Нестационарные упругие волны

Сергей Николаевич Гаврилов

http://www.pdmi.ras.ru/~serge/lectures/2024.pdf

Общая характеристика курса

Будем рассматривать и решать нестационарные задачи для уравнений в частных производных, описывающие нестационарные процессы в механических системах с распределенными параметрами — много математики (матфизики).

Постановка задачи:

- Уравнения движения ((не)линейные PDE): $\mathcal{L}u(x,t) = f(x,t)$.
- Начальные условия.
- Условия излучения или (и) граничные условия.

Нестационарность:

- Влияние начальных условий на движение.
- Задачи, где правая часть уравнения (нагрузка) зависит от времени негармоническим образом.
- Задачи для систем с переменными по времени свойствами.

Цель курса:

- Научиться решать нестационарные задачи …
- …для того, чтобы изучать принципиально нестационарные явления Природы.
- …которые очень часто являются интуитивно не очевидными или даже контр-очевидными.

План курса

09–11.2024 Одномерные задачи (PDE с двумя независимыми переменными: координата x и время t).

12.2024 Двух- и трехмерные задачи (PDE с 3-4 независимыми переменными: 2-3 координаты x_i и время t).
Экзамен по теоретическим материалам всего курса.

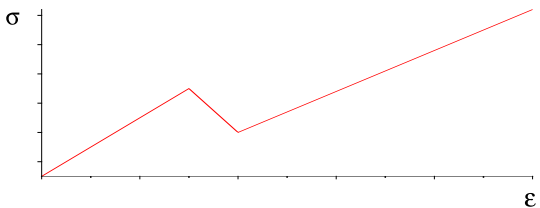
Рассматриваемые в курсе PDE

- Волновое уравнение:
$$\Delta u - c^{-2}\ddot{u} = f.$$
- Телеграфное уравнение:
$$\Delta u - 2\gamma\dot{u} - c^{-2}\ddot{u} - ku = f.$$
- Уравнение Клейна-Гордона:
$$\Delta u - c^{-2}\ddot{u} - ku = f.$$
- Уравнение Гельмгольца:
$$\Delta u + k^2 u = f.$$
- Уравнения линейной изотропной эластодинамики Навье:
$$\mu\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}} = -\rho\boldsymbol{K}.$$

…

Блиц-опрос

1. Выписать общее решение $u(x,t)$ одномерного однородного волнового уравнения $u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0$.
2. Какова размерность $\delta(t)$ (дельта-функции Дирака), если t — время?
3. Выписать решение $u(t)$ уравнения $\ddot{u} + u = f(t)$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям.
4. Имеется тело, в котором зависимость напряжения от деформации имеет вид как на рисунке ниже. Что вы можете сказать про такое тело?



5. Чему равно преобразование Фурье от константы?
6. Знаете ли вы, в чём отличие интегралов Римана и Лебега?

1. Метод характеристик для гиперболических уравнений
2. Необходимые сведения из математического анализа
3. Начальные сведения об обобщенных функциях
4. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
5. Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
6. Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
7. Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
8. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
9. Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
10. Метод стационарной фазы
11. Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
12. Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
13. Уравнения Лапласа (Пуассона)
14. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$
15. Уравнения эластодинамики; P и S волны
16. Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

Метод характеристик

- Для матфизики типичной является ситуация, когда получить какие-либо утверждения или даже сформулировать определения для (системы) PDE общего вида — весьма сложная задача.
- Поэтому, рассмотрим метод характеристик на конкретных примерах …
- …попутно обсудив понятие гиперболичности.
- Ограничимся случаем двух независимых переменных.

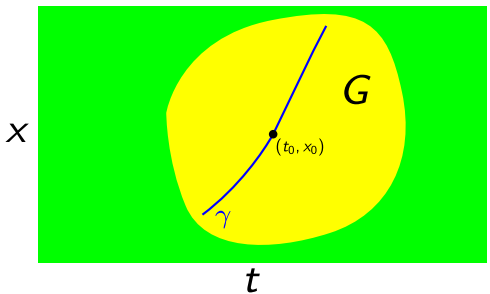
Литература к лекции


С.К. Годунов
Уравнения математической физики.
М., Наука, 1979.

Постановка задачи об определении характеристик для линейного уравнения первого порядка с переменными коэффициентами

$$a(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + b(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} = f(t,x) \qquad \text{или} \qquad a(t,x)\dot{u} + b(t,x)u' = f(t,x)$$

- ⊐ известно, что рассматриваемое уравнение имеет решение в некоторой области G. Выберем в этой области точку (t_0, x_0) и проведем через эту точку кривую γ.
- ⊐ известны значения u вдоль кривой γ (начальные условия)
- Рассматривается задача Коши — требуется восстановить u в некоторой окрестности γ.
- Характеристики — кривые γ, такие, что сформулированная задача м.б. неразрешима или неоднозначно разрешима в зависимости от НУ.



Линейное уравнение первого порядка

$$a(t,x)\dot{u} + b(t,x)u' = f(t,x) \tag{1}$$

Можем найти u $\Longrightarrow$ можем найти $\dot{u},\ u'$ $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} a\,\dot{u} + & b\,u' & = f \\ \mathrm{d}t\,\dot{u} + & \mathrm{d}x\,u' & = \mathrm{d}u \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} a & b \\ \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{vmatrix} \neq 0$$

Определение

Кривые γ в плоскости (t,x), вдоль которых выполняется характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} a & b \\ \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{vmatrix} = 0$ — характеристические кривые (характеристики) уравнения (1).

Т.е. на характеристиках $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_\gamma = \frac{b}{a}$ или $\left.\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right|_\gamma = \frac{a}{b}$.

На характеристиках система должны быть разрешима:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} a & b \\ \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} a & b & f \\ \mathrm{d}t & \mathrm{d}x & \mathrm{d}u \end{bmatrix},$$

т.е. $\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_\gamma = \frac{f}{b}$ или $\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_\gamma = \frac{f}{a}$ — соотношение на характеристике.

Линейное уравнение первого порядка

$$a(t,x)\dot{u} + b(t,x)u' = f(t,x) \tag{1}$$

Поставим в соответствие PDE (1) характеристическую систему ODE:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= a(t,x), \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= b(t,x). \end{aligned} \tag{2}$$

Характеристики, очевидно, представляют собой параметрически заданные системой (2) кривые $(t(s), x(s))$.

Соотношение на характеристике:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = f(t,x). \tag{3}$$

Метод характеристик — решение PDE посредством определения характеристик и использования соотношений на характеристиках. Для линейного PDE первого порядка метод характеристик позволяет свести PDE к системе ODE (2)–(3).

Для линейного однородного PDE первого порядка задача сводится к нахождению первого интеграла системы (2).

Линейное уравнение первого порядка

$$a(t,x)\dot{u} + b(t,x)u' = f(t,x) \tag{1}$$

Поставим в соответствие PDE (1) характеристическую систему ODE:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= a(t,x), \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= b(t,x). \end{aligned} \tag{2}$$

Соотношение на характеристике:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = f(t,x). \tag{3}$$

Метод характеристик — решение PDE посредством определения характеристик и использования соотношений на характеристиках. Для линейного PDE первого порядка метод характеристик позволяет свести PDE к системе ODE (2)–(3).

Для линейного однородного PDE первого порядка задача сводится к нахождению первого интеграла системы (2).

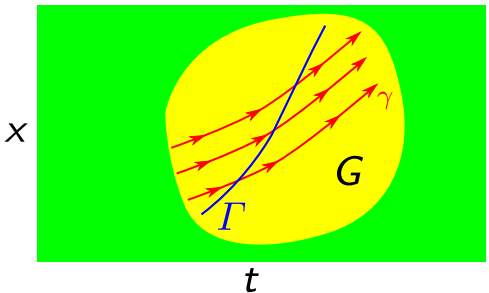
Задача

Найти характеристики и общее решение линейного однородного уравнения первого порядка

$$\dot{u} + cu' = 0.$$

Линейное уравнение первого порядка: выводы

- Если начальные условия заданы на кривой Γ, через каждую точку s которой проходит одна и только одна характеристика γ (не касаясь данной кривой), то соответствующая задача Коши имеет единственное решение.
- Если начальные условия заданы на характеристике γ, то соответствующая задача Коши может не иметь решения, а может иметь неединственное решение (в зависимости от того, выполнено ли соотношение на характеристике γ).
- Разрывы распространяются вдоль характеристик.



Квазилинейное уравнение первого порядка

$$a(t,x,u)\dot{u} + b(t,x,u)u' = f(t,x,u) \tag{4}$$

Рассмотрим характеристическую систему ODE:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= a(t,x,u), \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= b(t,x,u), \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} &= f(t,x,u). \end{aligned} \tag{5}$$

Для квазилинейного PDE (4) первого порядка метод характеристик позволяет свести PDE к системе ODE (5).

- Характеристики зависят от начального условия.
- Кривая, являющаяся характеристикой для одного НУ, для другого характеристикой, вообще говоря, не является.
- При решении задачи Коши характеристики строятся инкрементально вместе с решением.

Система N линейных уравнений первого порядка

$$\mathbf{A}(t,x)\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}(t,x)\mathbf{u}' = \tilde{\mathbf{f}}(t,x) \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — матрицы $N \times N$; $\det \mathbf{A} \neq 0$; $\mathbf{u}$, $\tilde{\mathbf{f}}$ — столбцы.

Домножая (6) на $\mathbf{A}^{-1}$ слева, получим

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t,x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t,x),$$
$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$
$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\tilde{\mathbf{f}}.$$

Система N линейных уравнений первого порядка: характеристическое уравнение

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t,x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t,x) \tag{7}$$

Можем найти $\mathbf{u}$ $\Longrightarrow$ можем найти $\dot{\mathbf{u}}$, $\mathbf{u}'$ $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \mathbf{I}\,\dot{\mathbf{u}} + & \mathbf{C}\,\mathbf{u}' & = \mathbf{f} \\ \mathrm{d}t\,\dot{\mathbf{u}} + & \mathrm{d}x\,\mathbf{u}' & = \mathrm{d}\mathbf{u} \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} \end{vmatrix} \neq 0$$

Определение

Кривые, вдоль которых выполняется характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} \end{vmatrix} = 0$ — характеристики уравнения (7).

$$\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} \end{vmatrix} = (\mathrm{d}t)^N \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathbf{I} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathbf{I} \end{vmatrix} = (\mathrm{d}t)^N \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathbf{I} \end{vmatrix} = (\mathrm{d}t)^N (-1)^N \begin{vmatrix} \mathbf{C} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{vmatrix} = (\mathrm{d}t)^N (-1)^N \det\left(\mathbf{C} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathbf{I}\right)$$

Т.е. на характеристиках $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_\gamma = k_i(x,t)$, где k_i — собственные числа $\mathbf{C}$.

Система N линейных уравнений первого порядка: соотношения на характеристиках

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t,x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t,x) \tag{7}$$

Можем найти $\mathbf{u}$ $\Longrightarrow$ можем найти $\dot{\mathbf{u}}$, $\mathbf{u}'$ $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \mathbf{I}\,\dot{\mathbf{u}} + & \mathbf{C}\,\mathbf{u}' & = \mathbf{f} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I}\,\dot{\mathbf{u}} + & \mathrm{d}x\,\mathbf{I}\,\mathbf{u}' & = \mathrm{d}\mathbf{u} \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} \end{vmatrix} \neq 0$$

Определение

Кривые, вдоль которых выполняется характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} \end{vmatrix} = 0$ — характеристики уравнения (7).

Т.е. на характеристиках $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{\gamma} = k_i(x,t)$, где k_i — собственные числа $\mathbf{C}$.

На характеристиках система должны быть разрешима:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} & \mathbf{f} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} & \mathrm{d}\mathbf{u} \end{bmatrix}$$

— соотношения на характеристиках.

Система N линейных уравнений первого порядка: гиперболичность

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t,x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t,x) \tag{7}$$

Определение

Кривые, вдоль которых выполняется характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} \end{vmatrix} = 0$, — характеристики уравнения (7).

Т.е., на характеристиках $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k_i(x,t)$, где k_i — собственные числа $\mathbf{C}$.

Определение

Если все собственные числа матрицы $\mathbf{C}$ вещественны и не являются кратными ни в одной точке рассматриваемой области (т.е. имеется ровно N семейств характеристик), то система называется гиперболической в области.

Волны — решения гиперболических уравнений.

Контрольный вопрос

Что можно сказать о гиперболичности линейного уравнения 1 порядка?

Система N линейных уравнений первого порядка: эллиптичность

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t,x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t,x) \tag{7}$$

Определение

Кривые, вдоль которых выполняется характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathrm{d}t\,\mathbf{I} & \mathrm{d}x\,\mathbf{I} \end{vmatrix} = 0$, — характеристики уравнения (7).

Т.е., на характеристиках $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k_i(x,t)$, где k_i — собственные числа $\mathbf{C}$.

Определение

Если характеристическое уравнение системы не имеет вещественных решений ни в одной точке рассматриваемой области (т.е. характеристик нет), то система называется эллиптической в области.

Гиперболическая система N линейных уравнений первого порядка: выводы

- Начальные условия и краевые условия (в смешанной задаче) не следует задавать на характеристиках — это может приводить к несуществованию или неединственности решения (в зависимости от того, выполнено ли соотношение на характеристике).
- Разрывы распространяются вдоль характеристик.

Линейное уравнение второго порядка

Вопрос о нахождении характеристик и классификации уравнений второго порядка для двух независимых переменных может быть решен сведением уравнения к системе 2 уравнений первого порядка.

Расмотрим его на примере простейшего гиперболического уравнения — одномерного однородного волнового уравнения, для которого метод характеристик чрезычайно эффективен и нагляден.

Одномерное однородное волновое уравнение

Механические системы, которые описывает одномерное волновое уравнение:

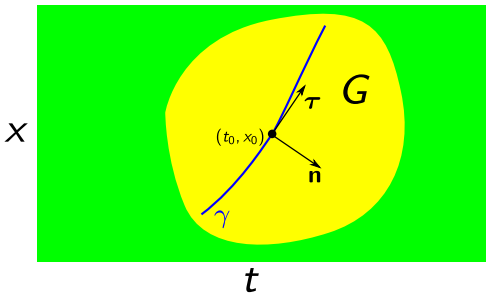
- Поперечные колебания струны: $Tu'' - \rho_0 S\ddot{u} = 0.$
- Продольные колебания стержня: $ESu'' - \rho_0 S\ddot{u} = 0.$

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0$$

Постановка задачи об определении характеристик для одномерного однородного волнового уравнения

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0$$

- ∃ известно, что уравнение имеет решение в некоторой области G. Выберем в этой области точку (t_0, x_0) и проведем через эту точку кривую γ.
- ∃ известны значения u и нормальной производной $\mathbf{n} \cdot \nabla u$ вдоль кривой γ (начальные условия)
- Рассматривается задача Коши — определить u в некоторой окрестности γ.
- Характеристики — кривые γ, такие, что сформулированная задача м.б. неразрешима или неоднозначно разрешима в зависимости от НУ.



