omega\mathbf{s}\cdot\mathbf{r})$.

# Потенциалы: общий случай при наличии гармонических внешних сил

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + \rho\Omega^2\mathbf{u} = -\rho\mathbf{K}$$

$\exists$ $\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla\times\mathbf{\Psi}, \quad \mathbf{K} = \nabla X + \nabla\times\mathbf{Y}$:

$$(\lambda+2\mu)\nabla\left(\triangle\Phi + \varkappa_1^2\Phi\right) + \mu\nabla\times\left(\triangle\mathbf{\Psi} + \varkappa_2^2\mathbf{\Psi}\right) = -\rho(\nabla X + \nabla\times\mathbf{Y}).$$

$$\Longleftarrow \qquad \begin{aligned} \triangle\Phi + \varkappa_1^2\Phi &= -c_1^{-2}X, \\ \triangle\mathbf{\Psi} + \varkappa_2^2\mathbf{\Psi} &= -c_2^{-2}\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

В общем случае гармонические решения уравнений ЭД являются суммой гармонических P и S волн с волновыми числами $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ соответственно.

# Принцип предельного поглащения в эластодинамике

$\exists\ \kappa_1 = \operatorname{Re}\kappa_1 + i\epsilon,\ \ \kappa_2 = \operatorname{Re}\kappa_2 + i\epsilon, \quad \operatorname{Re}\kappa_{1,2} > 0, \quad \epsilon > 0 \quad \Longrightarrow$ растущие при $|\mathbf{r}| \to \infty$ решения должны быть выброшены.

Или, эквивалентно, $\exists\ \Omega = \operatorname{Re}\Omega + i\epsilon, \quad \operatorname{Re}\Omega > 0, \quad \epsilon > 0 \quad \Longrightarrow$ растущие при $|\mathbf{r}| \to \infty$ решения должны быть выброшены.

# Потенциалы: общий случай при наличии внешних сил

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\rho\mathbf{K}$$

$\exists\ \mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla\times\mathbf{\Psi}, \quad \mathbf{K} = \nabla X + \nabla\times\mathbf{Y}$:

$$(\lambda+2\mu)\nabla\left(\triangle\Phi - c_1^{-2}\ddot{\Phi}\right) + \mu\nabla\times\left(\triangle\mathbf{\Psi} - c_2^{-2}\ddot{\mathbf{\Psi}}\right) = -\rho(\nabla X + \nabla\times\mathbf{Y}).$$

$$\Longleftarrow \qquad \begin{aligned} \triangle\Phi - c_1^{-2}\ddot{\Phi} &= -c_1^{-2}X, \\ \triangle\mathbf{\Psi} - c_2^{-2}\ddot{\mathbf{\Psi}} &= -c_2^{-2}\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

В общем случае решения уравнений ЭД являются суммой P и S волн, распространяющихся со скоростями $c_1$ и $c_2$ соответственно.

# Центр дилатации

$$-\mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\rho\chi(t)\nabla\delta(\mathbf{r})$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0} \equiv 0.$

$$\mathbf{u} = \ldots$$

# Центр дилатации

$$-\mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\rho\ddot{\mathbf{u}}=-\rho\chi(t)\nabla\delta(\mathbf{r})$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\Big|_{t<0}\equiv 0$.

$$\mathbf{u}=\frac{1}{4\pi c_1^2}\nabla\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{r}\right)$$

Центр дилатации создает только P-волны.

# Центр дилатации в гармоническом случае: $\chi(t) = \exp(-i\Omega t)$

$$-\mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \rho\Omega^2\mathbf{u} = -\rho\nabla\delta(\mathbf{r})$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0} \equiv 0$.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi c_1^2}\nabla\left(\frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{r}\right) = \frac{1}{4\pi c_1^2}\nabla\left(\frac{\exp i(\varkappa_1 r - \Omega t)}{r}\right), \qquad \varkappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}.$$

Центр дилатации создает только P-волны.

## Центр дилатации в гармоническом случае: $\chi(t) = \exp(-i\Omega t)$

$$-\mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \rho\Omega^2\mathbf{u} = -\rho\nabla\delta(\mathbf{r})$$

ППП: $\Omega = \operatorname{Re}\Omega + i\tilde{\epsilon},\ \tilde{\epsilon} > 0 \implies$ растущие решения выбрасываем.

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi,$$
$$\triangle\Phi + \varkappa_1^2\Phi = c_1^{-2}\delta(\mathbf{r}),$$
$$\varkappa_1 = \frac{\Omega}{c_1},$$
$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi c_1^2}\nabla\left(\frac{\exp i\varkappa_1 r}{r}\right) \equiv \frac{1}{4\pi c_1^2}\nabla\mathfrak{f}_1,$$

Центр дилатации создает только P-волны.

# Центр вращения (вокруг $\mathbf{n}$)

$$-\mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\rho\ddot{\mathbf{u}}=-\rho\chi(t)\nabla\times\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0}\equiv 0$.

$$\mathbf{u}=\dots$$

# Центр вращения (вокруг $\mathbf{n}$)

$$-\mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\rho\ddot{\mathbf{u}}=-\rho\chi(t)\nabla\times\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0}\equiv 0$.

$$\mathbf{u}=\frac{1}{4\pi c_2^2}\nabla\times\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{r}\right)\mathbf{n}$$

Центр вращения создает только S-волны.

# Центр вращения (вокруг $\mathbf{n}$) в гармоническом случае: $\chi(t) = \exp(-i\Omega t)$

$$-\mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \rho\Omega^2\mathbf{u} = -\rho\nabla \times \delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0} \equiv 0$.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi c_2^2}\nabla \times \left(\frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{r}\right)\mathbf{n} = \frac{1}{4\pi c_2^2}\nabla \times \left(\frac{\exp i(\varkappa_2 r - \Omega t)}{r}\right)\mathbf{n}, \qquad \varkappa_2 = \frac{\Omega}{c_2}.$$

Центр вращения создает только S-волны.

## Центр вращения (вокруг $\mathbf{n}$) в гармоническом случае: $\chi(t) = \exp(-i\Omega t)$

$$-\mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \rho\Omega^2\mathbf{u} = -\rho\nabla \times \delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

ППП: $\Omega = \operatorname{Re}\Omega + i\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\epsilon} > 0 \implies$ растущие решения выбрасываем.

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{\Psi},$$

$$\triangle\mathbf{\Psi} + \varkappa_2^2\mathbf{\Psi} = c_2^{-2}\delta(\mathbf{r})\mathbf{n},$$

$$\varkappa_2 = \frac{\Omega}{c_2},$$

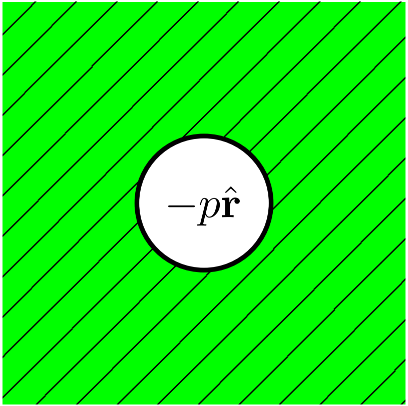
$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi c_2^2}\nabla \times \left(\frac{\exp i\varkappa_2 r}{r}\right)\mathbf{n} \equiv \frac{1}{4\pi c_2^2}\nabla \times \mathfrak{f}_2\mathbf{n},$$

Центр вращения создает только S-волны.

# Сферически-симметричный излучатель

$$-\mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+\rho\Omega^2\mathbf{u}=\mathbf{0},\qquad r>r_0;$$
$$\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{T}=-p\hat{\mathbf{r}},\qquad r=r_0.$$

ППП: $\Omega=\operatorname{Re}\Omega+i\tilde{\epsilon},\ \tilde{\epsilon}>0 \implies$ растущие решения выбрасываем.



# Сферически-симметричный излучатель

$$-\mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+\rho\Omega^2\mathbf{u}=\mathbf{0},\qquad r>r_0;$$

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{T}=-p\hat{\mathbf{r}},\qquad r=r_0.$$

ППП: $\Omega=\operatorname{Re}\Omega+i\tilde{\epsilon},\ \tilde{\epsilon}>0\implies$ растущие решения выбрасываем.

Ищем решение в виде

$$\mathbf{u}=C\nabla\left(\frac{\exp i\varkappa_1 r}{r}\right)\equiv C\nabla\mathfrak{f}_1,\qquad \varkappa_1=\frac{\Omega}{c_1}.$$

# Выражение для вектора напряжений по площадке с нормалью n

$$\mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + \mu\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} + \mu\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}\nabla = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} + \mu\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}).$$

# Сферически-симметричный излучатель

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -p\hat{\mathbf{r}}, \qquad r = r_0.$$

$$\mathbf{u} = C\nabla\left(\frac{\exp i\varkappa_1 r}{r}\right) \equiv C\nabla\mathfrak{f}_1, \qquad \varkappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}.$$

# Сферически-симметричный излучатель

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -p\hat{\mathbf{r}}, \qquad r = r_0.$$

$$\mathbf{u} = C\nabla\left(\frac{\exp i\varkappa_1 r}{r}\right) \equiv C\nabla\mathfrak{f}_1, \qquad \varkappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}.$$

Подставляем в граничное условие:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} + \mu\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = C\hat{\mathbf{r}} \cdot (\lambda\triangle\mathbf{I} + 2\mu\nabla\nabla)\mathfrak{f}_1 = -p\hat{\mathbf{r}}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{c^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\chi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}),$$

$$\nabla\nabla\mathfrak{f}_1 =$$

# Сферически-симметричный излучатель

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -p\hat{\mathbf{r}}, \qquad r = r_0.$$

$$\mathbf{u} = C\nabla\left(\frac{\exp i\varkappa_1 r}{r}\right) \equiv C\nabla\mathfrak{f}_1, \qquad \varkappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}.$$

Подставляем в граничное условие:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} + \mu\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = C\hat{\mathbf{r}} \cdot (\lambda\triangle\mathbf{I} + 2\mu\nabla\nabla)\mathfrak{f}_1 = -p\hat{\mathbf{r}}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{c^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\chi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}),$$

$$\nabla\nabla\mathfrak{f}_1 = \left(-\varkappa_1^2\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{i\varkappa_1}{r}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I})\right)\mathfrak{f}_1,$$

$$\chi = \exp\left(-i\Omega(t - \tfrac{r}{c})\right), \qquad -i\Omega = -ic\varkappa$$

# Сферически-симметричный излучатель

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -p\hat{\mathbf{r}}, \qquad r = r_0.$$

$$\mathbf{u} = C\nabla\left(\frac{\exp i\varkappa_1 r}{r}\right) \equiv C\nabla\mathfrak{f}_1, \qquad \varkappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}.$$

Подставляем в граничное условие:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} + \mu\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = C\hat{\mathbf{r}} \cdot (\lambda\triangle\mathbf{I} + 2\mu\nabla\nabla)\mathfrak{f}_1 = -p\hat{\mathbf{r}}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}),$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla\nabla\mathfrak{f}_1 = \left(-\varkappa_1^2 + 2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{i\varkappa_1}{r}\right)\right)\mathfrak{f}_1\hat{\mathbf{r}},$$

# Сферически-симметричный излучатель

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -p\hat{\mathbf{r}}, \qquad r = r_0.$$

$$\mathbf{u} = C\nabla\left(\frac{\exp i\varkappa_1 r}{r}\right) \equiv C\nabla\mathfrak{f}_1, \qquad \varkappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}.$$

Подставляем в граничное условие:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} + \mu\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = C\hat{\mathbf{r}} \cdot (\lambda\triangle\mathbf{I} + 2\mu\nabla\nabla)\mathfrak{f}_1 = -p\hat{\mathbf{r}}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{c^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\chi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}),$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla\nabla\mathfrak{f}_1 = \left(-\varkappa_1^2 + 2\Big(\frac{1}{r^2} - \frac{i\varkappa_1}{r}\Big)\right)\mathfrak{f}_1\hat{\mathbf{r}},$$

$$\triangle\mathfrak{f}_1 =$$

# Сферически-симметричный излучатель

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -p\hat{\mathbf{r}}, \qquad r = r_0.$$

$$\mathbf{u} = C\nabla \left( \frac{\exp i\varkappa_1 r}{r} \right) \equiv C\nabla \mathfrak{f}_1, \qquad \varkappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}.$$