Одномерное волновое уравнение: характеристики, гиперболичность

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (u')' - c^{-2}(\dot{u})^{\cdot} = 0, \\ (u')^{\cdot} = (\dot{u})'. \end{cases} \tag{8}$$

Можем найти u $\Longrightarrow$ можем найти $\ddot{u},\ u'', \dot{u}'$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \\ u''\mathrm{d}x + \dot{u}'\mathrm{d}t = \mathrm{d}u' \\ \ddot{u}\,\mathrm{d}t + \dot{u}'\mathrm{d}x = \mathrm{d}\dot{u} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}t \\ 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\mathcal{D} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c^2\,\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - ct = \mathrm{const} = \phi_- \\ x + ct = \mathrm{const} = \phi_+ \end{array}\right. .$$

Имеется 2 семейства характеристик: волновое уравнение — гиперболическое.

Одномерное волновое уравнение: соотношения на характеристиках

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (u')' - c^{-2}(\dot{u})^{\cdot} = 0, \\ (u')^{\cdot} = (\dot{u})'. \end{cases} \tag{8}$$

Можем найти u $\Longrightarrow$ можем найти $\ddot{u},\ u'', \dot{u}'$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \\ u''\mathrm{d}x + \dot{u}'\mathrm{d}t = \mathrm{d}u' \\ \ddot{u}\,\mathrm{d}t + \dot{u}'\mathrm{d}x = \mathrm{d}\dot{u} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}t \\ 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\mathcal{D} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c^2\,\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - ct = \mathrm{const} = \phi_- \\ x + ct = \mathrm{const} = \phi_+ \end{array}\right. .$$

На характеристиках система должны быть разрешима:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}t \\ 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 & 0 \\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}u' \\ 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x & \mathrm{d}\dot{u} \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\dot{u} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}u'$$

$$\underset{\mathrm{d}x = \pm c\,\mathrm{d}t}{\Longleftrightarrow} \quad \mathrm{d}\dot{u} = \pm c\,\mathrm{d}u' \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} u' - c^{-1}\dot{u} = \mathrm{const}, \\ u' + c^{-1}\dot{u} = \mathrm{const}\,. \end{array}\right.$$

— соотношения на характеристиках, где система 2го порядка сводится к одному из уравнений 1го порядка.

Одномерное волновое уравнение: общее решение

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (u')' - c^{-2}(\dot{u})^{\cdot} = 0, \\ (u')^{\cdot} = (\dot{u})'. \end{cases} \tag{8}$$

Можем найти u $\Longrightarrow$ можем найти $\ddot{u},\ u'', \dot{u}'$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \\ u''\mathrm{d}x + \dot{u}'\mathrm{d}t = \mathrm{d}u' \\ \ddot{u}\,\mathrm{d}t + \dot{u}'\mathrm{d}x = \mathrm{d}\dot{u} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}t \\ 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\mathcal{D} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c^2\,\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x - ct = \mathrm{const} = \phi_- \\ x + ct = \mathrm{const} = \phi_+ \end{bmatrix}.$$

На характеристиках PDE (8) упрощается, рассмотрим его в новых переменных $u(t, x) = u(\phi_+, \phi_-)$:

$$\dot{u} = u_{\phi_+}\phi_{+_t} + u_{\phi_-}\phi_{-_t} = c(u_{\phi_+} - u_{\phi_-}), \quad u' = u_{\phi_+}\phi_{+_x} + u_{\phi_-}\phi_{-_x} = u_{\phi_+} + u_{\phi_-},$$
$$\ddot{u} = c^2(u_{\phi_+\phi_+} - 2u_{\phi_+\phi_-} + u_{\phi_-\phi_-}), \quad u'' = u_{\phi_+\phi_+} + 2u_{\phi_+\phi_-} + u_{\phi_-\phi_-}.$$

Подставляя в PDE (8) и интегрируя, получим решение Даламбера:

$$u_{\phi_+\phi_-} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u = \Psi_-(x - ct) + \Psi_+(x + ct).$$

Здесь $\Psi_\pm$ — произвольные функции (формы волн или просто волны), $\phi_\pm$ — фазы, c — фазовая скорость волны (скорость движения точки $x = X(t)$ с постоянной фазой):
$X(t) \pm ct = \mathrm{const} \quad \Longrightarrow \quad \dot{X} = \mp c.$

Одномерное волновое уравнение: соотношения на характеристиках

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (u')' - c^{-2}(\dot{u})^{\cdot} = 0, \\ (u')^{\cdot} = (\dot{u})'. \end{cases} \tag{8}$$

Можем найти u $\Longrightarrow$ можем найти $\ddot{u},\ u'', \dot{u}'$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \\ u''\mathrm{d}x + \dot{u}'\mathrm{d}t = \mathrm{d}u' \\ \ddot{u}\,\mathrm{d}t + \dot{u}'\mathrm{d}x = \mathrm{d}\dot{u} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}t \\ 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\mathcal{D} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c^2\,\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x - ct = \mathrm{const} = \phi_- \\ x + ct = \mathrm{const} = \phi_+ \end{bmatrix}.$$

На характеристиках система должны быть разрешима:

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}t \\ 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 & 0 \\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}u' \\ 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x & \mathrm{d}\dot{u} \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\dot{u} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}u'$$

$$\underset{\mathrm{d}x = \pm c\,\mathrm{d}t}{\Longleftrightarrow} \quad \mathrm{d}\dot{u} = \pm c\,\mathrm{d}u' \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} u' - c^{-1}\dot{u} = \mathrm{const} = 2\Psi'_-, \\ u' + c^{-1}\dot{u} = \mathrm{const} = 2\Psi'_+. \end{bmatrix}$$

— соотношения на характеристиках, где система 2го порядка сводится к одному из уравнений 1го порядка.

Альтернативный подход для волнового уравнения: факторизация дифференциального оператора

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + c^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - c^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} u = u_- + u_+, \\ u'_- + c^{-1}\dot{u}_- = 0, \\ u'_+ - c^{-1}\dot{u}_+ = 0. \end{cases}$$

Т.е., общее решение u волнового уравнения — сумма общих решений u_- и u_+ односторонних волновых уравнений, для которых характеристическая система имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \pm c^{-1},$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 1.$$

Характеристики односторонних волновых уравнений — кривые, удовлетворяющие ODE $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm c \iff x \mp ct = \mathrm{const}$:

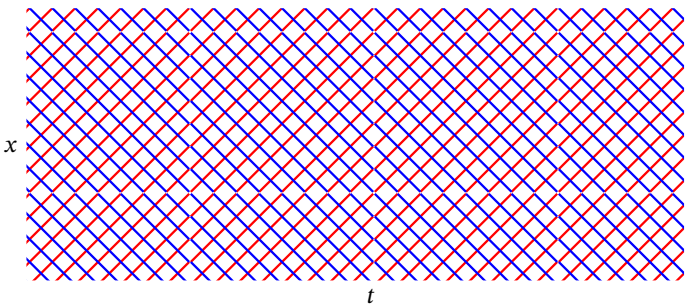
$$x - ct = \mathrm{const},$$
$$x + ct = \mathrm{const}\,.$$

Соотношения на характеристиках:

$$\mathrm{d}u\big|_{x \mp ct = \mathrm{const}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} u_- = \Psi_-(x - ct), \\ u_+ = \Psi_+(x + ct). \end{matrix}$$

Одномерное волновое уравнение: метод характеристик

- Рассматриваем поведение решения в плоскости (t, x).
- Через каждую точку плоскости проходят две характеристики, на которых фазы $\phi_- = x - ct$ и $\phi_+ = x + ct$ постоянны.
- В каждую точку возмущение приходит по характеристикам в виде двух волн $\Psi_-(\phi_-)$ и $\Psi_+(\phi_+)$ (бегущих “направо” и “налево” соответственно) неизменные вдоль характеристик.
- В каждой точки решение равно сумме волн: $u = \Psi_-(\phi_-) + \Psi_+(\phi_+)$.
- Вдоль характеристик решение (сумма волн) удовлетворяет соотношению на характеристике ($u' - c^{-1}\dot{u} = \text{const} = 2\Psi'_-$, $u' + c^{-1}\dot{u} = \text{const} = 2\Psi'_+$).



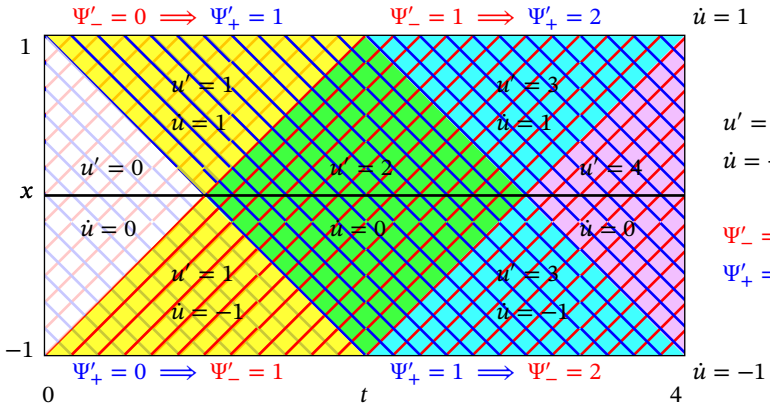
Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах



1. На интервале $x \in [-1, 1]$ для всех $t > 0$ найти решение уравнения
$$u'' - \ddot{u} = 0,$$
удовлетворяющее нулевым начальным условиям при $t = 0$ и краевым условиям при $t > 0$
$$\dot{u}(\pm 1, t) = \pm 1$$
(растяжение стержня кинематическим нагружением).
2. На интервале $x \in [-1, 1]$ для всех $t > 0$ найти решение уравнения
$$u'' - \ddot{u} = 0,$$
удовлетворяющее нулевым начальным условиям при $t = 0$ и краевым условиям при $t > 0$
$$u'(\pm 1, t) = 1$$
(растяжение стержня силовым нагружением).

Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: кинематическое нагружение





$u' = \Psi'_- + \Psi'_+$

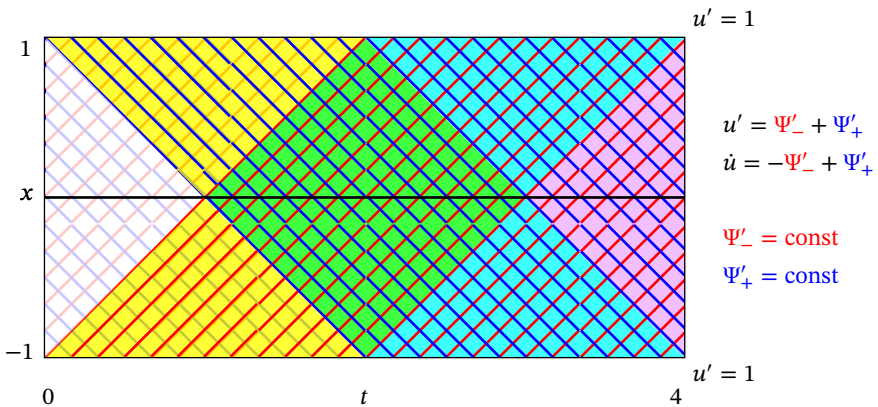
$\dot{u} = -\Psi'_- + \Psi'_+$

$\Psi'_- = \text{const}$

$\Psi'_+ = \text{const}$

Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: силовое нагружение





$u' = \Psi'_- + \Psi'_+$

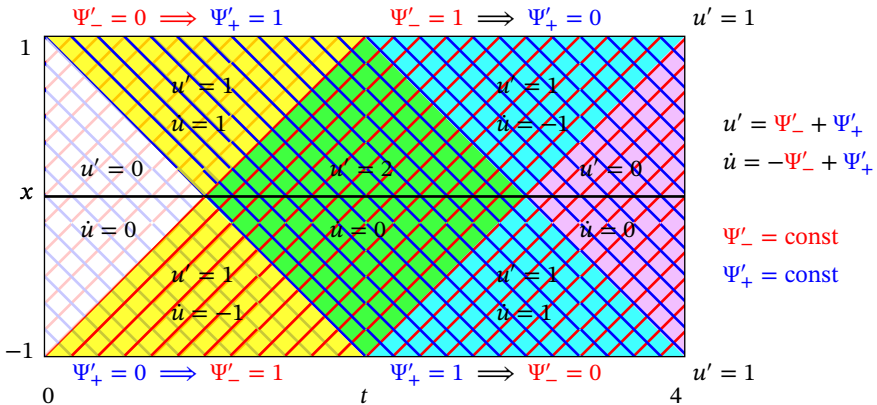
$\dot{u} = -\Psi'_- + \Psi'_+$

$\Psi'_- = \text{const}$

$\Psi'_+ = \text{const}$

Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: силовое нагружение





$u' = \Psi'_- + \Psi'_+$

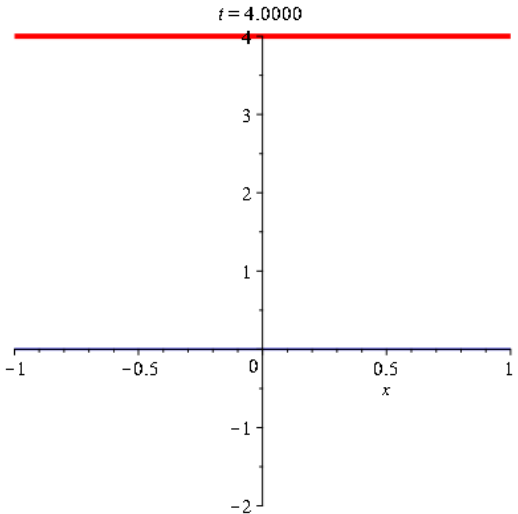
$\dot{u} = -\Psi'_- + \Psi'_+$

$\Psi'_- = \text{const}$

$\Psi'_+ = \text{const}$

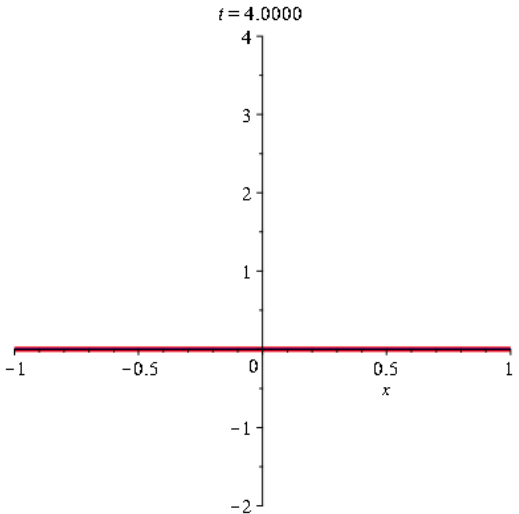
Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: кинематическое нагружение

Деформация, скорость.