Подставляем в граничное условие:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} + \mu\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = C\hat{\mathbf{r}} \cdot (\lambda \triangle \mathbf{I} + 2\mu\nabla\nabla)\mathfrak{f}_1 = -p\hat{\mathbf{r}}$$

$$\nabla\nabla \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{c^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr^2} \right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}),$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla\nabla\mathfrak{f}_1 = \left( -\varkappa_1^2 + 2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{i\varkappa_1}{r}\right)\right)\mathfrak{f}_1\hat{\mathbf{r}},$$

$$\triangle\mathfrak{f}_1 = -\varkappa_1^2\mathfrak{f}_1$$

# Сферически-симметричный излучатель

$$\mathbf{u} = C\nabla\left(\frac{\exp i\varkappa_1 r}{r}\right) \equiv C\nabla\mathfrak{f}_1, \qquad \varkappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}.$$

Подставляем в граничное условие:

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{T} = C\hat{\mathbf{r}}\cdot(\lambda\triangle\mathbf{I} + 2\mu\nabla\nabla)\mathfrak{f}_1 = -p\hat{\mathbf{r}},$$

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla\nabla\mathfrak{f}_1 = \left(-\varkappa_1^2 + 2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{i\varkappa_1}{r}\right)\right)\mathfrak{f}_1\hat{\mathbf{r}},$$

$$\triangle\mathfrak{f}_1 = -\varkappa_1^2\mathfrak{f}_1,$$

$$\frac{C}{{r_0}^2}\left(-(\lambda+2\mu)\varkappa_1^2{r_0}^2 + 4\mu(1 - i\varkappa_1 r_0)\right)\mathfrak{f}_1 = -p,$$

$$C = \frac{-p{r_0}^3\exp(-i\varkappa_1 r_0)}{-(\lambda+2\mu)\varkappa_1^2{r_0}^2 + 4\mu(1 - i\varkappa_1 r_0)}$$

# Центр расширения как предельный случай сферически симметричного излучателя

$$\mathbf{u} = \frac{-p{r_0}^3 \exp(-i\varkappa_1 r_0)}{-(\lambda + 2\mu)\varkappa_1^2 {r_0}^2 + 4\mu(1 - i\varkappa_1 r_0)} \nabla \left( \frac{\exp i\varkappa_1 r}{r} \right)$$

$\daleth$ $\varkappa_1 r_0 = \frac{\Omega r_0}{c_1} \to 0.$

$\daleth$ $p r_0^3 \to -\frac{4\mu}{4\pi c_1^2}$ при $\varkappa_1 r_0 = \frac{\Omega r_0}{c_1} \to 0.$

Тогда в пределе получим решение, соответствующее центру расширения:

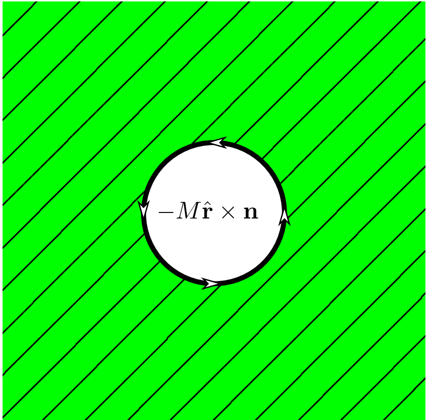
$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi c_1^2} \nabla \left( \frac{\exp i\varkappa_1 r}{r} \right)$$

# Вращательный излучатель

$$-\mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+\rho\Omega^2\mathbf{u}=\mathbf{0},\qquad r>r_0;$$

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{T}=-M\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{n},\qquad r=r_0.$$

ППП: $\Omega=\operatorname{Re}\Omega+i\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\epsilon}>0 \implies$ растущие решения выбрасываем.



# Вращательный излучатель

$$-\mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+\rho\Omega^2\mathbf{u}=\mathbf{0},\qquad r>r_0;$$

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{T}=-M\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{n},\qquad r=r_0.$$

ППП: $\Omega=\operatorname{Re}\Omega+i\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\epsilon}>0 \implies$ растущие решения выбрасываем.

Ищем решение в виде

$$\mathbf{u}=C\nabla\times\left(\frac{\exp i\varkappa_2 r}{r}\right)\mathbf{n}\equiv C\nabla\times\mathfrak{f}_2\mathbf{n},\qquad \varkappa_2=\frac{\Omega}{c_2},$$

$$\mathbf{T}=\lambda(\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{I}+\mu(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla),$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}=\frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c^2r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}+\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3}+\frac{\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{I}).$$

# Вращательный излучатель

$$-\mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+\rho\Omega^2\mathbf{u}=\mathbf{0},\qquad r>r_0;$$

ППП: $\Omega = \operatorname{Re}\Omega + i\tilde{\varepsilon}$

Ищем решение в ви

$\nabla\nabla$

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla\mathbf{u}=\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla\nabla\times\mathfrak{f}_2\mathbf{n}=\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla\nabla\mathfrak{f}_2\times\mathbf{n}=$$

$$=\hat{\mathbf{r}}\cdot\left(-\varkappa_2^2\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{n}-\left(\frac{1}{r^2}-\frac{i\varkappa_2}{r}\right)(\mathbf{I}\times\mathbf{n}-3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{n})\right)\mathfrak{f}_2$$

$$=\left(-\varkappa_2^2\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{n}-\left(\frac{1}{r^2}-\frac{i\varkappa_2}{r}\right)(-2\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{n})\right)\mathfrak{f}_2,$$

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{u}\nabla=\hat{\mathbf{r}}\cdot(\nabla\times\mathbf{n}\nabla\mathfrak{f}_2)=\hat{\mathbf{r}}\cdot(\nabla\nabla\mathfrak{f}_2\times\mathbf{n})^{\top}=\left(\frac{1}{r^2}-\frac{i\varkappa_2}{r}\right)\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{n}\mathfrak{f}_2,$$

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla)=\left(-\varkappa_2^2+3\left(\frac{1}{r^2}-\frac{i\varkappa_2}{r}\right)\right)\mathfrak{f}_2\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{n},$$

$$C=\frac{-M{r_0}^3\exp(-i\varkappa_2 r_0)}{\mu(3-3i\varkappa_2 r_0-\varkappa_2^2{r_0}^2)}$$

**Задача**

Найти константу $C$.

# Сосредоточенная сила в гармоническом случае

Переходим к амплитудам:

$$-c_2^2\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + c_1^2\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \Omega^2\mathbf{u} = -\delta(\mathbf{r})\mathbf{n},$$

ППП: $\Omega = \operatorname{Re}\Omega + i\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\epsilon} > 0 \implies$ растущие решения выбрасываем.

# Сосредоточенная сила в гармоническом случае

Переходим к амплитудам:

$$-c_2^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+c_1^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+\Omega^2\mathbf{u}=-\delta(\mathbf{r})\mathbf{n},$$

ППП: $\Omega=\operatorname{Re}\Omega+i\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\epsilon}>0 \implies$ растущие решения выбрасываем.

## Задача

Показать, что поле от сосредоточенной силы выражается формулой

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{n}\cdot\nabla\nabla(\mathfrak{f}_2-\mathfrak{f}_1)+\varkappa_2^2\mathfrak{f}_2\mathbf{n}}{4\pi\Omega^2},\qquad \mathfrak{f}_{1,2}=\frac{\exp i\varkappa_{1,2}r}{r}$$

## Задача

Показать, что для решения задачи о сосредоточенной силе справедлива асимптотическая оценка

$$\mathbf{u}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mathfrak{f}_1}{c_1^2}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}-\frac{\mathfrak{f}_2}{c_2^2}(\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{I})\right)\cdot\mathbf{n}+O(\varkappa_1^{-2}r^{-2}),\qquad r\to\infty.$$

# Поле подвижного источника: потенциалы Лиенара-Вихерта

$$\left[\begin{array}{l} -\mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\rho\ddot{\mathbf{u}}=-\rho\chi(t)\nabla\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\ell}(t)) \\ -\mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\rho\ddot{\mathbf{u}}=-\rho\chi(t)\nabla\times\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\ell}(t))\mathbf{n} \end{array}\right.$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0}\equiv 0$.

Переходя к потенциалам, получим:

$$\triangle\Phi-c_1^{-2}\ddot{\Phi}=-c_1^{-2}\chi(t)\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\ell}(t)),$$

$$\triangle\boldsymbol{\Psi}-c_2^{-2}\ddot{\boldsymbol{\Psi}}=-c_2^{-2}\chi(t)\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\ell}(t))\mathbf{n}.$$

$$\Phi=-\frac{\delta\left(t-\frac{|\mathbf{r}|}{c_1}\right)}{4\pi|\mathbf{r}|}*\left(-c_1^{-2}\chi(t)\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\ell}(t))\right),$$

$$\boldsymbol{\Psi}=-\frac{\delta\left(t-\frac{|\mathbf{r}|}{c_2}\right)}{4\pi|\mathbf{r}|}*\left(-c_2^{-2}\chi(t)\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\ell}(t))\mathbf{n}\right),$$

# Поле подвижного источника: потенциалы Лиенара-Вихерта

$$\Phi = -\frac{\delta\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c_1}\right)}{4\pi|\mathbf{r}|} * \left(-c_1^{-2}\chi(t)\delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\ell}(t))\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi c_1^2}\iiiint \chi(\tau)\delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\ell}(\tau))\frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}|}{c_1}\right)}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|}\,d\tau d\boldsymbol{\xi} =$$

$$= \frac{1}{4\pi c_1^2}\int_0^t \chi(\tau)\frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\ell}(\tau)|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\ell}(\tau)|}\,d\tau =$$

$$\delta(f(\tau)) = \sum_i \frac{1}{|f'(\tau_i)|}\delta(\tau - \tau_i)$$

# Поле подвижного источника: потенциалы Лиенара-Вихерта

$$\Phi = -\frac{\delta\left(t-\frac{|\mathbf{r}|}{c_1}\right)}{4\pi|\mathbf{r}|} * \left(-c_1^{-2}\chi(t)\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\ell}(t))\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi c_1^2}\iiiint \chi(\tau)\delta(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\ell}(\tau))\frac{\delta\left(t-\tau-\frac{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}|}{c_1}\right)}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}|}\,d\tau d\boldsymbol{\xi} =$$

$$= \frac{1}{4\pi c_1^2}\int_0^t \chi(\tau)\frac{\delta\left(t-\tau-\frac{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\ell}(\tau)|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\ell}(\tau)|}\,d\tau =$$

$$\delta(f(\tau)) = \sum_i \frac{1}{|f'(\tau_i)|}\delta(\tau-\tau_i)$$

$$\exists\ \tau_i + \frac{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\ell}(\tau_i)|}{c_1} = t:$$