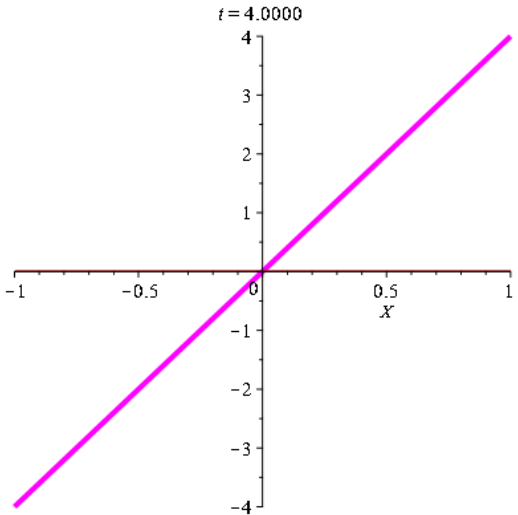
Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: силовое нагружение

Деформация, скорость.



Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: перемещения

Кинематическое и силовое нагружение.



Парадокс исчезновения волнового процесса

- На интервале $x \in [-1, 1]$ для всех $t > 0$ найти решение уравнения

$$u'' - \ddot{u} = 0,$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям при $t = 0$ и краевым условиям при $t > 0$

$$u'(\pm 1, t) = H(4 - t)$$

(растяжение стержня силовым нагружением).

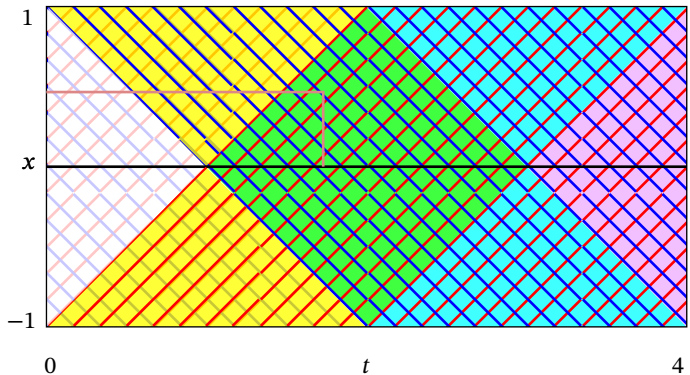


Е.Е. Павловская, Ю.В. Петров.
О некоторых особенностях решения динамических задач теории упругости
Известия РАН, МТТ, №4, 2002, с. 39–45.

Растяжение конечного стержня, нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: перемещения

Как определить перемещения?

$$u = \int u' \, \mathrm{d}x = \int \dot{u} \, \mathrm{d}t$$



Задачи

Найти характеристики и условия на характеристиках для

1. системы уравнений Коши-Римана

$$u_x - v_y = 0,$$
$$u_y + v_x = 0;$$

2. уравнения Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0;$$

3. уравнения Клейна-Гордона

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} - ku = 0.$$

1. Метод характеристик для гиперболических уравнений
2. Необходимые сведения из математического анализа
3. Начальные сведения об обобщенных функциях
4. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
5. Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
6. Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
7. Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
8. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
9. Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
10. Метод стационарной фазы
11. Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
12. Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
13. Уравнения Лапласа (Пуассона)
14. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$
15. Уравнения эластодинамики; P и S волны
16. Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

Литература к лекции


В.С. Владимиров.
Уравнения математической физики.
М., Наука, …


А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин
Элементы теории функций и функционального анализа.
М., Наука, …

Локально-интегрируемые функции

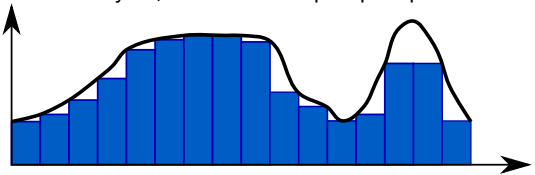
- Одним из важнейших понятий в классической матфизике является понятие локально интегрируемой функции.
- Требование локальной интегрируемости связано с необходимостью иметь возможность вычислить, сколько физической величины (например, объема, массы, количества движения, энергии и т.д.) находится в заданной ограниченной области из $\mathbb{R}^n$.
- В современной матфизике интегрируемость функции понимается в смысле Лебега …
- …поскольку классический интеграл Римана оказался малопригодным для потребностей матфизики.
- Причина в том, что многие встречающиеся в приложениях функции оказываются неинтегрируемыми (например, любая неограниченная функция неинтегрируема по Риману).

Теория меры и интеграла Лебега

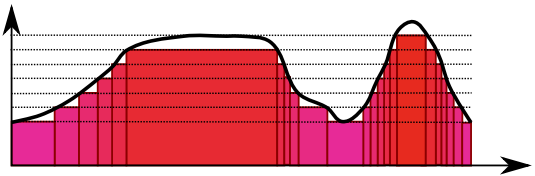
- Интеграл Лебега — это обобщение интеграла Римана на более широкий класс функций.
- Все функции, определённые на конечном отрезке числовой прямой и интегрируемые по Риману, являются также интегрируемыми по Лебегу, причём в этом случае оба интеграла равны. Однако существует большой класс функций, определённых на отрезке и интегрируемых по Лебегу, но неинтегрируемых по Риману. Также интеграл Лебега может иметь смысл для функций, заданных на произвольных абстрактных множествах.
- Мера Лебега — понятие, обобщающее понятия длины, площади, объёма и т.д. (меры Жордана в $\mathbb{R}^n$) как для абстрактных множеств, там и для подмножеств $\mathbb{R}^n$, неизмеримых по Жордану.

Теория интегрирования Лебега

- Сначала строится теория меры Лебега (которая определена на измеримых множествах), а потом — теория интегрирования, применимая к измеримым функциям.
- Идея построения интеграла Лебега состоит в том, что вместо разбиения области определения подынтегральной функции на части и составления потом интегральной суммы из значений функции на этих частях, на интервалы разбивают её область значений, а затем суммируют с соответствующими весами меры прообразов этих интервалов.



$$\sum_{k=1}^{N} F(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$



$$\sum_{k=1}^{N} y_k \, \mu\{x \in X : \; y_k < F(x) \le y_{k+1})\}$$

- Современная теория вероятностей является теорией меры и интеграла Лебега в специальном случае, когда мера универсального множества равна единице.

Альтернативный подход

- Интеграл Лебега в $\mathbb{R}^n$ вводится как обобщение понятия интеграла Римана.
- Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ вводится как интеграл от характеристической функции множества.

Такой подход позволяет быстро ввести необходимые для матфизики понятия.



В.С. Владимиров.
Уравнения математической физики.
М., Наука, …

Интеграл Лебега: множества меры нуль

Определение

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль $\iff \forall \epsilon > 0$ оно может быть покрыто не более чем счетной системой шаров суммарного объема $< \epsilon$.

Из этого определения вытекает, что всякое подмножество множества меры нуль имеет меру нуль и объединение не более чем счетного числа множеств меры нуль также имеет меру нуль. Например, всякое счетное множество и всякая кусочно-гладкая поверхность имеют меру нуль.

Определение

Некоторое свойство выполняется почти везде в области $G \in \mathbb{R}^n$, если множество точек области G, которые не обладают этим свойством, имеет меру нуль.

Интеграл Лебега: измеримые функции и множества

Далее считаем, что все функции заданы во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и почти везде конечны.

Определение

Функция называется измеримой, если она совпадает почти везде с пределом почти везде сходящейся последовательности кусочно-непрерывных функций.

f, g — измеримы $\Longrightarrow f+g,\ fg,\ \max(f,g)$ etc измеримы.

Определение

Множество $A \in \mathbb{R}^n$ называется измеримым, если его характеристическая функция $\chi_A(\mathbf{x})$ измерима.

Неизмеримые функции (и множества) устроены весьма неправильно, и ни одна из них не построена в явном виде; можно только теоретически доказать их существование, используя так называемую аксиому выбора. Это говорит о том, что все функции и множества, которые нам могут встретиться, будут измеримы. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, не оговаривая этого каждый раз, что все рассматриваемые множества измеримы, а функции измеримы и почти везде конечны.

Пример неизмеримого множества — множество Витали.

Пример неизмеримого множества — множество Витали

Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$ на отрезке $[0,\ 1]$: $x \sim y$ если разница $x - y$ рациональна. Это отношение эквивалентности разбивает интервал $[0,\ 1]$ на классы эквивалентности, каждый из которых имеет счётную мощность, но их количество имеет мощность континуума. Далее, из каждого класса эквивалентности выберем по представителю — одной точке.

Аксиома выбора

Для всякого семейства непустых множеств существует функция, которая каждому множеству семейства сопоставляет один из элементов этого множества.

Тогда полученное множество E представителей будет неизмеримым.

Действительно, если сдвинуть E счётное число раз на все рациональные числа из интервала $[-1, 1]$, то объединение будет содержать весь отрезок $[0, 1]$, но при этом оно будет содержаться в отрезке $[-1, 2]$. При этом «сдвинутые копии» множества E не будут пересекаться друг с другом, что непосредственно следует из построения $\sim$ и E.

$\supset E$ — измеримо (предполагаем что, мера конгруэнтных множеств одинакова):

- Мера E ноль. Тогда мера $[0, 1]$ ноль (счётное объединение множеств меры нуль).
- Мера E — положительна. Тогда мера $[-1, 2]$ бесконечна (счётное объединение множеств одинаковой ненулевой меры).

Интеграл Лебега от неотрицательной функции по $\mathbb{R}^n$

Определение

Функция $\phi(\mathbf{x})$ называется финитной, если $\phi(\mathbf{x}) \equiv 0$ при $|\mathbf{x}| > R$ для некоторого R.

Определение

Пусть неотрицательная измеримая функция $f(\mathbf{x})$ совпадает почти везде с пределом неубывающей последовательности финитных кусочно-непрерывных функций $f_k(\mathbf{x})$ с ограниченной последовательностью интегралов (Римана) $\int f_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$. Предел неубывающей ограниченной последовательности этих интегралов называется интегралом Лебега функции f. Функция f в этом случае называется интегрируемой по Лебегу или суммируемой.

Здесь вообще говоря нужно доказать корректность (независимость от f_k).

Теорема

Функция $f(\mathbf{x}) \geq 0$ равна нулю почти везде $\iff \int f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$.

Интеграл Лебега от вещественной функции по $\mathbb{R}^n$

$\exists\, f$ — вещественная:

$$f_+ = \max(f, 0), \qquad f_- = \max(-f, 0);$$
$$f = f_+ - f_-, \qquad |f| = f_+ + f_-.$$

Определение

Вещественная функция f называется интегрируемой по Лебегу (суммируемой) $f \in \mathcal{L}$, если неотрицательные f_+, f_- интегрируемы.

Число

$$\int f \, d\mathbf{x} \equiv \int f_+ \, d\mathbf{x} - \int f_- \, d\mathbf{x}$$

называется интегралом Лебега.

Интеграл Лебега от комплекснозначной функции

Определение

Комплекснозначная функция f называется интегрируемой по Лебегу (суммируемой), если $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ интегрируемы.

Число

$$\int f \, d\mathbf{x} \equiv \int \operatorname{Re} f \, d\mathbf{x} + i \int \operatorname{Im} f \, d\mathbf{x}$$

называется интегралом Лебега.

Интеграл по измеримому множеству

Определение

Функция f интегрируема по Лебегу на измеримом множестве A, $f \in \mathcal{L}(A)$, если $f\chi_A \in \mathcal{L}$.

Число

$$\int_A f\,\mathrm{d}\mathbf{x} \equiv \int f\chi_A\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

называется интегралом Лебега функции f по множеству A.

Число

$$\int_A \mathrm{d}\mathbf{x} \equiv \int \chi_A\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

называется мерой Лебега множества A.

Теорема Лебега

Теорема

Пусть последовательность (измеримых) функций f_k сходится почти везде к функции f. Если существует интегрируемая функция g такая, что $|f_k| \leq g$ почти везде, то f — интегрируема и

$$\lim \int f_k \, d\mathbf{x} = \int f \, d\mathbf{x}.$$

Отсюда в частности следует, что всякая интегрируемая функция интегрируема по любому измеримому множеству A.

Связь с интегралом Римана

Теорема

Если функции $f(\mathbf{x})$ и $|f(\mathbf{x})|$ интегрируемы по Риману (возможно, в несобственном смысле), то они интегрируемы и по Лебегу, и их интегралы в обоих смыслах совпадают.

Пример ограниченной интегрируемой по Лебегу, но не интегрируемой по Риману функции: функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ иррационально,} \\ 1, & x \text{ рационально.} \end{cases}$$

(доказать по определению!)

Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману в $\mathbb{R}^1$

Функция интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, тогда и только тогда, когда на этом отрезке она ограничена, и множество точек, где она разрывна, имеет меру нуль.

Локально интегрируемые функции

Определение

Ограниченная область G' называется подобластью, строго лежащей в области G, если $\bar{G}' \subset G$, при этом пишут $G' \Subset G$.

Определение

Функция f называется локально интегрируемой по Лебегу в области G, $f \in \mathcal{L}_{loc}(G)$, если $f \in \mathcal{L}(G')$ для всех измеримых $G' \Subset G$.

Контрольный вопрос

Является ли локально интегрируемой функция $f(t) = 1/t,\ t \in \mathbb{R}$?

Теорема Фубини

Теорема

Если функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, заданная на $\mathbb{R}^{n+m}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ измерима и существует повторный интеграл Лебега

$$\int \left(\int |f| \, d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y} < \infty,$$

то $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$. Обратно, если $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$, то интегралы Лебега

$$\int f \, d\mathbf{x}, \qquad \int f \, d\mathbf{y}$$

существуют почти везде, интегрируемы по Лебегу, и справедливы равенства

$$\int \left(\int f \, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int f \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} = \int \left(\int f \, d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y}.$$

1. Метод характеристик для гиперболических уравнений
2. Необходимые сведения из математического анализа
3. Начальные сведения об обобщенных функциях
4. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
5. Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
6. Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
7. Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
8. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
9. Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
10. Метод стационарной фазы
11. Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
12. Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
13. Уравнения Лапласа (Пуассона)
14. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$
15. Уравнения эластодинамики; P и S волны
16. Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

Литература к лекции


В.С. Владимиров.
Уравнения математической физики.
М., Наука, …


И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов.
Обобщенные функции и действия над ними.
М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959.

Локально интегрируемые функции как линейные функционалы

$\exists\, \phi$ — гладкая финитная функция: $\phi(\mathbf{x}) \equiv 0$ при $|\mathbf{x}| > R$.

Из теоремы Лебега следует, что любой локально интегрируемой функции на $\mathbb{R}^n$ можно сопоставить линейный функционал, порождаемый локально интегрируемой в $\mathbb{R}^n$ функцией f, действующей по правилу $(f, \phi) = \int f\phi \, \mathrm{d}\mathbf{x}$.

δ-функция Дирака как линейный функционал

Возникает при попытке ввести понятие плотности некоторой физической величины для точечного объекта (например, массы для материальной точки, плотности точечного заряда, точечной силы и т.д.).

Размажем рассматриваемую величину по шару радиуса ϵ и рассмотрим функцию, заданную на $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ и зависящую от параметра ϵ:

$$f_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\pi\epsilon^3}, & |\mathbf{x}| < \epsilon; \\ 0, & |\mathbf{x}| > \epsilon. \end{cases}$$

Примем сначала, что

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} +\infty, & \mathbf{x} = 0; \\ 0, & \mathbf{x} \neq 0. \end{cases}$$

в поточечном смысле. Тогда

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} =$$

δ-функция Дирака как линейный функционал

Возникает при попытке ввести понятие плотности некоторой физической величины для точечного объекта (например, массы для материальной точки, плотности точечного заряда, точечной силы и т.д.).

Размажем рассматриваемую величину по шару радиуса ϵ и рассмотрим функцию, заданную на $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ и зависящую от параметра ϵ:

$$f_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\pi\epsilon^3}, & |\mathbf{x}| < \epsilon; \\ 0, & |\mathbf{x}| > \epsilon. \end{cases}$$

Примем сначала, что

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} +\infty, & \mathbf{x} = 0; \\ 0, & \mathbf{x} \neq 0. \end{cases}$$

в поточечном смысле. Тогда

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \text{ области } \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3.$$

Хотим, чтобы было так:

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \begin{cases} 1, & \mathbf{0} \in \mathcal{V}; \\ 0, & \mathbf{0} \notin \mathcal{V}. \end{cases}$$

Поточечный предел не годится!

δ-функция Дирака как линейный функционал

$$f_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\pi\epsilon^3}, & |\mathbf{x}| < \epsilon; \\ 0, & |\mathbf{x}| > \epsilon. \end{cases}$$

Рассмотрим слабый предел f_ϵ, т.е. для любой достаточно гладкой функции ϕ найдём предел при $\epsilon \to 0$ величины $\int f_\epsilon(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$: Вычисляя, находим:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int f_\epsilon(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \phi(\mathbf{0}).$$

Слабым пределом является функционал $\delta(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(\mathbf{x})$, сопоставляющий каждой непрерывной в $\mathbf{x} = 0$ функции $\phi(\mathbf{x})$ число $\phi(\mathbf{0})$: её значение в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — дельта-функция Дирака. Тогда имеем:

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x})\chi_{\mathcal{V}}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \begin{cases} 1, & \mathbf{0} \in \mathcal{V}; \\ 0, & \mathbf{0} \notin \mathcal{V}. \end{cases}$$

Обобщенные функции: идея

- В связи с тем, например, что решения гиперболических уравнений могут быть разрывными, для решения соответствующих задач матфизики недостаточно локально-интегрируемых функций, а нужны еще так называемые сингулярные функции (например, дельта-функция Дирака).
- При решении конкретных задач сингулярные функции встречаются, как правило, только на начальном или промежуточных этапах. В окончательном ответе сингулярные функции или вовсе отсутствуют или фигурируют под знаком “интеграла” в произведении с какой-либо достаточно хорошей функцией.
- Таким образом, нет прямой необходимости отвечать на вопрос, что такое сингулярная функция сама по себе: нам достаточно понимать как с ней работать.
- Множество всех регулярных (локально интегрируемых функций) и сингулярных функций является множеством обобщенных функций.

Основные и обобщенные функции — определение

- Обобщенные функции (distributions) — линейные непрерывные функционалы на пространстве достаточно “хороших” функций (основных, test functions).
- Чем более жёсткие требования налагаются на основные функции, тем богаче выбор соответствующих обобщенных функций.
- Далее рассматриваем пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ — пространство финитных (тождественно равных нулю за пределами некоторого шара) бесконечно дифференцируемых функций: $\mathcal{D} \subset C^\infty$.
- Последовательность функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ сходится, если они равны нулю за пределами некоторого шара и в нём они C^∞-сходятся.
- Пример основной функции, отличной от нуля, — “шапочка”: $C \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - |\mathbf{x}|^2}\right) H(\epsilon - |\mathbf{x}|)$ (H — функция Хевисайда).

Определение

Обобщенные функции — элементы линейного пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}$.

Основные и обобщенные функции — свойства

- Обобщенная функция f есть функционал на $\mathcal{D}$, т.е. каждой $\phi \in \mathcal{D}$ сопоставляется (комплексное) число (f, ϕ).
- Обобщенная функция f есть линейный функционал на $\mathcal{D}$, т.е.

$$(f, \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) = \alpha_1 (f, \phi_1) + \alpha_2 (f, \phi_2).$$

- Обобщенная функция f есть непрерывный функционал на $\mathcal{D}$, т.е.

$$\varphi_k \to 0 \quad \Longrightarrow \quad (f, \varphi_k) \to 0.$$

- Линейные функционалы на $\mathcal{D}$ не обязаны быть непрерывными. Однако в явном виде не построено ни одного линейного разрывного функционала на $\mathcal{D}$; можно только теоретически доказать их существование, используя аксиому выбора.

Сходимость в $\mathcal{D}'$ и полнота $\mathcal{D}'$

Теорема

Пусть последовательность $f_k \in \mathcal{D}'$ такова, что для каждой $\phi \in \mathcal{D}$ числовая последовательность (f_k, ϕ) сходится при $k \to \infty$. Тогда функционал f на $\mathcal{D}$, определенный равенством

$$(f, \phi) = \lim_{k \to \infty} (f_k, \phi)$$

также является линейным и непрерывным.

Носитель основной функции

Определение

Носителем $\operatorname{supp}\phi$ непрерывной функции называется замыкание множества тех точек, где $\phi \neq 0$.

Совокупность основных функций, носители которых содержатся в данной области $\mathcal{G}$, обозначим через $\mathcal{D}(G)$; таким образом, $\mathcal{D}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathcal{D}$.

Нулевое множество обобщенной функции

Обобщенные функции, вообще говоря, не имеют значений в отдельных точках. Тем не менее можно говорить об обращении в нуль $(f = 0)$ обобщенной функции в области.

Определение

Обобщенная функция f обращается в нуль в области $\mathcal{G}$, если $(f, \phi) = 0 \; \forall \; \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$.

Теорема

Обобщенная функция f обращается в нуль в некоторой окрестности каждой точки области $\mathcal{G}$ $\Longleftrightarrow$ f обращается в нуль в области $\mathcal{G}$.

Определение

Объединение всех окрестностей, где $f = 0$, образует открытое множество $\mathcal{O}_f$ которое называется нулевым множеством обобщенной функции f и представляет собой наибольшее открытое множество, где $f = 0$.

Носитель обобщенной функции

Определение

Носителем $\operatorname{supp} f$ называется $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}_f$.

Определение

Если $\operatorname{supp} f$ — ограниченное множество, то обобщенная функция f называется финитной.

Регулярные обобщенные функции

Простейшим примером обобщенной функции является функционал, порождаемый локально интегрируемой в $\mathbb{R}^n$ функцией f: $(f, \phi) = \int f\phi \, \mathrm{d}\mathbf{x}$.

Теорема (лемма дю Буа-Реймона)

Для того чтобы локально интегрируемая в $\mathcal{G}$ функция $f(x)$ обращалась в нуль в области $\mathcal{G}$ в смысле обобщенных функций, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = 0$ почти везде в $\mathcal{G}$.

Доказательство.

Достаточность очевидна, необходимость доказывается разложением по локальной тригонометрической системе для шара, содержащегося в окрестности выбранной точки области □

Всякая локально интегрируемая функция определяет регулярную обобщенную функцию. Из теоремы следует, что если регулярные обобщенные функции равны в смысле обобщенных функций, то они равны почти везде как локально-интегрируемые. Поэтому мы будем отождествлять локально интегрируемую функцию $f(x)$ и порождаемую ею обобщенную функцию.

Сингулярные обобщенные функции

Сингулярную обобщенную функцию нельзя отождествить ни с какой локально интегрируемой функцией.

Примеры.

- Дельта-функция Дирака $\delta(\mathbf{x})$;
- $\mathrm{VP}\,\frac{1}{t} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$: $\left(\mathrm{VP}\,\frac{1}{t}, \phi\right) = \mathrm{VP}\int \frac{\phi(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ — интеграл в смысле главного значения.

Линейная замена переменных в обобщенных функциях из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

$\supset$ f — локально интегрируемая, $t = A\tau + b$, $A \neq 0$ — неособенное линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^1$ на себя. Тогда:

$$\big(f(A\tau + b), \phi\big) = \int_{\mathbb{R}} f(A\tau + b)\phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{1}{|A|}\int_{\mathbb{R}} f(t)\phi\big(A^{-1}(t-b)\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{|A|}\Big(f, \phi\big(A^{-1}(t-b)\big)\Big)$$

$\supset$ $f \in \mathcal{D}'$:

Определение

$$\big(f(At + b), \phi\big) \equiv \frac{1}{|A|}\Big(f, \phi\big(A^{-1}(t-b)\big)\Big)$$

Линейная замена переменных в обобщенных функциях из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$\exists\, f$ — локально интегрируемая, $\mathbf{x} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{b},\ \det\mathbf{A} \neq 0$ — неособенное линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ на себя. Тогда:

$$\big(f(\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{b}),\phi\big) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{b})\phi(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \\ = \frac{1}{|\det\mathbf{A}|}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\phi\big(\mathbf{A}^{-1}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{b})\big)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{|\det\mathbf{A}|}\Big(f,\phi\big(\mathbf{A}^{-1}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{b})\big)\Big)$$

$\exists\, f \in \mathcal{D}'$:

Определение

$$\big(f(\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{b}),\phi\big) \equiv \frac{1}{|\det\mathbf{A}|}\Big(f,\phi\big(\mathbf{A}^{-1}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{b})\big)\Big)$$

Линейная замена переменных в обобщенных функциях из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: частные случаи

- $\big(f(c\mathbf{x}), \phi\big) = \frac{1}{|c|^n}\big(f, \phi(c^{-1}\mathbf{x})\big)$
- $\big(f(\mathbf{x}+\mathbf{b}), \phi\big) = \big(f, \phi(\mathbf{x}-\mathbf{b})\big)$
- $\big(\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \phi\big) = \big(\delta(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0)\big) = \phi(x_0)$
- $\delta(c\mathbf{x}) = \frac{1}{|c|^n}\delta(\mathbf{x})$
- $[\delta(t)] = \text{секунда}^{-1}$, если t — время.

Умножение обобщенных функций

Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую: $\exists\, a(\mathbf{x}) \in C^\infty$:

Определение

$$(af, \phi) \equiv (f, a\phi).$$

Примеры.

- $a(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}) = a(\mathbf{0})\delta(\mathbf{x})$
- $t\,\mathrm{VP}\,\frac{1}{t} = 1$:

$$\left(t\,\mathrm{VP}\,\frac{1}{t}, \phi\right) = \left(\mathrm{VP}\,\frac{1}{t}, t\phi\right) = \mathrm{VP}\int_{\mathbb{R}} \frac{t\phi(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \phi(t)\,\mathrm{d}t = (1, \phi).$$

Умножение обобщенных функций

Операция произведения не допускает распространения на любые обобщённые функции так, чтобы она была ассоциативной, коммутативной и чтобы сужение этой операции на множество непрерывных функций совпадало с обычным произведением:

$$0 = 0 \operatorname{VP} \frac{1}{t} = \big(t\delta(t)\big) \operatorname{VP} \frac{1}{t} = \big(\delta(t)t\big) \operatorname{VP} \frac{1}{t} = \delta(t) \left(t \operatorname{VP} \frac{1}{t}\right) = \delta(t)$$

Дифференцирование обобщённых функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

Для гладких локально-интегрируемых f

$$\int_{\mathbb{R}} Df(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}} f(t)D\phi(t)\,\mathrm{d}t$$

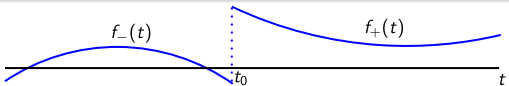
Определение

$$(Df, \phi) = -(f, D\phi)$$

Дифференцирование функции, имеющей разрыв 1 рода

Задача

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_-(t), & t < t_0, \\ f_+(t), & t > t_0; \end{bmatrix} \quad f_-(t_0) \neq f_+(t_0), \quad f_\pm \in C^1. \text{ Вычислить } f'.$$



$\{f'\} \equiv \begin{bmatrix} f'_-(t), & t < t_0, \\ f'_+(t), & t > t_0; \end{bmatrix}$ — классическая производная $f(t)$, $[f] \equiv f_+(t_0) - f_-(t_0)$ — величина скачка.

$$(f', \phi) = -(f, \phi') = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\phi'(t)\,\mathrm{d}t = -\left(\int_{-\infty}^{t_0} + \int_{t_0}^{\infty}\right) f(t)\phi'(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \big(f(t_0 + 0) - f(t_0 - 0)\big)\phi(t_0) + \int_{\mathbb{R}} \{f'\}(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \big([f]\delta(t - t_0) + \{f'\}, \phi\big).$$

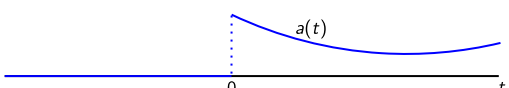
Следствие

$H' = \delta$.

Дифференцирование функции, имеющей разрыв 1 рода

Задача

$f(t) = a(t)H(t),\ a \in C^1$ Вычислить f'.



Свойства $\delta'(t)$

Задача

Доказать равенство: $a(t)\delta'(t) = -a'(0)\delta(t) + a(0)\delta'(t),\ a \in C^1$.

Дифференцирование обобщённых функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Для гладких локально-интегрируемых f

$$\int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})D^\alpha\phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

Определение

$$(D^\alpha f, \phi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\phi)$$

Здесь используются обозначения:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

— мульти-индекс,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n,$$

$$D^\alpha\phi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}\phi(\mathbf{x})}{\partial^{\alpha_1}x_1\partial^{\alpha_2}x_2\dots\partial^{\alpha_n}x_n}$$

— частная производная ϕ порядка $|\alpha|$.