# Поле подвижного источника: потенциалы Лиенара-Вихерта

$$\Phi = -\frac{\delta\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c_1}\right)}{4\pi|\mathbf{r}|} * \left(-c_1^{-2}\chi(t)\delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\ell}(t))\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi c_1^2}\iiiint \chi(\tau)\delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\ell}(\tau))\frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}|}{c_1}\right)}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|}\,d\tau d\boldsymbol{\xi} =$$

$$= \frac{1}{4\pi c_1^2}\int_0^t \chi(\tau)\frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\ell}(\tau)|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\ell}(\tau)|}\,d\tau = \frac{1}{4\pi c_1^2}\sum_i \frac{\chi(\tau_i)}{\left|\mathbf{r} - \boldsymbol{\ell}(\tau_i) + \frac{\left(\mathbf{r}-\boldsymbol{\ell}(\tau_i)\right)\cdot\dot{\boldsymbol{\ell}}(\tau_i)}{c_1}\right|}$$

$$\delta(f(\tau)) = \sum_i \frac{1}{|f'(\tau_i)|}\delta(\tau - \tau_i)$$

$$\daleth\ \tau_i + \frac{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\ell}(\tau_i)|}{c_1} = t:$$

$$(|r - \boldsymbol{\ell}(\tau)|)'_\tau = \left(\sqrt{(\mathbf{r} - \boldsymbol{\ell}(\tau))\cdot(\mathbf{r} - \boldsymbol{\ell}(\tau))}\right)'_\tau = \frac{1}{2}\frac{2(\mathbf{r} - \boldsymbol{\ell}(\tau))\cdot\dot{\boldsymbol{\ell}}}{\sqrt{(\mathbf{r} - \boldsymbol{\ell}(\tau))\cdot(\mathbf{r} - \boldsymbol{\ell}(\tau))}} = \widehat{(\mathbf{r} - \boldsymbol{\ell}(\tau))}\cdot\dot{\boldsymbol{\ell}}$$

## Двумерные движения

$$\mu \triangle \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0$$

$\exists\ \mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_3, t): \quad \Longrightarrow$

$$\mathbf{u} = \tilde{\nabla}\Phi + \tilde{\nabla} \times \Psi \mathbf{e}_2 + v\mathbf{e}_2$$

Плоская деформация:

P-волны:

$$\tilde{\triangle}\Phi - c_1^{-2}\ddot{\Phi} = 0.$$

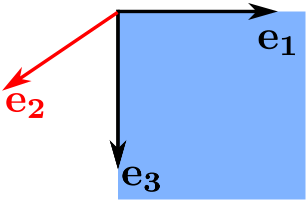
SV-волны: (Vertical)

$$\tilde{\triangle}\Psi - c_2^{-2}\ddot{\Psi} = 0.$$

Антиплоская деформация:

SH-волны: (Horizontal)

$$\tilde{\triangle}v - c_2^{-2}\ddot{v} = 0.$$



# Отражение гармонической P-волны: постановка задачи

Рассмотрим полупространство $x_3 \geq 0$: $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\big|_{x_3=0} = \mathbf{0}$.

Падающая (восходящая) волна:

$$\Phi = (i\Omega)^{-1}\exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{P}} \cdot \mathbf{r}),\ \text{где } |\mathbf{s}^{\mathrm{P}}| = c_1^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{u}^{\mathrm{P}} = \mathbf{s}^{\mathrm{P}}\exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{P}} \cdot \mathbf{r}),$$

$$s_3^{\mathrm{P}} = -\sqrt{c_1^{-2} - (s_1^{\mathrm{P}})^2} \equiv -p(s_1^{\mathrm{P}}) < 0 \text{ — вертикальная медленность.}$$

Ищем решение в виде ЛК падающей и двух (нисходящих) отраженных волн:

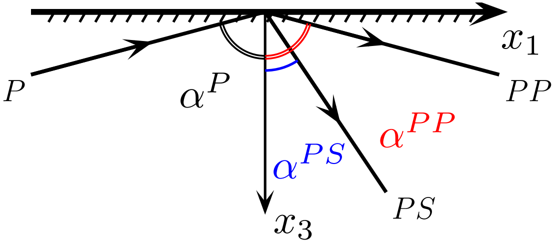
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\mathrm{P}} + C^{\mathrm{PP}}\mathbf{s}^{\mathrm{PP}}\exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{PP}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{PS}}\mathbf{s}^{\mathrm{PS}} \times \mathbf{e}_2\exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{PS}} \cdot \mathbf{r}).$$

$\mathbf{s}^{\mathrm{PP}}$, $\mathbf{s}^{\mathrm{PS}}$ — медленности отражённых монотипной и конверсионной (обменной) волн, причём горизонтальные медленности всех волн равны: $s_1{}^{\mathrm{P}} = s_1{}^{\mathrm{PP}} = s_1{}^{\mathrm{PS}} \equiv \xi \quad \overset{\text{ДУ}}{\Longrightarrow}$

$$s_3^{\mathrm{PP}} = -s_3^{\mathrm{P}} = p(\xi), \qquad s_3^{\mathrm{PS}} = \sqrt{c_2^{-2} - \xi^2} \equiv q(\xi).$$

$C^{\mathrm{PP}}$, $C^{\mathrm{PS}}$ — коэффициенты отражения и конверсии P-волн.

# Отражение гармонической P-волны: закон Снеллиуса




$$s_1{}^{\mathrm{P}} = s_1{}^{\mathrm{PP}} = s_1{}^{\mathrm{PS}}$$

$$|\mathbf{s}^{\mathrm{P}}| \sin \alpha^{\mathrm{P}} = |\mathbf{s}^{\mathrm{PP}}| \sin \alpha^{\mathrm{PP}} = |\mathbf{s}^{\mathrm{PS}}| \sin \alpha^{\mathrm{PS}}$$

$$c_1^{-1} \sin \alpha^{\mathrm{P}} = c_1^{-1} \sin \alpha^{\mathrm{PP}} = c_2^{-1} \sin \alpha^{\mathrm{PS}}$$

$$\sin \alpha^{\mathrm{P}} = \sin \alpha^{\mathrm{PP}} = \frac{c_1}{c_2} \sin \alpha^{\mathrm{PS}}$$

## Отражение гармонической SV-волны: постановка задачи

Рассмотрим полупространство $x_3 \geq 0$: $\quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\big|_{x_3=0} = \mathbf{0}.$

Падающая (восходящая) волна:

$$\boldsymbol{\Psi} = (i\Omega)^{-1}\mathbf{e}_2 \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{S}} \cdot \mathbf{r}), \text{ где } |\mathbf{s}^{\mathrm{S}}| = c_2^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{u}^{\mathrm{S}} = \mathbf{s}^{\mathrm{S}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{S}} \cdot \mathbf{r}),$$

$$s_3^{\mathrm{S}} = -\sqrt{c_2^{-2} - (s_1^{\mathrm{S}})^2} = -q(s_1^{\mathrm{S}}) < 0 \text{ — вертикальная медленность.}$$

Ищем решение в виде ЛК падающей и двух (нисходящих) отраженных волн:

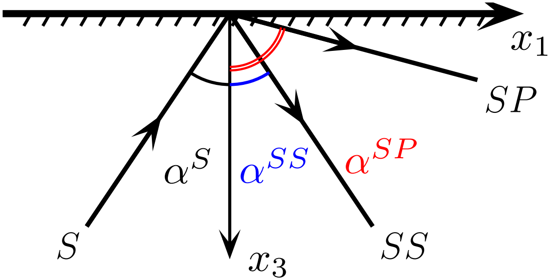
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\mathrm{S}} + C^{\mathrm{SP}}\mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SS}}\mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \cdot \mathbf{r}).$$

$\mathbf{s}^{\mathrm{SS}}$, $\mathbf{s}^{\mathrm{SP}}$ — медленности отражённых монотипной и конверсионной (обменной) волн, причём горизонтальные медленности всех волн равны: ${s_1}^{\mathrm{S}} = {s_1}^{\mathrm{SP}} = {s_1}^{\mathrm{SS}} \equiv \xi \quad \overset{\text{ДУ}}{\Longrightarrow}$

$$s_3^{\mathrm{SS}} = -s_3^{\mathrm{S}} = q(\xi), \qquad s_3^{\mathrm{SP}} = \sqrt{c_1^{-2} - \xi^2} = p(\xi).$$

$C^{\mathrm{SS}}$, $C^{\mathrm{SP}}$ — коэффициенты отражения и конверсии SV-волн.

# Отражение гармонической SV-волны: закон Снеллиуса




$$s_1{}^{\mathrm{S}} = s_1{}^{\mathrm{SS}} = s_1{}^{\mathrm{SP}}$$

$$|\mathbf{s}^{\mathrm{S}}| \sin\alpha^{\mathrm{S}} = |\mathbf{s}^{\mathrm{SS}}| \sin\alpha^{\mathrm{SS}} = |\mathbf{s}^{\mathrm{SP}}| \sin\alpha^{\mathrm{SP}}$$

$$c_2^{-1} \sin\alpha^{\mathrm{S}} = c_2^{-1} \sin\alpha^{\mathrm{SS}} = c_1^{-1} \sin\alpha^{\mathrm{SP}}$$

$$\sin\alpha^{\mathrm{S}} = \sin\alpha^{\mathrm{SS}} = \frac{c_2}{c_1} \sin\alpha^{\mathrm{SP}}$$

При $\sin\alpha^{\mathrm{S}} > c_2/c_1$ происходит полное внутреннее отражение.

# Отражение гармонической SV-волны: решение при отсутствии полного внутреннего отражения

$\exists\ \sin\alpha^{\mathrm{S}} < c_2/c_1$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{s}^{\mathrm{S}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{S}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SP}} \mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SS}} \mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \cdot \mathbf{r}).$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = \big(q(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 - q(\xi)x_3\big) + \\ + C^{\mathrm{SS}}\big(-q(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 + q(\xi)x_3\big) + \\ + C^{\mathrm{SP}}\big(\xi\mathbf{e}_1 + p(\xi)\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 + p(\xi)x_3\big)\end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\Big|_{x_3=0} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = 0 \\ &\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \end{aligned}$$

# Отражение гармонической SV-волны: решение при отсутствии полного внутреннего отражения

$\exists \sin\alpha^{\mathrm{S}} < c_2/c_1$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{s}^{\mathrm{S}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{S}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SP}} \mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SS}} \mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \cdot \mathbf{r}).$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = \big(q(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 - q(\xi)x_3\big) + \\ + C^{\mathrm{SS}}\big(-q(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 + q(\xi)x_3\big) + \\ + C^{\mathrm{SP}}\big(\xi\mathbf{e}_1 + p(\xi)\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 + p(\xi)x_3\big)\end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\Big|_{x_3=0} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} 2p\xi C^{\mathrm{SP}} - (c_2^{-2} - 2\xi^2)C^{\mathrm{SS}} &= c_2^{-2} - 2\xi^2 \\ (c_2^{-2} - 2\xi^2)C^{\mathrm{SP}} + 2q\xi C^{\mathrm{SS}} &= 2q\xi \end{aligned}$$

# Отражение гармонической SV-волны: решение при отсутствии полного внутреннего отражения

$\urcorner$ $\sin\alpha^{\mathrm{S}} < c_2/c_1$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{s}^{\mathrm{S}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{S}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SP}}\mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SS}}\mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \cdot \mathbf{r}).$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = \big(q(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 - q(\xi)x_3\big) + \\ + C^{\mathrm{SS}}\big(-q(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 + q(\xi)x_3\big) + \\ + C^{\mathrm{SP}}\big(\xi\mathbf{e}_1 + p(\xi)\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 + p(\xi)x_3\big)\end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\Big|_{x_3=0} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} C^{\mathrm{SP}} &= \frac{4q\xi(c_2^{-2} - 2\xi^2)}{\mathcal{R}} \\ C^{\mathrm{SS}} &= \frac{4pq\xi^2 - (c_2^{-2} - 2\xi^2)^2}{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

$\mathcal{R} = (c_2^{-2} - 2\xi^2)^2 + 4pq\xi^2 > 0$ — рэлеевский знаменатель.