Свойства обобщенных производных

- Если обобщенная функция гладкая, то ее обобщенная производная совпадает с классической производной (прямое следствие определения обобщенной производной)
- Любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема (поскольку основные функции бесконечно дифференцируемы)
- Результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования (поскольку это так для основных функций)

Дифференцирование произведения обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую

Утверждение

Для произведения af, где $a \in C^\infty$, $f \in \mathcal{D}'$, справедлива формула Лейбница дифференцирования произведения. Например, в одномерном случае

$$(af)' = a'f + af'.$$

Доказательство.

$$\big((af)', \phi\big) = -(af, \phi') = -(f, a\phi') = -\big(f, (a\phi)' - a'\phi\big) =$$
$$= -\big(f, (a\phi)'\big) + \big(f, a'\phi\big) = (f', a\phi) + (a'f, \phi) = (a'f + af', \phi)$$

□

$\delta\big(f(t)\big)$

Наводящие соображения:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(\tau)\phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \phi(0)$$

$\exists\ \tau = f(t)$ — монотонная бесконечно дифференцируемая функция, имеющая единственный простой корень при $t = t_0$:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta\big(f(t)\big)\phi\big(f(t)\big)|f'(t)|\,\mathrm{d}t = \phi(0)$$

$\exists\ \psi(t) = \phi\big(f(t)\big)|f'(t)|$:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta\big(f(t)\big)\psi(t)\,\mathrm{d}t = \phi(0) = \frac{\psi(t_0)}{|f'(t_0)|}.$$

$\delta(f(t))$

Определение

$\exists\, t_i$ — все корни $f(t)$ — простые: $f(t_i) = 0,\ f'(t_i) \neq 0$. Тогда

$$\Big(\delta(f(t)), \phi\Big) = \sum_i \frac{\phi(t_i)}{|f'(t_i)|},$$

т.е.

$$\delta(f(t)) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t - t_i).$$

Это определение является естественным обобщением на нелинейный случай формулы для линейной замены переменных в обобщенных функциях.

Пример

$\delta(\sin t) = \sum_i \delta(t - \pi i).$

$\delta^{(n)}\big(f(t)\big)$

Наводящие соображения:

$$\delta\big(f(t)\big) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i) \quad \Longrightarrow \quad \delta'\big(f(t)\big)f'(t) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\frac{\mathrm{d}\delta(t-t_i)}{\mathrm{d}t}$$

$$\Longrightarrow \quad \delta'\big(f(t)\big) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\frac{1}{f'(t)}\frac{\mathrm{d}\delta(t-t_i)}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad \delta'\big(f(t)\big) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\left(\frac{1}{f'(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\delta(t-t_i).$$

Определение

$\exists\, t_i$ — все корни $f(t)$ — простые: $f(t_i) = 0,\ f'(t_i) \neq 0$. Тогда

$$\delta^{(n)}\big(f(t)\big) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\left(\frac{1}{f'(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n \delta(t-t_i). \tag{9}$$

Контрольный вопрос

Можно ли заменить в формуле (9) оператор $\left(\frac{1}{f'(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$ на $\left(\frac{1}{f'(t_i)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$?

Структура пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'$

Теорема

Любая обобщенная функция является конечной суммой производных некоторого порядка в обобщенном смысле от некоторых непрерывных функций.

Формулы Сохоцкого

Утверждение

$$\frac{1}{t \pm i0} = \mp i\pi\delta(t) + \operatorname{VP}\frac{1}{t}$$

Доказательство.

$\exists\, \phi(t) \equiv 0$ при $|t| > R$:

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int \frac{\phi(t)}{t \pm i\epsilon}\,\mathrm{d}t = \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-R}^{R} \frac{t \mp i\epsilon}{t^2+\epsilon^2}\phi(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-R}^{R} \frac{t \mp i\epsilon}{t^2+\epsilon^2}\phi(0)\,\mathrm{d}t + \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-R}^{R} \frac{t \mp i\epsilon}{t^2+\epsilon^2}\big(\phi(t)-\phi(0)\big)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \mp 2i\phi(0)\lim_{\epsilon\to+0}\operatorname{arctg}\frac{R}{\epsilon} + \int_{-R}^{R}\frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \mp i\pi\phi(0) + \operatorname{VP}\int_{\mathbb{R}}\frac{\phi(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \operatorname{VP}\int_{\mathbb{R}}\frac{\phi(0)}{t}\,\mathrm{d}t = \mp i\pi\phi(0) + \operatorname{VP}\int_{\mathbb{R}}\frac{\phi(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

□

Задачи

1. $\beth\ f(t) = a(t)H(t),\ a \in C^2$. Вычислить f''.
2. Вычислить обобщенные производные порядка 1, 2, 3 функций $f_1(t) = |t| \sin t$, $f_2(t) = |t| \cos t$.
3. Вычислить обобщенную производную $f^{(n)}$ порядка n функции $f(t) = \operatorname{sign}(\sin t)$.

1. Метод характеристик для гиперболических уравнений
2. Необходимые сведения из математического анализа
3. Начальные сведения об обобщенных функциях
4. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
5. Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
6. Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
7. Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
8. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
9. Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
10. Метод стационарной фазы
11. Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
12. Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
13. Уравнения Лапласа (Пуассона)
14. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$
15. Уравнения эластодинамики; P и S волны
16. Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

Прямое произведение обобщенных функций

$\exists\ f(\mathbf{x}),\ g(\mathbf{y})$ — локально интегрируемые функции в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Функция $f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})$ также будет локально интегрируемой в $\mathbb{R}^{m+n}$. Она определяет (регулярную) обобщенную функцию, действующую на основные функции ϕ по формулам

$$(f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}),\phi) \equiv \iint f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y} =$$

$$= \int f(\mathbf{x}) \int g(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\,d\mathbf{x} = \big(f(\mathbf{x}),(g(\mathbf{y}),\phi)\big) =$$

$$= (g(\mathbf{y})f(\mathbf{x}),\phi) = \iint g(\mathbf{y})f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y} =$$

$$= \int g(\mathbf{y}) \int f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y} = \big(g(\mathbf{y}),(f(\mathbf{x}),\phi)\big)$$

Прямое произведение обобщенных функций

Определение

Прямым произведением обобщенных функций $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{y})$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ соответственно называется обобщенная функция $f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$, действующая по правилу $\big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big) = \Big(f(\mathbf{x}), \big(g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)\Big)$.

Теорема (корректность определения)

Функционал, определяемый формулой $\big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big) = \Big(f(\mathbf{x}), \big(g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)\Big)$, линейный и непрерывный.

Свойства прямого произведения обобщенных функций

- Коммутативность
$$f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{y}) \cdot f(\mathbf{x})$$
(для $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{N} u_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{y})$ очевидна, в общем случае следует из того, что множество таких функций всюду плотно в $\mathcal{D}$)
- Ассоциативность
$$\big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})\big) \cdot h(\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) \cdot \big(g(\mathbf{y}) \cdot h(\mathbf{z})\big)$$
- Умножение прямого произведения. $\exists\, a(\mathbf{x}) \in C^\infty$:
$$a(\mathbf{x})\big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})\big) = \big(a(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\big) \cdot g(\mathbf{y})$$
- Дифференцирование прямого произведения
$$D^\alpha_{\mathbf{x}}\big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})\big) = \big(D^\alpha_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})\big) \cdot g(\mathbf{y})$$

Прямое произведение: пример

Обобщенная функция $f(x) \cdot 1(y)$, которая не зависит от y:

$$\big(f(x) \cdot 1(y), \phi\big) = \int_{\mathbb{R}} \big(f(x), \phi(x, y)\big)\, \mathrm{d}y.$$

Здесь $x, y \in \mathbb{R}$.

Свёртка регулярных обобщённых функций

Определение

$\exists\, f(\mathbf{x}),\ g(\mathbf{x})$ — локально интегрируемые функции в $\mathbb{R}^n$ такие, что функция $\int |g(\mathbf{y})f(\mathbf{x}-\mathbf{y})|\,d\mathbf{y}$ также локально интегрируема. Свёрткой $f * g$ называется функция

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{y})f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = (g * f)(\mathbf{x})$$

Она стандартным образом определяет (регулярную) обобщенную функцию:

$$(f * g, \phi) = \int (f * g)(\boldsymbol{\xi})\phi(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi} =$$

$$= \int \left(\int g(\mathbf{y})f(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \right) \phi(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi} =$$

$$= \int g(\mathbf{y}) \left(\int f(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{y})\phi(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi} \right) d\mathbf{y} =$$

$$= \int g(\mathbf{y}) \left(\int f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\,d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y} =$$

$$= \int \int g(\mathbf{y})f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}$$

Свёртка (в классическом смысле) существует не всегда!

Некоторые достаточные условия существования свёртки:

- Одна из функций финитна;
- Обе функции обращаются в нуль при $x < 0$ $(n = 1)$;
- Обе функции интегрируемы в $\mathbb{R}^n$.

Свёртка обобщённых функций: идея определения

Для локально интегрируемых функций:

$$(f * g, \phi) = \big(f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})\big),$$

Свёртка обобщённых функций: идея определения

Для локально интегрируемых функций:

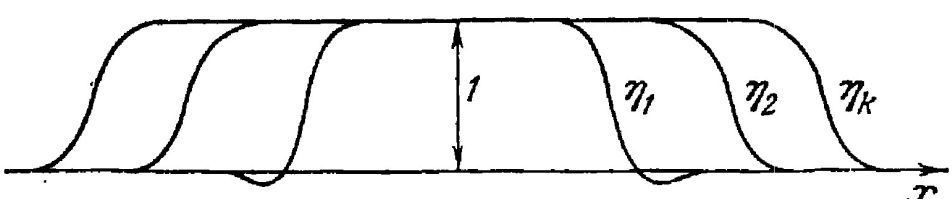
$$(f * g, \phi) = \lim_{k\to\infty} \big(f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big) \quad \forall \eta_k,$$

где $\eta_k \twoheadrightarrow 1$ (сходится к единице) в $\mathcal{D}$:

- $\forall$ замкнутого и ограниченного множества $\mathcal{K}$ найдется N: $\eta_k = 1$ при $k \geq N$, $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$;
- η_k равномерно ограничены со всеми своими производными: $|D^\alpha \eta_k| < C_\alpha$.

Для обобщённых функций:

$$(f * g, \phi) = \lim_{k\to\infty} \big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big) \quad \forall \eta_k$$



Свёртка обобщённых функций: определение и свойства

Определение

Пусть пара обобщенных функций $f(\mathbf{x}),\ g(\mathbf{y})$ из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ такова, что их прямое произведение $f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})$ допускает продолжение на функции вида $\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})$, а именно $\forall \phi \in \mathcal{D}$, $\forall \eta_k \twoheadrightarrow 1$ $\exists$ предел числовой последовательности

$$\lim_{k\to\infty} \big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big),$$

не зависящий от выбора η_k. Свёрткой $f * g$ называется функционал

$$(f * g, \phi) = \lim_{k\to\infty} \big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big).$$

Свойства:

- Линейность;
- Коммутативность (следствие коммутативности прямого произведения).

Свёртка с δ

Утверждение

Свертка любой обобщенной функции f с δ-функцией существует и равна f:

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

Доказательство.

$$\lim_{k\to\infty} \big(f(\mathbf{x})\cdot\delta(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big) = \lim_{k\to\infty} \Big(f(\mathbf{x})\big(\delta(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big)\Big) = \lim_{k\to\infty} \big(f(\mathbf{x}), \eta_k(\mathbf{x},0)\phi(\mathbf{x})\big) = (f,\phi)$$

□

Дифференцирование свёртки

Теорема

Если свертка $f * g$ существует, то существуют свертки $(D^\alpha f) * g$ и $f * (D^\alpha g)$, причем

$$D^\alpha f * g = D^\alpha (f * g) = f * D^\alpha g$$

Доказательство.

Достаточно доказать $\forall\, D_j$:

$$\exists\, \forall \eta_k \twoheadrightarrow 1 \implies \eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_k} \twoheadrightarrow 1 \quad \Longrightarrow \quad (D_j(f * g), \phi) = -(f * g, D_j \phi) =$$

$$= -\lim_{k\to\infty} \left(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})}{\partial x_j} \right) = -\lim_{k\to\infty} \left(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \frac{\partial \big(\eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big)}{\partial x_j} - \frac{\partial \big(\eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)}{\partial x_j} \phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \Big(D_j f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \Big) + \lim_{k\to\infty} \left(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \left(\eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right) \phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \right) - \lim_{k\to\infty} \Big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k \phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \Big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \Big(D_j f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \Big) + (f * g, \phi) - (f * g, \phi) = \lim_{k\to\infty} \Big(D_j f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \Big) =$$

$$= (D_j f * g, \phi)$$

Второе равенство $f * D_j g = D_j (f * g)$ следует из первого и коммутативности свертки. □

Дифференцирование свёртки

- Существование сверток $(D^\alpha f) * g$ и $f * D^\alpha g$ ($|\alpha| \geq 1$) не достаточно для существования свертки $f * g$ и справедливости равенства $(D^\alpha f) * g = f * D^\alpha g$. Контрольный вопрос: почему?
- Например: $H' * 1 = \delta * 1 = 1$, но $H * 1' = H * 0 = 0$. Контрольный вопрос: что можно сказать про свёртку $H * 1$?
- Операция свертки, вообще говоря, не ассоциативна:

$$(H * \delta') * 1 = H' * 1 = 1,$$
$$H * (\delta' * 1) = H * 0 = 0.$$

Свёртка с $\delta^{(n)}$

Утверждение

Свёртка любой обобщенной функции с $\delta^{(n)}$ существует и равна $f^{(n)}$:

$$f * \delta^{(n)} = \delta^{(n)} * f = f^{(n)}.$$

Доказательство.

Применяем теорему о дифференцировании свёртки к тождеству

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

□

Достаточные условия существования свёртки обобщённых функций

- Одна из функций финитна
- $n = 1$: Обе функции обращаются в нуль при $t < 0$ (в этом случае можно доказать ассоциативность операции свертки).

Задачи

1. Вычислить свёртки: $H(t) * \delta'(t)$, $H(t) * H(t)$, $H(t) * H(-t)$.
2. Упростить выражение $\sin t \cdot \delta\big(\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})\big)$.
3. Вычислить $|\sin t|'' + |\sin t|$.

1. Метод характеристик для гиперболических уравнений
2. Необходимые сведения из математического анализа
3. Начальные сведения об обобщенных функциях
4. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
5. Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
6. Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
7. Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
8. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
9. Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
10. Метод стационарной фазы
11. Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
12. Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
13. Уравнения Лапласа (Пуассона)
14. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$
15. Уравнения эластодинамики; P и S волны
16. Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

Литература к лекции


И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов.
Обобщенные функции и действия над ними.
М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959.


В.С. Владимиров.
Обобщенные функции в математической физике.
М., Наука, 1976.

Обобщенное решение линейных ODE/PDE с постоянными коэффициентами

$$\supset \qquad L(D)u(\mathbf{x}) \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{n} a_\alpha D^\alpha u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \qquad f \in \mathcal{D}'$$

— линейное ODE/PDE порядка n с постоянными коэффициентами.

Определение

Обобщенным решением в области G называется всякая обобщенная функция $u \in \mathcal{D}'$, удовлетворяющая этому уравнению в области G в обобщенном смысле, т.е. для любой $\phi \in \mathcal{D}$:

$$(L(D)u, \phi) = (f, \phi)$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left(u, \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \phi)\right) = (f, \phi)$$

Всякое классическое решение является и обобщенным решением. Всякое гладкое обобщенное решение является классическим решением.

ODE $\dot{u} = 0$

Лемма

$\phi_0 \in \mathcal{D}$ может быть представлена как $\phi_0 = \dot{\phi}_1$, $\phi_1 \in \mathcal{D} \iff \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Доказательство.

$\exists \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t)\,\mathrm{d}t = 0$: $\quad \phi_1(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in \mathcal{D}$

$\exists \phi_0 = \dot{\phi}_1$: $\quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t)\,\mathrm{d}t = \phi_1(t)\big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$ □

ODE $\dot{u} = 0$

Теорема

Общее решение уравнения $\dot{u} = 0$ в классе обобщенных функций — $u = C = \text{const}$.

Доказательство.

$\dot{u} = 0 \iff (\dot{u}, \phi) = (u, -\dot{\phi}) = 0$, т.е. u уже задан на основных функциях, представимых в виде производных.

$\exists\, \phi_1 \in \mathcal{D},\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

$\forall \phi \in \mathcal{D}: \quad \phi(t) = \phi_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t + \phi_0(t)$, где $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t)\,\mathrm{d}t = 0 \implies$

$$(u, \phi) = \underbrace{(u, \phi_1)}_{C} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t + 0 = \int_{-\infty}^{\infty} C\phi(t)\,\mathrm{d}t$$

□

Первообразная обобщенной функции из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

Определение

Первообразной (или неопределенным интегралом) от обобщённой функции $f(t) \in \mathcal{D}'$

$$u = \int f \, \mathrm{d}t$$

называется решение ОДУ

$$\dot{u} = f(t).$$

Первообразная обобщенной функции из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

Теорема

Любая обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{D}'$ имеет единственную с точностью до аддитивной постоянной первообразную.

Доказательство.

$\dot{u} = f \iff \forall \phi \quad (\dot{u}, \phi) = (u, -\dot{\phi}) = (f, \phi)$, т.е. u уже задан на основных функциях, представимых в виде производных.

$\exists\, \phi_1 \in \mathcal{D},\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

$\forall \phi \in \mathcal{D} : \phi(t) = \phi_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t + \phi_0(t)$, где $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad \Longrightarrow$

$$(u, \phi) = \underbrace{(u, \phi_1)}_{C} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t + (u, \phi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} C\phi(t)\,\mathrm{d}t - \left(f, \int_{-\infty}^{t} \phi_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = f \\ \dot{u}_2 = f \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (u_1 - u_2)^{\cdot} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_1 - u_2 = \mathrm{const}$$

□

Фундаментальное решение линейного ODE с постоянными коэффициентами

Определение

Фундаментальным решением $\Phi(t)$ (функцией Грина, функцией влияния) оператора $L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$ (или ODE $L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)u = f$) называется обобщенное решение ODE

$$L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\Phi = \delta(t).$$

Фундаментальное решение очевидно не единственно. Если $\Phi_1(t)$ — фундаментальное решение, то $\Phi_1 + \Phi_0$, где

$$L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\Phi_0 = 0$$

также является фундаментальным решением.

При рассмотрении задач Коши для ODE и гиперболических / параболических PDE нас будут интересовать фундаментальные решения, обладающие свойством $\Phi\big|_{t<0} \equiv 0$.

Фундаментальное решение оператора линейного ОДУ с постоянными коэффициентами

Теорема

Фундаментальным решением оператора линейного ОДУ с постоянными коэффициентами порядка n

$$L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \equiv \frac{d^n}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k}{dt^k},$$

удовлетворяющем условию $\Phi\big|_{t<0} \equiv 0$, является $\Phi(t) = U(t)H(t)$, где $U(t)$ — решение однородного уравнения $LU = 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$U(0) = 0, \quad \dots, \quad U^{(n-2)}(0) = 0, \quad U^{(n-1)}(0) = 1.$$

Доказательство.

$\beth$ $n = 2$:

$$\dot{\Phi}(t) = U(0)\delta(t) + \dot{U}(t)H(t),$$
$$\ddot{\Phi}(t) = U(0)\dot{\delta}(t) + \dot{U}(0)\delta(t) + \ddot{U}(t)H(t)$$

$\Longrightarrow$ $L\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi = \delta(t)$. При $n > 2$ доказательство аналогично. $\square$

Фундаментальное решение оператора линейного ОДУ с постоянными коэффициентами

Теорема

Фундаментальным решением оператора линейного ОДУ с постоянными коэффициентами порядка n

$$L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \equiv \frac{d^n}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k}{dt^k},$$

удовлетворяющем условию $\Phi\big|_{t<0} \equiv 0$, является $\Phi(t) = U(t)H(t)$, где $U(t)$ — решение однородного уравнения $LU = 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$U(0) = 0, \quad \dots, \quad U^{(n-2)}(0) = 0, \quad U^{(n-1)}(0) = 1.$$

Доказательство.

$\beth$ $n = 2$:

$$\dot{\Phi}(t) = \cancel{U(0)\delta(t)} + \dot{U}(t)H(t),$$
$$\ddot{\Phi}(t) = \cancel{U(0)\dot{\delta}(t)} + \dot{U}(0)\delta(t) + \ddot{U}(t)H(t)$$

$\Longrightarrow$ $L\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi = \delta(t)$. При $n > 2$ доказательство аналогично. $\square$

Фундаментальное решение линейного ODE с постоянными коэффициентами

Пример 1

Фундаментальным решением оператора $\frac{d^2}{dt^2} + a^2$ является функция

$$\Phi(t) = H(t)\,\frac{\sin at}{a}.$$

Пример 2

Фундаментальным решением оператора $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + a$ является функция

$$\Phi(t) = H(t)\exp(-at).$$

Обобщенное решение неоднородного линейного ODE с постоянными коэффициентами

Теорема

Пусть $f \in \mathcal{D}'$ такова, что свертка $\Phi * f$ существует в $\mathcal{D}'$. Тогда решение уравнения

$$L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)u = f(t)$$

существует в $\mathcal{D}'$ и дается формулой $u = \Phi * f$.

Это решение единственно в классе тех обобщенных функций из $\mathcal{D}'$ для которых существует свертка с Φ.

Доказательство.

$$L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)(\Phi * f) = \left(L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\Phi\right) * f = \delta * f = f.$$

Для доказательства единственности этого достаточно установить, что соответствующее однородное уравнение $L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\hat{u} = 0$ имеет только нулевое решение. Это так:

$$\hat{u} = \hat{u} * \delta = \hat{u} * L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\Phi = L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\hat{u} * \Phi = 0.$$

□

Обобщенная задача Коши для линейного ODE 2го порядка с постоянными коэффициентами: идея

Задача

$u(t) = u_*(t)H(t),\ u_* \in C^2$. Вычислить $\dot{u}, \ddot{u}$.

$$\dot{u} = u_*(0)\delta(t) + \dot{u}_*(t)H(t),$$
$$\ddot{u} = u_*(0)\dot{\delta}(t) + \dot{u}_*(0)\delta(t) + \ddot{u}_*(t)H(t).$$

Задача Коши для линейного ODE 2го порядка с постоянными коэффициентами

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u_*(t)$:

$$\ddot{u_*} + \omega^2 u_* = f_*(t),$$
$$u_*(0) = u_0, \qquad \dot{u}_*(0) = u_1.$$

Задача Коши для линейного ODE 2го порядка с постоянными коэффициентами

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u_*(t)$:

$$\ddot{u_*} + \omega^2 u_* = f_*(t),$$
$$u_*(0) = u_0, \qquad \dot{u_*}(0) = u_1.$$

Обобщенная задача Коши: $\forall t \in \mathbb{R}$ разыскивается обобщённая функция $u(t) = u_*(t)H(t)$:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = f(t),$$
$$f(t) = f_*(t)H(t) + u_0\dot{\delta}(t) + u_1\delta(t),$$
$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Обобщенная задача Коши является “частным случаем” классической задачи для случая гладкой правой части f_*.

Решение задачи Коши для линейного ODE 2го порядка с постоянными коэффициентами: интеграл Дюамеля

Обобщенная задача Коши: $\forall t \in \mathbb{R}$ разыскивается обобщённая функция $u(t) = u_*(t)H(t)$:

$$\begin{aligned} &\ddot{u} + \omega^2 u = f(t), \\ &f(t) = f_*(t) + u_0\dot{\delta}(t) + u_1\delta(t), \quad f_*|_{t<0} \equiv 0, \\ &u\big|_{t<0} \equiv 0. \end{aligned}$$

Решение обобщенной задачи Коши для ОДУ с постоянными коэффициентами существует (поскольку при $n = 1$ существует свёртка любых двух обобщенных функций, тождественно равных нулю при $t < 0$), единственно и выражается формулой:

$$u = \Phi * f.$$

В частности, в случае гладкой функции f_* решение имеет вид:

$$u(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-\tau) f_*(\tau)\,\mathrm{d}\tau + u_0\cos\omega t + u_1\frac{\sin\omega t}{\omega}.$$

Задача Коши для линейного ODE с постоянными коэффициентами

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u_*(t)$:

$$u_*^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_*^{(k)} \equiv L\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)u_*(t) = f_*(t),$$

$$u_*(0) = u_0, \quad \dots \quad , u_*^{(n-1)}(0) = u_{n-1}.$$

Обобщенная задача Коши: разыскивается обобщённая функция $u(t) = u_*(t)H(t)$:

$$L\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)u(t) = f(t),$$

$$f(t) = f_*(t)H(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t),$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0,$$

$$c_{n-1} = u_0, \quad c_{n-2} = a_{n-1}u_0 + u_1, \quad \dots, \quad c_0 = a_1 u_0 + \dots a_{n-1}u_{n-2} + u_{n-1}.$$

Задачи

1. Сформулировать обобщенную задачу Коши, соответствующую классической задаче Коши для уравнения

$$\ddot{u} + 2\eta\dot{u} + \omega^2 u = f(t),$$
$$u(0) = u_0, \qquad \dot{u}(0) = u_1.$$

1. Метод характеристик для гиперболических уравнений
2. Необходимые сведения из математического анализа
3. Начальные сведения об обобщенных функциях
4. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
5. Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
6. Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
7. Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
8. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
9. Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
10. Метод стационарной фазы
11. Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
12. Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
13. Уравнения Лапласа (Пуассона)
14. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$
15. Уравнения эластодинамики; P и S волны
16. Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Утверждение

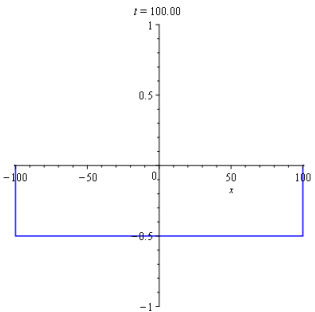
Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct-|x|) = -\frac{c}{2}\Big(H(x)H\Big(t-\frac{x}{c}\Big)+H(-x)H\Big(t+\frac{x}{c}\Big)\Big).$$

является решением уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию $\Psi_1\big|_{t<0} \equiv 0$.



Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Утверждение

Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct-|x|) = -\frac{c}{2}\Big(H(x)H\Big(t-\frac{x}{c}\Big)+H(-x)H\Big(t+\frac{x}{c}\Big)\Big).$$

является решением уравнения

$$u''-\frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию $\Psi_1\big|_{t<0} \equiv 0$.

Доказательство.

$t > 0$:

$$\dot{\Psi}_1 = \dots,$$
$$\Psi_1' = \dots.$$

□

Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Утверждение

Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct-|x|) = -\frac{c}{2}\Big(H(x)H\Big(t-\frac{x}{c}\Big)+H(-x)H\Big(t+\frac{x}{c}\Big)\Big).$$

является решением уравнения

$$u''-\frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию $\Psi_1\big|_{t<0} \equiv 0$.

Доказательство.

$t>0$:

$$\dot{\Psi}_1 = -\frac{c}{2}\Big(\delta\Big(t-\frac{x}{c}\Big)+\delta\Big(t+\frac{x}{c}\Big)\Big),$$

$$\Psi_1' = -\frac{1}{2}\Big(-\delta\Big(t-\frac{x}{c}\Big)+\delta\Big(t+\frac{x}{c}\Big)\Big).$$

□

Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Утверждение

Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct-|x|) = -\frac{c}{2}\Big(H(x)H\Big(t-\frac{x}{c}\Big)+H(-x)H\Big(t+\frac{x}{c}\Big)\Big).$$

является решением уравнения

$$u''-\frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию $\Psi_1\big|_{t<0} \equiv 0$.

Доказательство.

$t>0$:

$$\ddot{\Psi}_1 = -\frac{c}{2}\Big(\dot{\delta}\Big(t-\frac{x}{c}\Big)+\dot{\delta}\Big(t+\frac{x}{c}\Big)\Big),$$

$$\Psi_1'' = -\frac{1}{2c}\Big(\dot{\delta}\Big(t-\frac{x}{c}\Big)+\dot{\delta}\Big(t+\frac{x}{c}\Big)\Big).$$

□

Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Утверждение

Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct-|x|) = -\frac{c}{2}\Big(H(x)H\Big(t-\frac{x}{c}\Big) + H(-x)H\Big(t+\frac{x}{c}\Big)\Big).$$

является решением уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию $\Psi_1\big|_{t<0} \equiv 0$.

Доказательство.