# Полное внутреннее отражение гармонической SV-волны

$\exists\ \sin\alpha^{\mathrm{S}} > c_2/c_1$: $\quad p(\xi) = i\mathfrak{p}(\xi), \quad \mathfrak{p}(\xi) = \sqrt{\xi^2 - c_1^{-2}} > 0$ : вертикальная медленность чисто мнимая, волна SP неоднородная.

$$\mathbf{u} = \mathbf{s}^{\mathrm{S}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{S}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SP}}\mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SS}}\mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \cdot \mathbf{r}).$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = \big(q(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 - q(\xi)x_3\big) + \\ + C^{\mathrm{SS}}\big(-q(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 + q(\xi)x_3\big) + \\ + C^{\mathrm{SP}}\big(\xi\mathbf{e}_1 + p(\xi)\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 + p(\xi)x_3\big)\end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\Big|_{x_3=0} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = 0 \\ \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \end{aligned}$$

# Полное внутреннее отражение гармонической SV-волны

$\daleth$ $\sin\alpha^{\mathrm{S}} > c_2/c_1$: $\quad p(\xi) = i\mathfrak{p}(\xi), \quad \mathfrak{p}(\xi) = \sqrt{\xi^2 - c_1^{-2}} > 0$ : вертикальная медленность чисто мнимая, волна SP неоднородная.

$$\mathbf{u} = \mathbf{s}^{\mathrm{S}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{S}}\cdot\mathbf{r}) + C^{\mathrm{SP}}\mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{SP}}\cdot\mathbf{r}) + C^{\mathrm{SS}}\mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{SS}}\cdot\mathbf{r}).$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = \big(q(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 - q(\xi)x_3\big) + \\ + C^{\mathrm{SS}}\big(-q(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 + q(\xi)x_3\big) + \\ + C^{\mathrm{SP}}\big(\xi\mathbf{e}_1 + p(\xi)\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 + p(\xi)x_3\big)\end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{T}\Big|_{x_3=0} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} 2p\xi C^{\mathrm{SP}} - (c_2^{-2} - 2\xi^2)C^{\mathrm{SS}} &= c_2^{-2} - 2\xi^2 \\ (c_2^{-2} - 2\xi^2)C^{\mathrm{SP}} + 2q\xi C^{\mathrm{SS}} &= 2q\xi \end{aligned}$$

# Полное внутреннее отражение гармонической SV-волны

$\exists \ \sin\alpha^{\mathrm{S}} > c_2/c_1$: $\quad p(\xi) = i\mathfrak{p}(\xi), \quad \mathfrak{p}(\xi) = \sqrt{\xi^2 - c_1^{-2}} > 0$ : вертикальная медленность чисто мнимая, волна SP неоднородная.

$$\mathbf{u} = \mathbf{s}^{\mathrm{S}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{S}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SP}}\mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SS}}\mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \cdot \mathbf{r}).$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = \big(q(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 - q(\xi)x_3\big) + \\ + C^{\mathrm{SS}}\big(-q(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 + q(\xi)x_3\big) + \\ + C^{\mathrm{SP}}\big(\xi\mathbf{e}_1 + p(\xi)\mathbf{e}_3\big) \exp i\Omega\big(\xi x_1 + p(\xi)x_3\big)\end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\Big|_{x_3=0} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} C^{\mathrm{SP}} &= \frac{4q\xi(c_2^{-2} - 2\xi^2)}{\mathcal{R}} \\ C^{\mathrm{SS}} &= \frac{4pq\xi^2 - (c_2^{-2} - 2\xi^2)^2}{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

$$\mathcal{R} = (c_2^{-2} - 2\xi^2)^2 + 4pq\xi^2 > 0, \quad \operatorname{Im}\mathcal{R} > 0$$

# Отражение плоских гармонических P-SV-волн от свободной границы полупространства

P-волна:

$$C^{\mathrm{PP}} = \frac{4pq\xi^2 - (c_2^{-2} - 2\xi^2)^2}{\mathcal{R}}$$

$$C^{\mathrm{PS}} = -\frac{4p\xi(c_2^{-2} - 2\xi^2)}{\mathcal{R}}$$

SV-волна:

$$C^{\mathrm{SS}} = \frac{4pq\xi^2 - (c_2^{-2} - 2\xi^2)^2}{\mathcal{R}}$$

$$C^{\mathrm{SP}} = \frac{4q\xi(c_2^{-2} - 2\xi^2)}{\mathcal{R}}$$

Соответствующая матрица унитарна, $\det(\dots) = 1$

# Отражение плоской негармонической SV-волны при отсутствии полного внутреннего отражения

$\urcorner$ $\sin\alpha^{\mathrm{S}} < c_2/c_1$:

Падающая волна:

$$\mathbf{u}^{\mathrm{S}} = \mathbf{s}^{\mathrm{S}} \times \mathbf{e}_2 f(\mathbf{s}^{\mathrm{S}} \cdot \mathbf{r} - t) = \big(q(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi\mathbf{e}_3\big) f\big(\xi x_1 - q(\xi)x_3 - t\big), \qquad s_3^{\mathrm{S}} < 0.$$

Отраженная волна:

# Отражение плоской негармонической SV-волны при отсутствии полного внутреннего отражения

$\exists\ \sin\alpha^{\mathrm{S}} < c_2/c_1$:

Падающая волна:

$$\mathbf{u}^{\mathrm{S}} = \mathbf{s}^{\mathrm{S}} \times \mathbf{e}_2 f(\mathbf{s}^{\mathrm{S}} \cdot \mathbf{r} - t) = \big(q(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi\mathbf{e}_3\big) f\big(\xi x_1 - q(\xi)x_3 - t\big), \qquad s_3^{\mathrm{S}} < 0.$$

Отраженная волна:

$$\mathbf{u} = C^{\mathrm{SS}}\big(-q(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi\mathbf{e}_3\big) f(\xi x_1 + q(\xi)x_3 - t) + C^{\mathrm{SP}}\big(\xi\mathbf{e}_1 + p(\xi)\mathbf{e}_3\big) f(\xi x_1 + p(\xi)x_3 - t)$$

# Отражение плоской негармонической SV-волны: случай полного внутреннего отражения

$\rceil$ $\sin\alpha^{\mathrm{S}} > c_2/c_1$: $\quad p(\xi) = i\mathfrak{p}(\xi)$

Падающая волна:

$$\mathbf{u}^{\mathrm{S}} = \mathbf{s}^{\mathrm{S}} \times \mathbf{e}_2 \operatorname{Re} \mathfrak{f}(\mathbf{s}^{\mathrm{S}} \cdot \mathbf{r} - t), \qquad s_3^{\mathrm{S}} < 0$$

Здесь $\mathfrak{f}$ — функция, аналитическая в верхней полуплоскости.

Отраженная волна:

$$\mathbf{u} \quad = \quad \operatorname{Re}\Big(C^{\mathrm{SS}}\big(-q(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi\mathbf{e}_3\big)\mathfrak{f}(\xi x_1 + q(\xi)x_3 - t) + C^{\mathrm{SP}}\big(\xi\mathbf{e}_1 + p(\xi)\mathbf{e}_3\big)\mathfrak{f}(\xi x_1 + p(\xi)x_3 - t)\Big)$$

# Отражение плоской негармонической SV-волны: случай полного внутреннего отражения

Friedlander F.G. On the total reflection of plane waves
The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – 1948. – T.1. – №.1. – C. 376-384.

# Отражение плоской гармонической SH-волны от свободной границы полупространства

# Отражение плоской гармонической SH-волны от свободной границы полупространства

- Угол падения равен углу отражения
- Коэффициент отражения равен единице

# Оригинальная работа лорда Рэлея

Strutt, J. W. (1885). On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. Proceedings of the London Mathematical Society, 17(1), 4.

# Постановка задачи

Пытаемся найти P-SV волну, свободно бегущую вдоль свободной границы упругого полупространства $x_3 \geq 0$. В терминах предыдущей задачи: падает нулевая P-SV-волна, обе отраженные претерпевают полное внутреннее отражение.

$$\mathbf{u} = \tilde{\nabla}\Phi + \tilde{\nabla} \times \Psi\mathbf{e}_2 =$$

$$= C^{\mathrm{SP}}\mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SS}}\mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega\mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\Phi = (i\Omega)^{-1} C^{\mathrm{SP}} \exp i\Omega(\xi x_1 + p(\xi)x_3),$$
$$\Psi = (i\Omega)^{-1} C^{\mathrm{SS}} \exp i\Omega(\xi x_1 + q(\xi)x_3).$$

Здесь $\xi \equiv s_1^{\mathrm{SP}} = s_1^{\mathrm{SS}} \in (c_2^{-1}, \infty)$ — горизонтальная медленность; $p = \sqrt{c_1^{-2} - \xi^2} = i\mathfrak{p}$, $q = \sqrt{c_2^{-2} - \xi^2} = i\mathfrak{q}$.

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\Big|_{x_3=0} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = 0 \\ &\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \end{aligned}$$

# Постановка задачи

Пытаемся найти P-SV волну, свободно бегущую вдоль свободной границы упругого полупространства $x_3 \geq 0$. В терминах предыдущей задачи: падает нулевая P-SV-волна, обе отраженные претерпевают полное внутреннее отражение.

$$\mathbf{u} = \tilde{\nabla}\Phi + \tilde{\nabla} \times \Psi \mathbf{e}_2 =$$

$$= C^{\mathrm{SP}} \mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SS}} \mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\mathbf{u} = C^{\mathrm{SS}} \big( -q(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi \mathbf{e}_3 \big) \exp i\Omega \big( \xi x_1 + q(\xi) x_3 \big) +$$

$$+ C^{\mathrm{SP}} \big( \xi \mathbf{e}_1 + p(\xi) \mathbf{e}_3 \big) \exp i\Omega \big( \xi x_1 + p(\xi) x_3 \big)$$

Здесь $\xi \equiv s_1^{\mathrm{SP}} = s_1^{\mathrm{SS}} \in (c_2^{-1}, \infty)$ — горизонтальная медленность; $p = \sqrt{c_1^{-2} - \xi^2} = i\mathfrak{p}$, $q = \sqrt{c_2^{-2} - \xi^2} = i\mathfrak{q}$.

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T} \Big|_{x_3 = 0} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &2p\xi C^{\mathrm{SP}} - (c_2^{-2} - 2\xi^2) C^{\mathrm{SS}} = 0 \\ &(c_2^{-2} - 2\xi^2) C^{\mathrm{SP}} + 2q\xi C^{\mathrm{SS}} = 0 \end{aligned}$$

## Постановка задачи

Пытаемся найти P-SV волну, свободно бегущую вдоль свободной границы упругого полупространства $x_3 \geq 0$. В терминах предыдущей задачи: падает нулевая P-SV-волна, обе отраженные претерпевают полное внутреннее отражение.

$$\mathbf{u} = \tilde{\nabla}\Phi + \tilde{\nabla} \times \Psi \mathbf{e}_2 =$$
$$= C^{\mathrm{SP}} \mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SS}} \mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\mathbf{u} = C^{\mathrm{SS}} \big( - i\mathfrak{q}(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi \mathbf{e}_3 \big) \exp i\Omega \big( \xi x_1 + i\mathfrak{q}(\xi) x_3 \big) +$$
$$+ C^{\mathrm{SP}} \big( \xi \mathbf{e}_1 + i\mathfrak{p}(\xi)\mathbf{e}_3 \big) \exp i\Omega \big( \xi x_1 + i\mathfrak{p}(\xi) x_3 \big)$$

Здесь $\xi \equiv s_1^{\mathrm{SP}} = s_1^{\mathrm{SS}} \in (c_2^{-1}, \infty)$ — горизонтальная медленность; $p = \sqrt{c_1^{-2} - \xi^2} = i\mathfrak{p}$, $q = \sqrt{c_2^{-2} - \xi^2} = i\mathfrak{q}$.

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T} \Big|_{x_3=0} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} 2i\mathfrak{p}\xi C^{\mathrm{SP}} - (c_2^{-2} - 2\xi^2) C^{\mathrm{SS}} = 0 \\ (c_2^{-2} - 2\xi^2) C^{\mathrm{SP}} + 2i\mathfrak{q}\xi C^{\mathrm{SS}} = 0 \end{array}$$

# Постановка задачи

Пытаемся найти P-SV волну, свободно бегущую вдоль свободной границы упругого полупространства $x_3 \geq 0$. В терминах предыдущей задачи: падает нулевая P-SV-волна, обе отраженные претерпевают полное внутреннее отражение.

$$\mathbf{u} = \tilde{\nabla}\Phi + \tilde{\nabla} \times \Psi \mathbf{e}_2 =$$
$$= C^{\mathrm{SP}} \mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SS}} \mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\mathbf{u} = C^{\mathrm{SS}} \big( - i\mathfrak{q}(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi \mathbf{e}_3 \big) \exp i\Omega \big( \xi x_1 + i\mathfrak{q}(\xi) x_3 \big) +$$
$$+ C^{\mathrm{SP}} \big( \xi \mathbf{e}_1 + i\mathfrak{p}(\xi)\mathbf{e}_3 \big) \exp i\Omega \big( \xi x_1 + i\mathfrak{p}(\xi) x_3 \big)$$

Здесь $\xi \equiv s_1^{\mathrm{SP}} = s_1^{\mathrm{SS}} \in (c_2^{-1}, \infty)$ — горизонтальная медленность; $p = \sqrt{c_1^{-2} - \xi^2} = i\mathfrak{p}$, $q = \sqrt{c_2^{-2} - \xi^2} = i\mathfrak{q}$.

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T} \Big|_{x_3 = 0} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{R}(\xi) = (c_2^{-2} - 2\xi^2)^2 + 4pq\xi^2 = 0$$

## Постановка задачи

Пытаемся найти P-SV волну, свободно бегущую вдоль свободной границы упругого полупространства $x_3 \geq 0$. В терминах предыдущей задачи: падает нулевая P-SV-волна, обе отраженные претерпевают полное внутреннее отражение.

$$\mathbf{u} = \tilde{\nabla}\Phi + \tilde{\nabla} \times \Psi \mathbf{e}_2 =$$

$$= C^{\mathrm{SP}} \mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SS}} \mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\mathbf{u} = C^{\mathrm{SS}} \big( -i\mathfrak{q}(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi \mathbf{e}_3 \big) \exp i\Omega \big( \xi x_1 + i\mathfrak{q}(\xi) x_3 \big) +$$

$$+ C^{\mathrm{SP}} \big( \xi \mathbf{e}_1 + i\mathfrak{p}(\xi)\mathbf{e}_3 \big) \exp i\Omega \big( \xi x_1 + i\mathfrak{p}(\xi) x_3 \big)$$

Здесь $\xi \equiv s_1^{\mathrm{SP}} = s_1^{\mathrm{SS}} \in (c_2^{-1}, \infty)$ — горизонтальная медленность; $p = \sqrt{c_1^{-2} - \xi^2} = i\mathfrak{p}$, $q = \sqrt{c_2^{-2} - \xi^2} = i\mathfrak{q}$.

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T} \Big|_{x_3=0} = \mathbf{0} \iff \mathcal{R}(\xi) = (c_2^{-2} - 2\xi^2)^2 - 4\mathfrak{p}\mathfrak{q}\xi^2 = 0$$

— дисперсионное уравнение Рэлея.

# Дисперсионное уравнение Рэлея

$$\mathcal{R}(\xi) = (c_2^{-2} - 2\xi^2)^2 - 4\xi^2 \mathfrak{p}\mathfrak{q} =$$

$$= (c_2^{-2} - 2\xi^2)^2 - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 - c_1^{-2}} \sqrt{\xi^2 - c_2^{-2}} = 0,$$

$\xi \equiv s_1^{\mathrm{SP}} = s_1^{\mathrm{SS}} \in (c_2^{-1}, \infty)$ — горизонтальная медленность.

$$\mathcal{R}(c_2^{-1}) = c_2^{-4} > 0,$$

$$\mathcal{R}(\xi)\big|_{\xi\to\infty} =$$

$$= 4\xi^4 \left( \left(1 - \frac{1}{2c_2^2\xi^2}\right)^2 - \sqrt{1 - c_1^{-2}\xi^{-2}} \sqrt{1 - c_2^{-2}\xi^{-2}} \right) \simeq$$

$$\simeq 4\xi^4 \left( 1 - c_2^{-2}\xi^{-2} - \left(1 - \frac{1}{2c_1^2\xi^2} - \frac{1}{2c_2^2\xi^2}\right) \right) = 2\xi^2(c_1^{-2} - c_2^{-2}) < 0.$$

# Дисперсионное уравнение Рэлея

$$\mathcal{R}(\xi) = (c_2^{-2} - 2\xi^2)^2 - 4\xi^2 \mathfrak{p}\mathfrak{q} =$$

$$= (c_2^{-2} - 2\xi^2)^2 - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 - c_1^{-2}} \sqrt{\xi^2 - c_2^{-2}} = 0,$$

$\xi \equiv s_1^{\mathrm{SP}} = s_1^{\mathrm{SS}} \in (c_2^{-1}, \infty)$ — горизонтальная медленность.

$$\mathcal{R}'_\xi = 8\xi(2\xi^2 - c_2^{-2}) - 8\xi\mathfrak{p}\mathfrak{q} - 4\xi^3\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}} + \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}\right) =$$

$$= \frac{4\xi}{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}\left(2(2\xi^2 - c_2^{-2})\mathfrak{p}\mathfrak{q} - 2\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2 - \xi^2(\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2)\right) =$$

$$= \frac{4\xi}{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}\left(2\underbrace{(\xi^2 - c_2^{-2})}_{\mathfrak{q}^2}\mathfrak{p}\mathfrak{q} - 2\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2 - \xi^2(\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 - 2\mathfrak{p}\mathfrak{q})\right) =$$

$$= \frac{4\xi}{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}\left(-2\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2(\mathfrak{p} - \mathfrak{q}) - \xi^2(\mathfrak{p} - \mathfrak{q})^2\right) < 0$$

# Дисперсионное уравнение Рэлея

$$\mathcal{R}(\xi) = (c_2^{-2} - 2\xi^2)^2 - 4\xi^2\mathfrak{p}\mathfrak{q} =$$

$$= (c_2^{-2} - 2\xi^2)^2 - 4\xi^2\sqrt{\xi^2 - c_1^{-2}}\sqrt{\xi^2 - c_2^{-2}} = 0,$$

$\xi \equiv s_1^{\mathrm{SP}} = s_1^{\mathrm{SS}} \in (c_2^{-1}, \infty)$ — горизонтальная медленность.

$\exists!\ \xi = c_R^{-1}: \quad \mathcal{R}(c_R^{-1}) = 0.$

$\urcorner\ c_R = \xi^{-1} = c_2\zeta$:

$$c_2^4\mathcal{R} = (1 - 2\zeta^{-2})^2 - 4\zeta^{-2}\sqrt{\zeta^{-2} - c_2^2/c_1^2}\sqrt{\zeta^{-2} - 1}$$

$\Longrightarrow \quad \zeta = c_R/c_2$ — некоторая функция величины

$$\frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}.$$

$\urcorner\ \lambda = \mu\ (\nu = 1/4): \quad c_R \simeq 0.92c_2.$

# Перемещения

$$\mathbf{u} = \tilde{\nabla}\Phi + \tilde{\nabla} \times \Psi \mathbf{e}_2 =$$

$$= C^{\mathrm{SP}} \mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SS}} \mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\mathbf{u} = C^{\mathrm{SS}} \big( -i\mathfrak{q}(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi \mathbf{e}_3 \big) \exp i\Omega \big( \xi x_1 + i\mathfrak{q}(\xi) x_3 \big) +$$

$$+ C^{\mathrm{SP}} \big( \xi \mathbf{e}_1 + i\mathfrak{p}(\xi) \mathbf{e}_3 \big) \exp i\Omega \big( \xi x_1 + i\mathfrak{p}(\xi) x_3 \big)$$

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T} \Big|_{x_3=0} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} 2i\mathfrak{p}\xi C^{\mathrm{SP}} - (c_2^{-2} - 2\xi^2) C^{\mathrm{SS}} = 0 \\ (c_2^{-2} - 2\xi^2) C^{\mathrm{SP}} + 2i\mathfrak{q}\xi C^{\mathrm{SS}} = 0 \end{array}$$

# Перемещения

$$\mathbf{u} = \tilde{\nabla}\Phi + \tilde{\nabla} \times \Psi \mathbf{e}_2 =$$

$$= C^{\mathrm{SP}} \mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{SP}} \cdot \mathbf{r}) + C^{\mathrm{SS}} \mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \times \mathbf{e}_2 \exp(i\Omega \mathbf{s}^{\mathrm{SS}} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\mathbf{u} = C^{\mathrm{SS}} \big( - i\mathfrak{q}(\xi)\mathbf{e}_1 + \xi \mathbf{e}_3 \big) \exp i\Omega \big( \xi x_1 + i\mathfrak{q}(\xi) x_3 \big) +$$

$$+ C^{\mathrm{SP}} \big( \xi \mathbf{e}_1 + i\mathfrak{p}(\xi)\mathbf{e}_3 \big) \exp i\Omega \big( \xi x_1 + i\mathfrak{p}(\xi) x_3 \big)$$

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T} \Big|_{x_3=0} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad C^{\mathrm{SS}} = \frac{2i\mathfrak{p}\xi}{c_2^{-2} - 2\xi^2} C^{\mathrm{SP}}$$

$$\mathbf{u} = C^{\mathrm{SP}} \xi \left( \frac{-2\mathfrak{p}\mathfrak{q}}{2\xi^2 - c_2^{-2}} \exp(-\mathfrak{q}\Omega x_3) + \exp(-\mathfrak{p}\Omega x_3) \right) \exp i\Omega\xi x_1 \, \mathbf{e}_1 +$$

$$+ C^{\mathrm{SP}} i\mathfrak{p} \left( \frac{-2\xi^2}{2\xi^2 - c_2^{-2}} \exp(-\mathfrak{q}\Omega x_3) + \exp(-\mathfrak{p}\Omega x_3) \right) \exp i\Omega\xi x_1 \, \mathbf{e}_3$$

# Контрольные вопросы

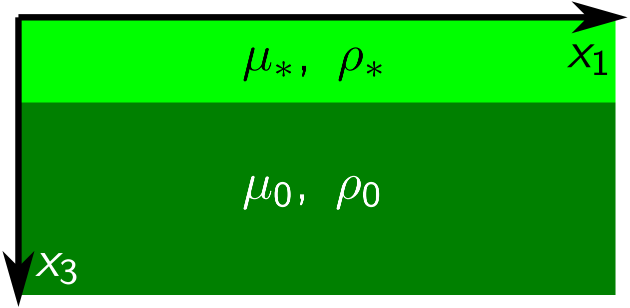
1. Каковы траектории материальных частиц в движении, представляющем собой волну Рэлея?
2. Обладает ли волна Рэлея дисперсией?