$t \to +0$:

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct-|x|) \to 0,$$

$$\dot{\Psi}_1 = -\frac{c}{2}\Big(\delta\Big(t-\frac{x}{c}\Big) + \delta\Big(t+\frac{x}{c}\Big)\Big) \to -c^2\delta(x).$$

□

Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Доказательство

$$(\Psi_1{}'' - c^{-2}\ddot{\Psi}_1, \phi) = (\Psi_1, \phi'' - c^{-2}\ddot{\phi}) = -\frac{c}{2}\big(H(ct-|x|), \phi'' - c^{-2}\ddot{\phi}\big) =$$

$$= -\frac{c}{2}\iint (\phi'' - c^{-2}\ddot{\phi})H(ct-|x|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{c}{2}\int_0^\infty \int_{-ct}^{ct} \phi''\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{|x|/c}^{\infty} \ddot{\phi}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{c}{2}\int_0^\infty \big(\phi'(ct,t) - \phi'(-ct,t)\big)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\phi}\Big(x, \frac{|x|}{c}\Big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{c}{2}\int_0^\infty \big(\phi'(ct,t) - \phi'(-ct,t)\big)\,\mathrm{d}t -$$

$$- \frac{1}{2c}\int_0^\infty \dot{\phi}\Big(x, \frac{|x|}{c}\Big)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2c}\int_0^\infty \dot{\phi}\Big(-x, \frac{|x|}{c}\Big)\,\mathrm{d}x =$$

Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Доказательство.

$$= -\frac{c}{2}\int_0^\infty \big(\phi'(ct,t) - \phi'(-ct,t)\big)\,\mathrm{d}t -$$

$$- \frac{1}{2c}\int_0^\infty \dot{\phi}\Big(t, \frac{t}{c}\Big)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2c}\int_0^\infty \dot{\phi}\Big(-t, \frac{t}{c}\Big)\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{c}{2}\int_0^\infty \big(\phi'(ct,t) - \phi'(-ct,t)\big)\,\mathrm{d}t -$$

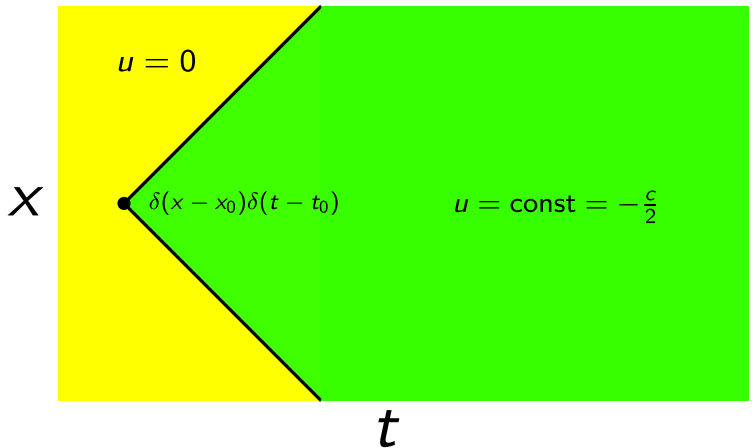
$$- \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{\phi}(ct,t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{\phi}(-ct,t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\infty \Big(\frac{d\phi(ct,t)}{dt} + \frac{d\phi(-ct,t)}{dt}\Big)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\phi(0,0) + \frac{1}{2}\phi(0,0) = (\delta, \phi)$$

□

Свойства фундаментального решения: область влияния — характеристический (световой) конус будущего



Классическая и обобщенная задача Коши для одномерного волнового уравнения

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x, t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_* = f_*(x, t),$$
$$u_*(x, 0) = u_0(x), \qquad \dot{u}_*(x, 0) = u_1(x).$$

Классическая и обобщенная задача Коши для одномерного волнового уравнения

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x,t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_* = f_*(x,t),$$
$$u_*(x,0) = u_0(x), \qquad \dot{u}_*(x,0) = u_1(x).$$

Обобщенная задача Коши: разыскивается обобщённая функция $u(x,t) = u_*(x,t)H(t)$:

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = f(x,t),$$
$$f(x,t) = f_*(t)H(t) + u_0(x)\dot{\delta}(t) + u_1(x)\delta(t),$$
$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Обобщенная задача Коши является “частным случаем” классической задачи для случая гладкой правой части f_*.

Обобщенная задача Коши для одномерного волнового уравнения

Обобщенная задача Коши: разыскивается обобщённая функция $u(x,t) = u_*(x,t)H(t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_* = f(x,t),$$
$$f(x,t) = f_*(x,t)H(t) + u_0(x)\dot{\delta}(t) + u_1(x)\delta(t),$$
$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Решение обобщенной задачи Коши для одномерного волнового уравнения существует, единственно и выражается в виде *запаздывающего потенциала*:

$$u = \Psi_1 * f.$$

(поскольку существует свёртка двух функций равных нулю в области $t < 0$, таких что при $t > 0$ одно из них имеет носитель внутри светового конуса).

Классическая задача Коши: формула Даламбера

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x,t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_* = f_*(x,t),$$
$$u_*(x,0) = u_0(x), \qquad \dot{u}_*(x,0) = u_1(x).$$

Задача

Получить формулу Даламбера

$$u = -\frac{c}{2}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f_*(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau - \frac{c}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \frac{c^2}{2}\big(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\big).$$

Классическая задача Коши: формула Даламбера

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x,t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_* = f_*(x,t),$$
$$u_*(x,0) = u_0(x), \qquad \dot{u}_*(x,0) = u_1(x).$$

Решение

$\supset f = f_* H(t) + u_0(x)\dot{\delta}(t) + u_1(x)\delta(t) \quad \Longrightarrow$

$$f_* H(t) * \Psi_1 =$$
$$= -\frac{c}{2}\iint_{-\infty}^{\infty} H(\tau) f_*(\xi,\tau) H(t-\tau) H\big(t-\tau-\tfrac{|x-\xi|}{c}\big)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi = -\frac{c}{2}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f_*(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau$$

$$t-\tau-\tfrac{|x-\xi|}{c} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-\xi| < c(t-\tau) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x > \xi > x - c(t-\tau) \\ x < \xi < x + c(t-\tau) \end{bmatrix}$$
$$\overset{t-\tau>0}{\Longleftrightarrow} \quad x - c(t-\tau) < \xi < x + c(t-\tau)$$

Классическая задача Коши: формула Даламбера

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x,t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_* = f_*(x,t),$$
$$u_*(x,0) = u_0(x), \qquad \dot{u}_*(x,0) = u_1(x).$$

Решение

$\supset f = f_* H(t) + u_0(x)\dot{\delta}(t) + u_1(x)\delta(t) \quad \Longrightarrow$

$u_1(x)\delta(t) * \Psi_1 =$

$$= -\frac{c}{2}\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} u_1(\xi)\,\delta(\tau)H\big(t-\tau-\tfrac{|x-\xi|}{c}\big)\,\mathrm{d}\tau\,d\xi =$$

$$= -\frac{c}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_1(\xi)H\big(t-\tfrac{|x-\xi|}{c}\big)\,\mathrm{d}\xi = -\frac{c}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$t - \tfrac{|x-\xi|}{c} > 0 \iff |x-\xi| < ct \iff \begin{bmatrix} x > \xi > x - ct \\ x < \xi < x + ct \end{bmatrix} \overset{t>0}{\iff} x - ct < \xi < x + ct$$

Классическая задача Коши: формула Даламбера

Классическая задача Коши: для $t > 0$ разыскивается гладкая функция $u(x,t)$:

$$u_*'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_* = f_*(x,t),$$
$$u_*(x,0) = u_0(x), \qquad \dot{u}_*(x,0) = u_1(x).$$

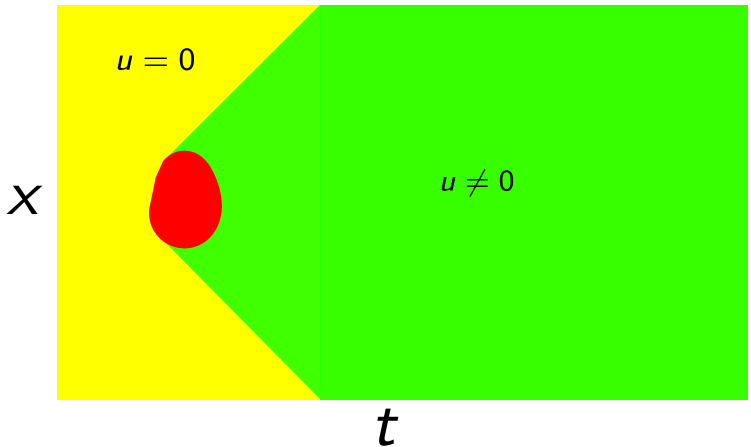
Решение

$\supset f = f_* H(t) + u_0(x)\dot{\delta}(t) + u_1(x)\delta(t) \quad \Longrightarrow$

$$u_0(x)\dot{\delta}(t) * \Psi_1 =$$
$$= -\frac{c}{2}\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\,\dot{\delta}(\tau)H\big(t-\tau-\tfrac{|x-\xi|}{c}\big)\,d\tau\,d\xi = -\frac{c}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\delta\big(t-\tfrac{|x-\xi|}{c}\big)\,d\xi =$$
$$= -\frac{c^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\delta\big(ct-|x-\xi|\big)\,d\xi = -\frac{c^2}{2}\big(u_0(x-ct)+u_0(x+ct)\big)$$

$$|x-\xi| = ct \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x > \xi = x - ct \\ x < \xi = x + ct \end{bmatrix} \overset{t>0}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{bmatrix} \xi = x - ct \\ \xi = x + ct \end{bmatrix}$$

Свойства запаздывающего потенциала: характеристический (световой) конус будущего



Одномерное волновое уравнение

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0$$

- Поперечные колебания струны: $Tu'' - \rho_0 S\ddot{u} = 0$.
- Продольные колебания стержня: $ESu'' - \rho_0 S\ddot{u} = 0$.

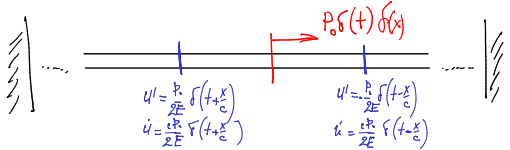
Решение Даламбера: $u = \overbrace{\Psi_+(x+ct)}^{\text{волна}} + \Psi_-(\underbrace{x-ct}_{\text{фаза: } \phi_\pm})$,

$\Psi_\pm$ — произвольные функции.

Фундаментальное решение:

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct-|x|) = -\frac{c}{2}\left(H(x)H\left(t-\frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t+\frac{x}{c}\right)\right).$$

Бесконечный стержень под действием сосредоточенной продольной импульсной нагрузки



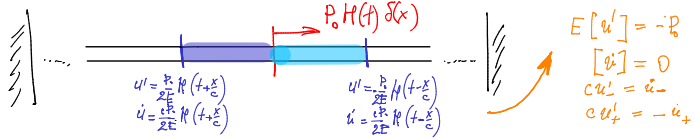
$$ES u'' - \rho_0 S \ddot{u} = -SP_0\delta(x)\,\delta(t) \Rightarrow \quad u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = -\frac{P_0}{ES}\delta(x)\delta(t)$$

$$\Rightarrow \quad u\big|_{t<0} = 0 \qquad u = \frac{P_0 c}{2E}\left(H(x)H\left(t-\frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t+\frac{x}{c}\right)\right)$$

$$u' = \frac{P_0}{2E}\left(-H(x)\,\delta\left(t-\frac{x}{c}\right) + H(-x)\,\delta\left(t+\frac{x}{c}\right)\right)$$

$$\dot{u} = \frac{P_0 c}{2E}\left(H(x)\,\delta\left(t-\frac{x}{c}\right) + H(-x)\,\delta\left(t+\frac{x}{c}\right)\right)$$

Бесконечный стержень под действием внезапно приложенной сосредоточенной нагрузки



$$ES u'' - \rho_0 S \ddot u = -SP_0\delta(x)H(t) \quad \Rightarrow \quad u'' - \frac{1}{c^2}\ddot u = -\frac{P_0}{E}\delta(x)H(t)$$

$$\Rightarrow \quad u|_{t=0} = 0$$

$$u = \int_0^t \frac{P_0 c}{2E}\left(H(x)H\left(\tau-\frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(\tau+\frac{x}{c}\right)\right)d\tau =$$

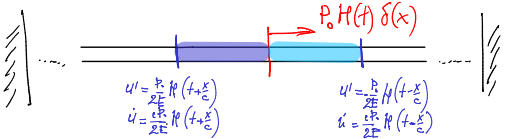
$$= \frac{P_0 c}{2E}\left(H(x)\,\mathcal{R}\left(t-\frac{x}{c}\right) + H(-x)\,\mathcal{R}\left(t+\frac{x}{c}\right)\right), \quad \mathcal{R}(t) = tH(t)$$

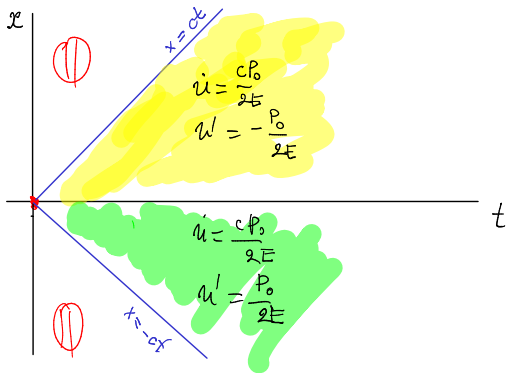
$$\dot u = \frac{P_0 c}{2E}\left(H(x)H\left(t-\frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t+\frac{x}{c}\right)\right)$$

$$u' = \frac{P_0}{2E}\left\{H(x)\left(\int_0^t H\left(\tau-\frac{x}{c}\right)d\tau\right)'_x + H(x)\left(\int_0^t H\left(\tau+\frac{x}{c}\right)d\tau\right)'_x\right\} =$$

$$= \frac{P_0}{2E}\left(-H(x)\,H\left(t-\frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t+\frac{x}{c}\right)\right)$$

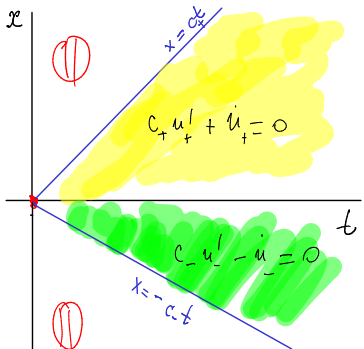
Бесконечный стержень под действием внезапно приложенной сосредоточенной нагрузки





Составной стержень





Баланс сил:

$$[Eu'] = \rho[c^2 u'] = -P$$

Непрерывность:

$$[u] = 0$$

Составной стержень

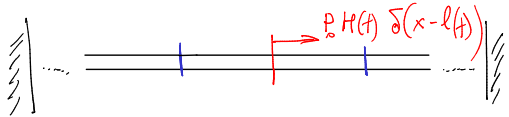
$$\rho_1\left(c_+^2 u_+' - c_-^2 u_-'\right) = -P_0$$
$$\dot{u}_+ - \dot{u}_- = 0$$

$$\left.\begin{aligned} c_+ u_+' + \dot{u}_+ &= 0 \\ c_- u_-' - \dot{u}_- &= 0 \end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} c_+ u_+' + c_- u_-' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_+^2 u_+' + c_+ c_- u_-' = 0 \Rightarrow c_+ c_- u_-' + c_-^2 u_-' = \frac{P_0}{\rho_0}$$

$$\Rightarrow u_\pm' = \mp \frac{P_0}{\rho_0 c_\pm (c_+ + c_-)}$$

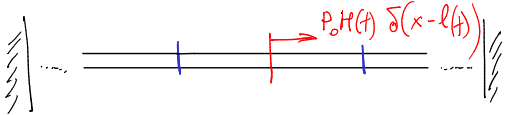
Подвижная нагрузка: условия Гюгонио



$$[u] = 0 \qquad [\dot{u}] + \dot{l}\,[u'] = 0$$

$$-P_0 = E\,[u'] + \rho \dot{l}\,[\dot{u}] \quad \Rightarrow \quad -P_0 = \rho_1 (c^2 - \dot{l}^2)\,[u']$$