# Постановка задачи

Рассмотрим слой толщиной $h$, прилегающий к свободной поверхности ($x_3 = 0$) упругого полупространства:

$$\cancel{\lambda_*}, \mu_*, \rho_* \quad \text{при} \quad 0 < x_3 < h,$$

$$\cancel{\lambda_0}, \mu_0, \rho_0 \quad \text{при} \quad h < x_3 < \infty.$$



# Постановка задачи

Рассмотрим слой толщиной $h$, прилегающий к свободной поверхности $(x_3 = 0)$ упругого полупространства:

$$\cancel{\lambda_*}, \mu_*, \rho_* \quad \text{при} \quad 0 < x_3 < h,$$
$$\cancel{\lambda_0}, \mu_0, \rho_0 \quad \text{при} \quad h < x_3 < \infty.$$

Разыскиваем SH-волну, бегущую вдоль слоя: $\mathbf{u} = v(x_3) \exp i\Omega\xi x_1 \mathbf{e}_2$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial {x_3}^2} + \Omega^2 (c_2^{-2} - \xi^2) v = 0, \qquad \begin{array}{l} 0 < x_3 < h, \\ h < x_3 < \infty. \end{array}$$

$x_3 = 0: \quad \frac{\partial v_*}{\partial x_3} = 0.$

$x_3 = h: \quad [v] = 0, \qquad \left[\mu \frac{\partial v}{\partial x_3}\right] = 0.$

$x_3 = \infty: \quad v_0 \to 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \xi > c_{20}^{-1}.$

# Дисперсионное уравнение

Рассматриваем мягкий слой:

$$c_{20}^{-1} < \xi < c_{2*}^{-1}: \quad \begin{aligned} v_*(x_3) &= C_* \cos\left(\Omega\sqrt{c_{2*}^{-2} - \xi^2}\right) x_3 &&\equiv C_* \cos\left(\Omega q_*(\xi) x_3\right) \\ v_0(x_3) &= C_0 \exp\left(-\Omega\sqrt{\xi^2 - c_{20}^{-2}}\right) x_3 &&\equiv C_0 \exp\left(-\Omega q_0(\xi) x_3\right) \end{aligned}$$

# Дисперсионное уравнение

Рассматриваем мягкий слой:

$$c_{20}^{-1} < \xi < c_{2*}^{-1}: \quad \begin{aligned} v_*(x_3) &= C_* \cos\left(\Omega\sqrt{c_{2*}^{-2} - \xi^2}\right)x_3 &&\equiv C_* \cos\left(\Omega q_*(\xi)x_3\right) \\ v_0(x_3) &= C_0 \exp\left(-\Omega\sqrt{\xi^2 - c_{20}^{-2}}\right)x_3 &&\equiv C_0 \exp\left(-\Omega q_0(\xi)x_3\right) \end{aligned}$$

$$\cancel{x_3 = 0: \quad \frac{\partial v_*}{\partial x_3} = 0.}$$

$$x_3 = h: \quad [v] = 0, \qquad \left[\mu \frac{\partial v}{\partial x_3}\right] = 0.$$

$$\cancel{x_3 = \infty: \quad v_0 \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \xi > c_{20}^{-1}.}$$

**Задача**

Вывести дисперсионное уравнение для волны Лава

# Дисперсионное уравнение

Рассматриваем мягкий слой:

$$c_{20}^{-1} < \xi < c_{2*}^{-1}: \quad \begin{aligned} v_*(x_3) &= C_* \cos\left(\Omega\sqrt{c_{2*}^{-2} - \xi^2}\right)x_3 &&\equiv C_* \cos\left(\Omega q_*(\xi) x_3\right) \\ v_0(x_3) &= C_0 \exp\left(-\Omega\sqrt{\xi^2 - c_{20}^{-2}}\right)x_3 &&\equiv C_0 \exp\left(-\Omega q_0(\xi) x_3\right) \end{aligned}$$

Дисперсионное уравнение:

$$\tan\left(h\Omega\sqrt{c_{2*}^{-2} - \xi^2}\right) - \frac{\mu_0}{\mu_*}\frac{\sqrt{\xi^2 - c_{20}^{-2}}}{\sqrt{c_{2*}^{-2} - \xi^2}} = 0$$

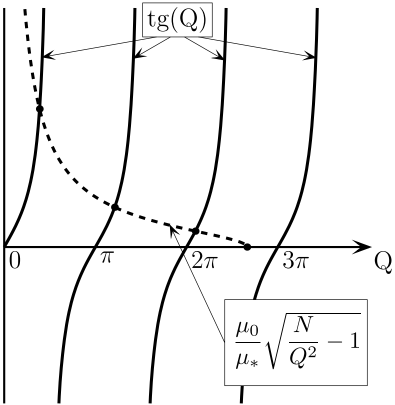
$$\tan Q = \frac{\mu_0}{\mu_*}\sqrt{\frac{N}{Q^2} - 1},$$

$$Q = h\Omega\sqrt{c_{2*}^{-2} - \xi^2},$$

$$N = \Omega^2 h^2 (c_{2*}^{-2} - c_{20}^{-2}).$$

Число корней равно $\mathrm{trunc}(\sqrt{N}/\pi) + 1.$

# Дисперсионное уравнение



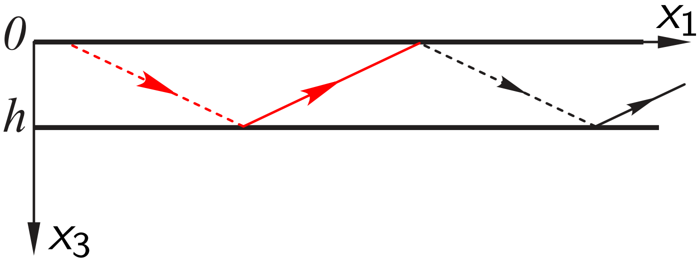

$$\tan Q = \frac{\mu_0}{\mu_*}\sqrt{\frac{N}{Q^2}-1}.$$

Число корней равно $\mathrm{trunc}(\sqrt{N}/\pi)+1$.

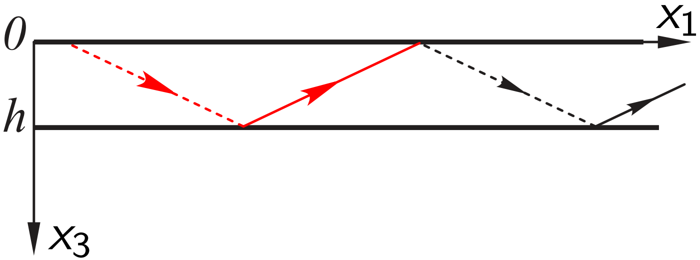
## Контрольные вопросы

1. Каковы траектории материальных частиц в движении, представляющем собой волну Лава?
2. Обладает ли волна Лава дисперсией?

## Метод конструктивной интерференции (лучевой метод)



# Метод конструктивной интерференции (лучевой метод)




Плоская волна, проходя туда и обратно приобретает набег фазы $\phi$ (т.е. приобретает фазовый множитель $\exp i\phi$). Если $\exp i\phi = 1$ волна переходит в себя.

# Метод конструктивной интерференции (лучевой метод)

Нисходящая волна в слое:

## Метод конструктивной интерференции (лучевой метод)

Нисходящая волна в слое:

$$\mathbf{u}^{\downarrow} = C^{\downarrow}\mathbf{e}_2 \exp i\Omega\big(\xi x_1 + q_*(\xi)(x_3 - h)\big)$$

Восходящая отраженная волна в слое:

# Метод конструктивной интерференции (лучевой метод)

Нисходящая волна в слое:

$$\mathbf{u}^{\downarrow} = C^{\downarrow}\mathbf{e}_2 \exp i\Omega\big(\xi x_1 + q_*(\xi)(x_3 - h)\big)$$

Восходящая отраженная волна в слое:

$$\mathbf{u}^{\uparrow} = C^{\uparrow}\mathbf{e}_2 \exp i\Omega\big(\xi x_1 - q_*(\xi)(x_3 - h)\big)$$

Нисходящая преломленная волна в полупространстве:

# Метод конструктивной интерференции (лучевой метод)

Нисходящая волна в слое:

$$\mathbf{u}^{\downarrow} = C^{\downarrow}\mathbf{e}_2 \exp i\Omega\big(\xi x_1 + q_*(\xi)(x_3 - h)\big)$$

Восходящая отраженная волна в слое:

$$\mathbf{u}^{\uparrow} = C^{\uparrow}\mathbf{e}_2 \exp i\Omega\big(\xi x_1 - q_*(\xi)(x_3 - h)\big)$$

Нисходящая преломленная волна в полупространстве:

$$\mathbf{u}^{\downarrow\downarrow} = C^{\downarrow\downarrow}\mathbf{e}_2 \exp i\Omega\big(\xi x_1 + i\mathfrak{q}_0(\xi)(x_3 - h)\big)$$

Граничные условия:

# Метод конструктивной интерференции (лучевой метод)

Нисходящая волна в слое:

$$\mathbf{u}^{\downarrow} = C^{\downarrow}\mathbf{e}_2 \exp i\Omega\big(\xi x_1 + q_*(\xi)(x_3 - h)\big)$$

Восходящая отраженная волна в слое:

$$\mathbf{u}^{\uparrow} = C^{\uparrow}\mathbf{e}_2 \exp i\Omega\big(\xi x_1 - q_*(\xi)(x_3 - h)\big)$$

Нисходящая преломленная волна в полупространстве:

$$\mathbf{u}^{\downarrow\downarrow} = C^{\downarrow\downarrow}\mathbf{e}_2 \exp i\Omega\big(\xi x_1 + i\mathfrak{q}_0(\xi)(x_3 - h)\big)$$

Граничные условия:

$$x_3 = h: \quad [v] = 0, \qquad \left[\mu \frac{\partial v}{\partial x_3}\right] = 0 \quad \Longrightarrow$$

# Метод конструктивной интерференции (лучевой метод)

Нисходящая волна в слое:

$$\mathbf{u}^{\downarrow} = C^{\downarrow}\mathbf{e}_2 \exp i\Omega\big(\xi x_1 + q_*(\xi)(x_3 - h)\big)$$

Восходящая отраженная волна в слое:

$$\mathbf{u}^{\uparrow} = C^{\uparrow}\mathbf{e}_2 \exp i\Omega\big(\xi x_1 - q_*(\xi)(x_3 - h)\big)$$

Нисходящая преломленная волна в полупространстве:

$$\mathbf{u}^{\downarrow\downarrow} = C^{\downarrow\downarrow}\mathbf{e}_2 \exp i\Omega\big(\xi x_1 + i\mathfrak{q}_0(\xi)(x_3 - h)\big)$$

Граничные условия:

$$x_3 = h: \quad [v] = 0, \qquad \left[\mu \frac{\partial v}{\partial x_3}\right] = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$C^{\downarrow} + C^{\uparrow} = C^{\downarrow\downarrow},$$
$$i\mu_* q_*(\xi)(C^{\downarrow} - C^{\uparrow}) = -\mu_0\mathfrak{q}_0(\xi)C^{\downarrow\downarrow}$$

# Коэффициент отражения SH-волны от границы раздела

$$\begin{aligned} C^{\downarrow} + C^{\uparrow} &= C^{\downarrow\downarrow}, \\ i\mu_* q_*(\xi)(C^{\downarrow} - C^{\uparrow}) &= -\mu_0 q_0(\xi) C^{\downarrow\downarrow} \end{aligned} \quad \Longrightarrow$$

$$C^{\uparrow} = RC^{\downarrow},$$

# Коэффициент отражения SH-волны от границы раздела

$$\begin{gathered} C^{\downarrow} + C^{\uparrow} = C^{\downarrow\downarrow}, \\ i\mu_* q_*(\xi)(C^{\downarrow} - C^{\uparrow}) = -\mu_0 q_0(\xi) C^{\downarrow\downarrow} \end{gathered} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{gathered} C^{\uparrow} = RC^{\downarrow}, \\ R = -\frac{\mu_0 q_0 + i\mu_* q_*}{\mu_0 q_0 - i\mu_* q_*} \equiv \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \exp(-i\pi) \end{gathered} \quad \Longrightarrow$$

# Коэффициент отражения SH-волны от границы раздела

$$
\begin{gathered}
C^{\downarrow} + C^{\uparrow} = C^{\downarrow\downarrow}, \\
i\mu_* q_*(\xi)(C^{\downarrow} - C^{\uparrow}) = -\mu_0 q_0(\xi) C^{\downarrow\downarrow}
\end{gathered}
\quad \Longrightarrow
$$

$$
\begin{gathered}
C^{\uparrow} = RC^{\downarrow}, \\
R = -\frac{\mu_0 q_0 + i\mu_* q_*}{\mu_0 q_0 - i\mu_* q_*} \equiv \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \exp(-i\pi)
\end{gathered}
\quad \Longrightarrow
$$

$$
\begin{gathered}
|R| = 1, \\
\arg R = 2\arctan\frac{\mu_* q_*}{\mu_0 q_0} - \pi
\end{gathered}
$$

## Набег фазы и дисперсионное уравнение

$$\arg R = 2\arctan\frac{\mu_* q_*}{\mu_0 q_0} - \pi$$

Набег фазы равен:

# Набег фазы и дисперсионное уравнение

$$\arg R = 2\arctan\frac{\mu_* q_*}{\mu_0 q_0} - \pi$$

Набег фазы равен:

$$\phi = 2q_* h\Omega + 2\arctan\frac{\mu_* q_*}{\mu_0 q_0} - \pi = 2\pi k \quad \Longleftrightarrow$$

$$\arctan x + \arctan x^{-1} = \frac{\pi}{2}, \quad x > 0$$

$$q_* h\Omega = \arctan\frac{\mu_0 q_0}{\mu_* q_*} + \pi k \quad \Longleftrightarrow$$

$$\tan q_* h\Omega = \frac{\mu_0 q_0}{\mu_* q_*}$$

Получили дисперсионное соотношение, идентичное дисперсионному соотношению волны Лава. Таким образом волна Лава идентична поверхностной волне, являющейся суммой двух конструктивно интерферирующих плоских волн.

# Сферические волны в упругой среде

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = 0$$

$$\exists\ \mathbf{u} = \nabla\Phi(r,t):\quad \Longrightarrow$$

$$\triangle\Phi - c_1^{-2}\ddot{\Phi} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \Phi_{rr} + \frac{2}{r}\Phi_r - c_1^{-2}\ddot{\Phi} = 0 \quad \overset{\Phi=v/r}{\Longrightarrow}$$

$$v_{rr} - c_1^{-2}\ddot{v} = 0 \quad\Longrightarrow$$

$$\Phi = \frac{1}{r}\phi_-\left(t - \frac{r}{c_1}\right) + \frac{1}{r}\phi_+\left(t + \frac{r}{c_1}\right) \quad\Longrightarrow$$

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{1}{r^2}\left(\phi_-\left(t-\frac{r}{c_1}\right) + \phi_+\left(t+\frac{r}{c_1}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c_1 r}\left(-\phi_-'\left(t-\frac{r}{c_1}\right) + \phi_+'\left(t+\frac{r}{c_1}\right)\right)\right)\hat{\mathbf{r}}$$

# Отражение сферической волны от центра симметрии

Ранее мы показали, что

$$\left(\triangle - c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\phi\left(t \pm \frac{r}{c}\right)}{r} = -4\phi\pi\delta(\mathbf{x}).$$

Таким образом однородному волновому уравнению во всём $\mathbb{R}^3$ удовлетворяет линейная комбинация

$$\frac{\phi\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r} - \frac{\phi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r},$$

т.е. сходящаяся волна $r^{-1}\phi\left(t + \frac{r}{c}\right)$ отражается от центра симметрии аналогично волнам в струне с закреплённым концом.

# Цилиндрические волны в упругой среде

$$\mu\triangle\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = 0$$

$\daleth\ \mathbf{u} = \nabla\Phi(\mathfrak{r}, t): \quad \Longrightarrow$

$$\tilde{\triangle}\Phi - c_1^{-2}\ddot{\Phi} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Phi_{\mathfrak{r}\mathfrak{r}} + \frac{1}{\mathfrak{r}}\Phi_{\mathfrak{r}} - c_1^{-2}\ddot{\Phi} = 0$$

# Цилиндрические волны

$$\mu \triangle \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0$$

$\exists\ \mathbf{u} = \nabla\Phi(\mathfrak{r}, t) : \quad \Longrightarrow$

$$\tilde{\triangle}\Phi - c_1^{-2}\ddot{\Phi} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Phi_{\mathfrak{r}\mathfrak{r}} + \frac{1}{\mathfrak{r}}\Phi_{\mathfrak{r}} - c_1^{-2}\ddot{\Phi} = 0$$

$$\Phi = \int_0^\infty \left(\phi_-\left(t - \frac{\mathfrak{r}}{c_1}\cosh x\right) + \phi_+\left(t - \frac{\mathfrak{r}}{c_1}\cosh x\right)\right) dx$$

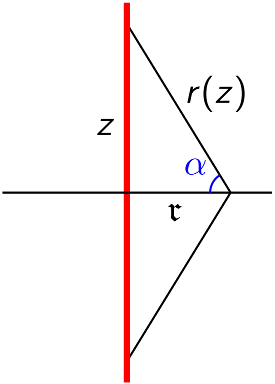

T. Levi-Civita.
Sopra una classe di integrali dell'equazione $A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$
Il Nuovo Cimento. July 1897, Volume 6, Issue 1, pp. 204–209

H. Lamb.
On Wave-Propagation in Two Dimensions.
Proc. London Math. Soc., 1902, Volume 35(1), pp. 141–161.

# Цилиндрические волны

Рассмотрим точечные источники сосредоточенные на прямой в $\mathbb{R}^3$:

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(t-\frac{r(z)}{c}\right)\frac{dz}{r(z)} = -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(t-\frac{\mathfrak{r}}{c\cos\alpha}\right)\frac{d\alpha}{\cos\alpha} =$$



# Цилиндрические волны

Рассмотрим точечные источники сосредоточенные на прямой в $\mathbb{R}^3$:

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{r(z)}{c}\right)\frac{dz}{r(z)} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(t - \frac{\mathfrak{r}}{c\cos\alpha}\right)\frac{d\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} f\left(t - \frac{\mathfrak{r}}{c}\cosh x\right)dx$$

$$r = \frac{\mathfrak{r}}{\cos\alpha},$$

$$z = \mathfrak{r}\tan\alpha, \qquad dz = \frac{\mathfrak{r}\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\int\frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \int dx \qquad \Longrightarrow \qquad \ln\left(\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = x \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}\right) \equiv \operatorname{Arccosh}\frac{1}{\cos\alpha} = x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\cos\alpha} = \cosh x$$

## Формулировка задачи Лэмба

Рассмотрим полупространство $x_3 \geq 0$.

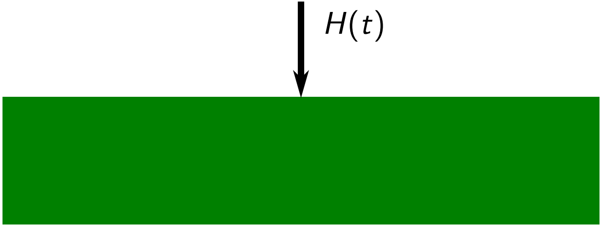
3D:

$$-\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\Big|_{x_3=0} = H(t)\delta(x_1)\delta(x_2)\mathbf{e}_3.$$

2D:

$$-\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\Big|_{x_3=0} = H(t)\delta(x_1)1(x_2)\mathbf{e}_3.$$

Разыскивается решение уравнений эластодинамики, удовлетворяющее нулевым НУ: $\mathbf{u}\big|_{t<0} \equiv 0$.



# История

Оригинальная работа:

H. Lamb.
On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid.
Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. 1904. — Vol. 203. — P. 1–42.

Современный исторический обзор. Изложение метода Каньяра в 2D по-русски:

Перегудов Д.В.
Двумерная задача Лэмба. Метод Каньяра.
Вычислительная сейсмология. — 2000. — No 31. — С. 120–137.

# История

**Lamb, 1904** При помощи метода интегральных преобразований рассмотрена динамическая задача об определении реакции упругого полупространства на точечный источник давления, расположенный на границе. В двумерном случае были получены явные выражения для смещения на границе, в трехмерном — смещения на границе были получены в виде однократного интеграла.

**Смирнов & Соболев, 1932** При помощи метода функционально-инвариантных решений получены явные выражения для смещения во всей полуплоскости для двумерной задачи.

**Смирнов & Соболев, 1933** Решение трехмерной задачи во всем полупространстве в виде однократного интеграла от алгебраической функции по некоторому контуру в комплексной плоскости.

# История

Cagniard, 1939 Предложена техника обращения интегральных преобразований для трехмерной задачи, также позволившая получить решение во всем полупространстве в виде однократного интеграла, известная теперь как “метод Каньяра”.

Петрашень, Марчук, Огурцов, 1950 Данный результат независимо получен методом интегральных преобразований, с помощью другой техники обращения, известной теперь в западной литературе как метод Виллиса.

Pekeris, 1955 Показано, что интеграл, выражающий поверхностное нормальное смещение в трехмерной задаче Лэмба, может быть вычислен через элементарные функции в случае $\nu = 0.25$ $(\lambda = \mu)$.

De Hoop, 1960 Развитие техники Каньяра (метод Каньяра – Де Хоопа).

# История

Richards, 1979 Аналитическое выражение для вертикального смещения на поверхности в трехмерной задаче при произвольных постоянных Ламе.

Richards P.G.
Elementary solutions to Lamb's problem for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation
Bull. Seism. Soc. Am. — 1979. — Vol. 69, no. 3. — P. 947–956.

# Аналитическое выражение для вертикального смещения на поверхности в трехмерной задаче

Для $\nu < \nu_* \simeq 0.263$, $x_3 = 0$ решение имеет вид (Richards, 1979):

$$u_3(r,t) = G(r,t) \equiv \frac{1-\nu}{2\pi\mu r}\left[\left(\frac{1}{2} - Q_1\left(\frac{c_2 t}{r}\right) + Q_2\left(\frac{c_2 t}{r}\right) - Q_3\left(\frac{c_2 t}{r}\right)H\left(\frac{r}{c_R} - t\right)\right)H\left(t - \frac{r}{c_1}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2} + Q_1\left(\frac{c_2 t}{r}\right) - Q_2\left(\frac{c_2 t}{r}\right) - Q_3\left(\frac{c_2 t}{r}\right)H\left(\frac{r}{c_R} - t\right)\right)H\left(t - \frac{r}{c_2}\right)\right],$$

где $r^2 = x_1^2 + x_2^2$,

$$Q_i(s) = \frac{q_i}{|s^2 - p_i^2|^{1/2}},$$

$q_i(\nu), p_i(\nu)$ — безразмерные константы, в частности $p_3 = c_2/c_R$.

$$1/2 - Q_1(c_{21}) + Q_2(c_{21}) - Q_3(c_{21}) = 0,$$
$$1/2 + Q_1(1) - Q_2(1) - Q_3(1) = 0.$$

# Константы $p_i$

$$p_i = \Pi_i c_{21} \equiv \Pi_i \, c_2/c_1.$$

Здесь $\Pi_i$ — корни уравнения

$$\mathfrak{R}(\Pi_i) = 0,$$

$$\mathfrak{R}(\Pi) = (c_{21}^{-2} - 2\Pi)^4 - 16(1-\Pi)(c_{21}^{-2} - \Pi)\Pi^2,$$

такие, что $\Pi_1 < \Pi_2 < \Pi_3$.

$\nu < \nu_* \simeq 0.263$ 3 вещественных корня (в т.ч. 1 рэлеевский)

$\nu > \nu_* \simeq 0.263$ 1 вещественный корень (рэлеевский) и 2 комплексно сопряженных

Для сухих грунтов $\nu < \nu_*$.

# Константы $q_i$

Выражения для коэффициентов $q_i$ имеют вид

$$q_1 = -\frac{4a_1\Pi_1(1-\Pi_1)\sqrt{c_{21}^{-2}-\Pi_1}}{c_{21}(1-\nu)},$$

$$q_2 = \frac{4a_2\Pi_2(1-\Pi_2)\sqrt{c_{21}^{-2}-\Pi_2}}{c_{21}(1-\nu)},$$

$$q_3 = -\frac{4a_3\Pi_3(\Pi_3-1)\sqrt{\Pi_3-c_{21}^{-2}}}{c_{21}(1-\nu)},$$

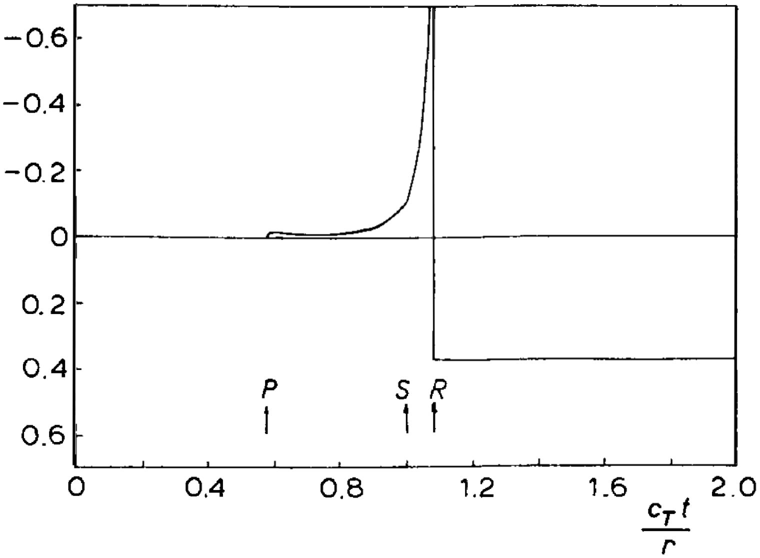
где

$$a_1 = \frac{1}{16(c_{21}^{-2}-1)(\Pi_1-\Pi_2)(\Pi_3-\Pi_1)},$$

$$a_2 = \frac{1}{16(c_{21}^{-2}-1)(\Pi_1-\Pi_2)(\Pi_2-\Pi_3)},$$

$$a_3 = \frac{1}{16(c_{21}^{-2}-1)(\Pi_3-\Pi_1)(\Pi_2-\Pi_3)}.$$

# Вертикальное смещение на поверхности в трехмерной задаче



# Сейсмозащита от волн Рэлея

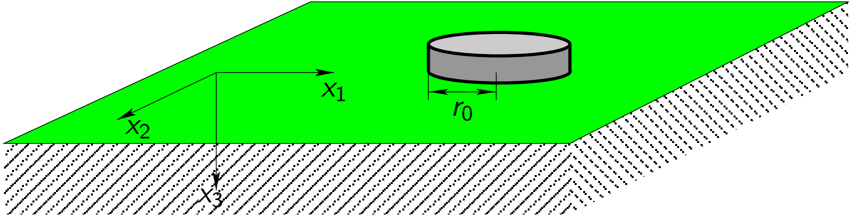
Волна Рэлея, вызванная близким к поверхности источником, оказывается на поверхности наиболее интенсивной, и, считается, что при землетрясениях именно она причиняет основной ущерб.

# Задачи

1. $\urcorner$ $G(x_1, x_2, t)$ — решение (на поверхности) трехмерной задачи Лэмба (удовлетворяет ГУ $-\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\big|_{x_3=0} = H(t)\delta(x_1)\delta(x_2)\mathbf{e}_3$). Выписать в виде свёртки нестационарное решение задачи с ГУ
$$-\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\big|_{x_3=0} = P(t)\delta(x_1)\delta(x_2)\mathbf{e}_3.$$
2. Выписать установившееся решение для случая гармонической нагрузки
$$-\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\big|_{x_3=0} = H(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\delta(x_1)\delta(x_2)\mathbf{e}_3.$$
3. Выписать нестационарное решение задачи для подвижной нагрузки
$$-\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\big|_{x_3=0} = P(t)\delta(x_1 - \ell(t))\delta(x_2)\mathbf{e}_3.$$
4. Выписать установившееся решение задачи для гармонической подвижной нагрузки
$$-\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\big|_{x_3=0} = H(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\delta(x_1 - \ell(t))\delta(x_2)\mathbf{e}_3.$$

Здесь $P(t)\big|_{t<0} \equiv 0$.

# Вертикальные колебания плоского круглого в плане штампа лежащего на поверхности упругого полупространства. Постановка задачи.



# Вертикальные колебания плоского круглого в плане штампа лежащего на поверхности упругого полупространства. Постановка задачи.

Уравнения движения:

$$c_2^2 \triangle \mathbf{u} + (c_1^2 - c_2^2)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} = \ddot{\mathbf{u}},$$

$$m\ddot{w} = \int_{r \le r_0} \tau_{33}\, dS + f(t).$$

Граничные условия ($x_3 = 0$):

$$\begin{aligned} u_3 &= w, \quad \text{for} \quad r \le r_0 \\ \tau_{33} &= 0, \quad \text{for} \quad r > r_0 \\ \tau_{13} &= \tau_{23} = 0. \end{aligned}$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0} = \mathbf{0}, \quad w\big|_{t<0} = 0.$

Малый параметр:

$$\epsilon = \frac{\Omega r_0}{c_2} = o(1).$$

## Вертикальные колебания лежащего на поверхности упругого полупространства. Метод.

Lavrov N.A., Pavlovskaya E.E.
Transient behavior of a few dies on an elastic half-space
Acta Mechanica. — 2000. — Vol. 144. — P. 185–195.

# Гармонический случай: осциллирующая точечная нагрузка на поверхности упругого полупространства

$$-\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\Big|_{x_3=0} = H(t)e^{-i\Omega t}\delta(x_1)\delta(x_2)\mathbf{e}_3.$$

$$u_3 = P_0 \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau)\, e^{-i\Omega\tau}\, \frac{\partial G(x_1, x_2, t-\tau)}{\partial(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= P_0 e^{-i\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} H(t-\tau)\, e^{i\Omega\tau}\, \frac{\partial G(x_1, x_2, \tau)}{\partial\tau}\, d\tau$$

Установившееся решение:

$$u_3^{\mathbf{st}} = P_0 e^{-i\Omega t} \int_0^{\infty} e^{i\Omega\tau}\, \frac{\partial G(x_1, x_2, \tau)}{\partial\tau}\, d\tau \equiv P_0 e^{-i\Omega t} G_{\mathbf{st}}^{\Omega}.$$

# Гармонический случай: осциллирующая точечная нагрузка на поверхности упругого полупространства

$$-\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\Big|_{x_3=0} = H(t)e^{-i\Omega t}\delta(x_1)\delta(x_2)\mathbf{e}_3.$$

Установившееся решение:

$$u_3^{\mathbf{st}} = P_0 e^{-i\Omega t}\int_0^\infty e^{i\Omega\tau}\,\frac{\partial G(x_1,x_2,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau \equiv P_0 e^{-i\Omega t} G_{\mathbf{st}}^{\Omega}.$$

$$G_{\mathbf{st}}^{\Omega} = \frac{1-\nu}{2\pi\mu r}\left(\frac{1}{2}\,e^{\frac{i\Omega r}{c_1}} + \frac{1}{2}\,e^{\frac{i\Omega r}{c_2}} + i\Omega\,\mathcal{J}_1 + i\Omega\,\mathcal{J}_2\right),$$

$$\mathcal{J}_\gamma = \int_0^\infty e^{i\Omega\tau}\left((-1)^{\gamma-1}\sum_{\alpha=1,2}(-1)^\alpha Q_\alpha\left(\frac{c_2\tau}{r}\right) - Q_3\left(\frac{c_2\tau}{r}\right)H\left(\frac{r}{c_R} - \tau\right)\right)H\left(\tau - \frac{r}{c_\gamma}\right)d\tau.$$

# Гармонический случай: осциллирующая точечная нагрузка на поверхности упругого полупространства

$$G^{\Omega}_{\mathrm{st}} = \frac{1-\nu}{2\pi\mu r}\left(1 + \frac{i\Omega r}{c_2}\left(\frac{c_2}{2c_1} + \frac{1}{2} + \mathcal{J}^0_1 + \mathcal{J}^0_2\right)\right) + o(\epsilon)$$

$$\mathcal{J}^0_\gamma = \int_0^\infty \left((-1)^{\gamma-1}\sum_{\alpha=1,2}(-1)^\alpha Q_\alpha(T) - Q_3(T)H\left(\frac{c_2}{c_R} - T\right)\right) H\left(T - \frac{c_2}{c_\gamma}\right) dT$$

— зависят только от $\nu$.

$$G^{\Omega}_{\mathrm{st}} = \frac{1-\nu}{2\pi\mu r}\left(1 + \frac{i\Omega r}{c_2}\mathcal{A}(\nu)\right) + o(\epsilon) =$$

$$= \frac{1-\nu}{2\pi\mu r} + i\Omega\frac{1-\nu}{2\pi\mu c_2}\mathcal{A}(\nu) + o(\epsilon) = \mathcal{G}_0 + i\Omega\mathcal{G}_1 + o(\epsilon).$$

$\mathcal{G}_1 = \mathrm{const}!$

# Контактная задача

Для Фурье образов по времени имеем

$$\mathcal{F}_t[w] = \mathcal{F}_t[u_3] = -\mathcal{F}_t[\tau_{33}] * G_{\mathrm{st}}^{\Omega} = -\mathcal{F}_t[\tau_{33}] * (\mathcal{G}_0 + i\Omega\mathcal{G}_1) + o(\epsilon),$$

где $\mathcal{F}_t[f(t)](\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\Omega t}\,dt$ преобразование Фурье по времени; звёздочкой обозначена свёртка по области $r \leq r_0$.

Ищем решение в виде асимптотических разложений

$$\tau_{33} = \sum_n \epsilon^n \tau_{33(n)}, \qquad u_3 = \sum_n \epsilon^n u_{3(n)}.$$

## Контактная задача: нулевое приближение

В нулевом приближении ($\epsilon = 0$) имеем (Галин):

$$\tau_{33(0)} = -F_0\,\sigma_0(x_1, x_2), \qquad u_{3(0)} = W_{\text{st}} = \frac{\mathcal{W}}{2\pi\mu r_0},$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2\pi r_0\sqrt{r_0^2 - r^2}}, \qquad F_0 = -\int_{r\le r_0} \tau_{33(0)}\,dS,$$

$$\mathcal{W}(\nu) = \frac{\pi(1-\nu)}{2}$$

$W_{\text{st}}$ — вертикальное смещение штампа под действием единичной внешней силы.

# Контактная задача: асимптотическое решение интегрального уравнения в 1ом приближении

Имеем $\sigma_0 * \mathcal{G}_0 = W_{\mathbf{st}}$, $\sigma_0 * 1 = 1$ для $r < r_0$. Подставляя выражения для членов нулевого порядка, получим:

$$\mathcal{F}_T[w] = \mathcal{F}_T[F_0] W_{\mathbf{st}} + i\Omega\, \mathcal{F}_T[F_0]\, \mathcal{G}_1 + \mathcal{F}_T[\tau_{33(1)}] * \mathcal{G}_0 + o(\epsilon).$$

Поскольку величины $\mathcal{F}_T[w]$ и $\mathcal{F}_T[F_0] W_{\mathbf{st}} + i\Omega\mathcal{F}_T[F_0]\, \mathcal{G}_1$ не зависит от $x_1$ и $x_2$, интегральное уравнение удовлетворяется с точностью до $o(\epsilon)$ тогда и только тогда, когда $\tau_{33(1)} = F_1(t)\sigma_0$.

Переходя к величинам, зависящим от времени, получим:

$$w = F W_{\mathbf{st}} - \dot{F}\, \mathcal{G}_1 + o(\epsilon),$$

$$F = -\int_{r \le r_0} \tau_{33}\, dS.$$

# Контактная задача: решение

Имеем:

$$\frac{w(t)}{W_{\mathrm{st}}} = F(t) - \frac{\mathcal{G}_1}{W_{\mathrm{st}}}\,\dot{F}(t) \sim F\left(t - \frac{\mathcal{G}_1}{W_{\mathrm{st}}}\right),$$

$$W_{\mathrm{st}}^{-1} w\left(t + \frac{\mathcal{G}_1}{W_{\mathrm{st}}}\right) \sim F(t),$$

$$W_{\mathrm{st}}^{-1}\left(w(t) + \frac{\mathcal{G}_1}{W_{\mathrm{st}}}\,\dot{w}(t)\right) \sim F(t).$$

В итоге:

$$m\ddot{w} + \frac{\mathcal{G}_1}{W_{\mathrm{st}}^2}\,\dot{w} + W_{\mathrm{st}}^{-1}\,w = f.$$

# Вертикальные колебания плоского круглого в плане штампа, движущегося с постоянной дорэлеевской скоростью по поверхности упругого полупространства

Gavrilov S.N., Herman G.C.
Oscillation of a punch moving on the free surface of an elastic half space.
Journal of Elasticity. — 2004. — Vol. 75, no. 3. — P. 247–265.