Подвижная нагрузка: докритический случай



$\exists\ \dot\ell \equiv V$

$|V| < c$

$[u] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\dot u] + \dot\ell\,[u'] = 0$

$-P_0 = E\,[u'] + \rho\dot\ell\,[\dot u] \qquad -P_0 = \rho_0 (c^2 - \dot\ell^2)[u']$

$c\,u'_+ + \dot u_+ = 0$

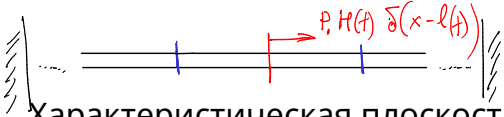
$c\,u'_- - \dot u_- = 0$

$\Rightarrow [\dot u] + c\,u'_+ + c\,u'_- = 0 \Rightarrow c\,u'_+ + c\,u'_- - \dot\ell\,[u'] = 0$

$\Rightarrow (c-\dot\ell)\,u'_+ + (c+\dot\ell)\,u'_- = 0 \quad \Rightarrow \quad (c-\dot\ell)^2 u'_+ + (c^2-\dot\ell^2)\,u'_- = 0$

$-P_0 = \rho_0 (c^2-\dot\ell^2)\,u'_+ + \rho_0 (c-\dot\ell)^2 u'_+ \quad \Rightarrow \quad u'_\pm = \dfrac{\mp P_0}{2E\,(1 \mp \dot\ell/c)}$

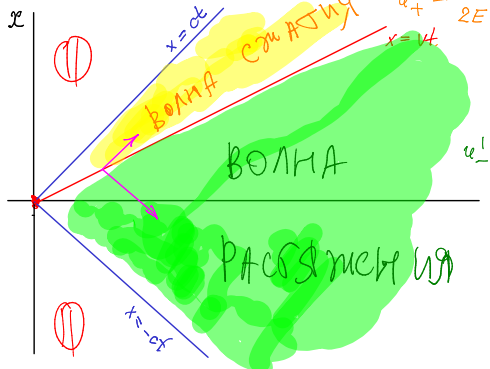
Подвижная нагрузка: докритический случай



$\exists\ l = V = \text{const}$

$|V| < c$

Характеристическая плоскость

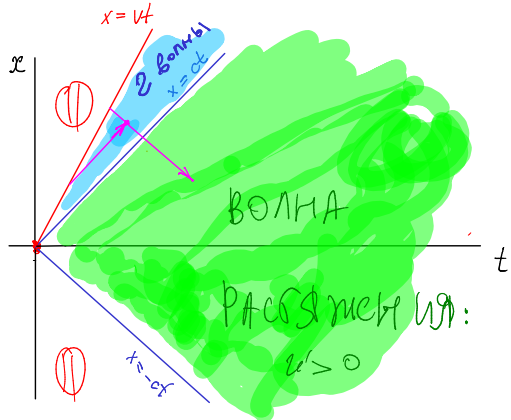


$$u_+^! = \frac{-P_0}{2E(1 - l'/c)}$$

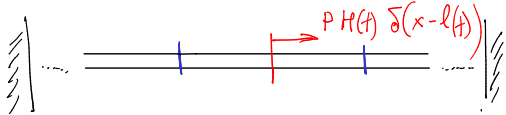
$$u_-^! = \frac{P_0}{2E(1 + l'/c)}$$

Подвижная нагрузка: закритический случай

Характеристическая плоскость



Подвижная нагрузка: закритический случай



$$[u] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{u}_- + \dot{l} u'_- = 0$$

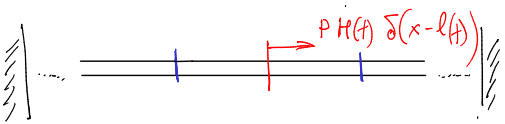
$$-P_0 = E[u'] + \rho \dot{l} [\dot{u}] \qquad P_0 = \rho (c^2 - \dot{l}^2) u'_-$$

В зоне сжатия:

$$u'_- = \frac{-P_0}{E\left(\dot{l}^2/c^2 - 1\right)} \qquad \dot{u}_- = \frac{P \dot{l}}{E\left(\dot{l}^2/c^2 - 1\right)}$$

$$u = u_-(x + ct) + u_+(x - ct)$$

Подвижная нагрузка: закритический случай



$$[u] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{u}_- + \dot{\ell} u'_- = 0$$

$$-P_0 = E[u'] + \rho \dot{\ell}[\dot{u}] \qquad P_0 = \rho_0 (c^2 - \dot{\ell}^2) u'_-$$

В зоне растяжения: $u = u_L(x+ct) \Rightarrow u' = u'_L,\ \dot{u} = c u'_L$

$u'_- = u'_R + u'_L;\quad \dot{u}_- = -c u'_R + c u'_L \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} u'_R + u'_L &= \frac{-P_0}{E(e^2/c^2 - 1)} \\ -u'_R + u'_L &= \frac{P_0 \dot{\ell}}{cE(e^2/c^2 - 1)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad u'_L = \frac{P_0}{2E(\ell^2/c^2 - 1)}\left(-1 + \frac{\dot{\ell}}{c}\right) = \frac{P_0}{2E(1 + \dot{\ell}/c)}$$

Подвижная нагрузка: решение как свёртка

Задача

Получить выражения для деформаций u' в задаче о внезапно возникающей подвижной нагрузке, движущейся по произвольному закону, как свертку фундаментального решения Ψ_1 с функцией нагрузки:

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = -H(t)P(t)\delta(x - \ell(t))$$

Подвижная нагрузка: решение как свёртка

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = -H(t)P(t)\delta(x - \ell(t))$$

$\Longrightarrow$

$$u = \frac{c}{2}\iint_{-\infty}^{\infty} H(\tau)P(\tau)\delta\big(\xi - \ell(\tau)\big)H(t-\tau)H\big(t - \tau - \tfrac{|x-\xi|}{c}\big)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{c}{2}\int_0^t P(\tau)H\big(t - \tau - \tfrac{|x-\ell(\tau)|}{c}\big)\,\mathrm{d}\tau$$

$\Longrightarrow$

$$u' = \frac{c}{2}\int_0^t P(\tau)\frac{\partial}{\partial x}H\big(t - \tau - \tfrac{|x-\ell(\tau)|}{c}\big)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^t P(\tau)H\big(x - \ell(\tau)\big)\delta\big(t - \tau - \tfrac{x-\ell(\tau)}{c}\big)\,\mathrm{d}\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t P(\tau)H\big(\ell(\tau) - x\big)\delta\big(t - \tau + \tfrac{x-\ell(\tau)}{c}\big)\,\mathrm{d}\tau$$

Подвижная нагрузка: решение как свёртка

$$u' = -\frac{1}{2}\int_0^t P(\tau)H\big(x-\ell(\tau)\big)\delta\big(t-\tau-\tfrac{x-\ell(\tau)}{c}\big)\,\mathrm{d}\tau + \\ + \frac{1}{2}\int_0^t P(\tau)H\big(\ell(\tau)-x\big)\delta\big(t-\tau+\tfrac{x-\ell(\tau)}{c}\big)\,\mathrm{d}\tau = \sum_i u'_i$$

$$\delta\big(f(t)\big) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i), \quad \text{где } f(t_i)=0.$$

$$u' = \frac{1}{2}\left(-\sum_{t'_i\in\mathcal{T}_+}\frac{P(t'_i)}{|1-\frac{\dot\ell(t'_i)}{c}|} + \sum_{t'_i\in\mathcal{T}_-}\frac{P(t'_i)}{|1+\frac{\dot\ell(t'_i)}{c}|}\right)$$

u' представляет собой сумму вкладов от множества точек $\mathcal{T} = \{t'_i\}$ в промежутке интегрирования таких, что

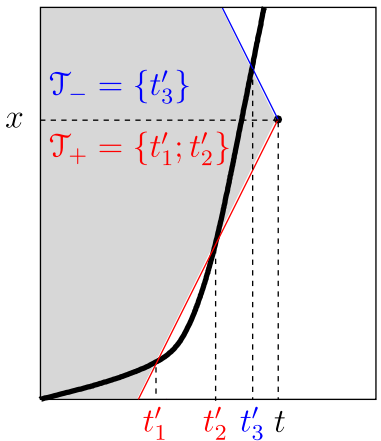
$$t - t'_i - \frac{|x-\ell(t'_i)|}{c} = 0$$

При фиксированных x и t необходимо отдельно рассмотреть наборы точек $\mathcal{T}_+ = \{t'_i : x-\ell(t'_i) > 0\}$ и $\mathcal{T}_- = \{t'_i : x-\ell(t'_i) < 0\}$.

Подвижная нагрузка: решение как свёртка

- При фиксированных x и t необходимо отдельно рассмотреть наборы точек $\mathcal{T}_+ = \{t'_i : x - \ell(t'_i) > 0\}$ и $\mathcal{T}_- = \{t'_i : x - \ell(t'_i) < 0\}$.
- Наличие точки t'_i такой, что $x - \ell(t'_i) = 0$, свидетельствует о том, что рассматриваемая точка $(t; x)$ находится под нагрузкой. В этом случае производная u' разрывна, и говорить имеет смысл лишь о пределах производной слева и справа.
- При фиксированных x и t множество $\mathcal{T} = \mathcal{T}_- \cup \mathcal{T}_+$ будет конечным, если принять ограничение: $\ell(t)$ — кусочно-монотонная функция, такая что $|\dot{\ell}| = c$ лишь в конечном числе точек.

$$t'_i + \frac{|x - \ell(t'_i)|}{c} = t$$



Подвижная нагрузка: решение как свёртка

Задача

Выписать аналогичную формулу для скоростей $\dot{u}$.

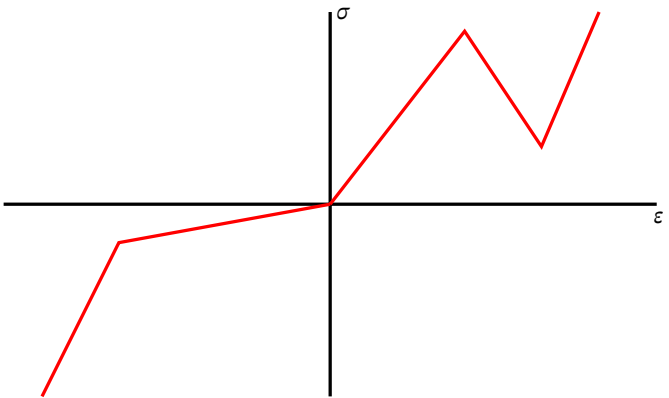
Задача

Получить выражения для деформаций в задаче о внезапно возникающей подвижной нагрузке постоянной интенсивности, движущейся с постоянной докритической и закритической скоростью, с помощью полученной выше формулы.

1. Метод характеристик для гиперболических уравнений
2. Необходимые сведения из математического анализа
3. Начальные сведения об обобщенных функциях
4. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
5. Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
6. Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
7. Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
8. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
9. Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
10. Метод стационарной фазы
11. Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
12. Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
13. Уравнения Лапласа (Пуассона)
14. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$
15. Уравнения эластодинамики; P и S волны
16. Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

Пример механической системы, для которой характерно распространение фронтов разрывов деформаций: продольные движения стержня из полилинейного материала

Баланс количества движения: $T' - \rho_0 S\ddot{u} = f$.
Выражение для силы: $T = S\sigma$.
Определяющие уравнение для напряжения: $\sigma = \sigma_i + E_i u',\ \varepsilon_{i-1} \le \varepsilon \le \varepsilon_i$
Внутренняя энергия: $W = \int \sigma(\varepsilon)\, d\varepsilon$.



Условия Гюгонио на разрыве

Неразрывность:

$$[u(\ell(t),t)] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad [\dot{u} + \dot{\ell} u'] = 0$$

Баланс количества движения:

$$[\sigma] = -\rho_0 \dot{\ell} [\dot{u}]$$

Баланс энергии на разрыве

$$[\dot u + \dot\ell u'] = 0, \tag{1}$$

$$[\sigma] = -\rho_0 \dot\ell [\dot u] \tag{2}$$

Вычислим диссипацию энергии на разрыве:

$$\mathcal{D} = [\sigma \dot u] + \dot\ell [E] \overset{[\alpha\beta]\equiv\langle\alpha\rangle[\beta]+[\alpha]\langle\beta\rangle}{=}$$

$$= \langle\sigma\rangle[\dot u] + [\sigma]\langle\dot u\rangle + \dot\ell[W] + \rho_0\dot\ell[\dot u]\langle\dot u\rangle =$$

$$\overset{(1)}{=} -\dot\ell\langle\sigma\rangle[u'] + [\sigma]\langle\dot u\rangle + \dot\ell[W] + \rho_0\dot\ell[\dot u]\langle\dot u\rangle \overset{(2)}{=} -\dot\ell\big(-[W] + \langle\sigma\rangle[u']\big) =$$

$$= -\mathcal{F}\dot\ell \geq 0.$$

$\mathcal{F}S$ — конфигурационная сила.

$$[\alpha] = \alpha(\ell+0) - \alpha(\ell-0), \qquad \langle\alpha\rangle = \big(\alpha\ell(\ell+0) + \alpha(\ell-0)\big)/2.$$

Энтропийный критерий Дафермоса

$$\mathcal{D} = -\mathcal{F}\dot{\ell} \geq 0,$$
$$\mathcal{F} = -[W] + \langle\sigma\rangle[u']$$

- Критерий позволяет отбирать термодинамически допустимые решения.
- В статике $[\sigma] = 0 \implies \langle\sigma\rangle = \sigma \implies \mathcal{F} = [\mathcal{E}]$. Здесь $\mathcal{E} = -W + \sigma u'$ — одномерный аналог тензора Эшелби.
- Для термомеханических систем, где определены температура и энтропия, критерий получается рассмотрением УДН на скачке с учетом баланса энергии и условий Гюгонио.

Dafermos C.M.
The entropy rate admissibility criterion for solutions of hyperbolic conservation laws
Journal of Differential Equations. 1973. Vol. 14(2) P. 202–212.

1. Метод характеристик для гиперболических уравнений
2. Необходимые сведения из математического анализа
3. Начальные сведения об обобщенных функциях
4. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
5. Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
6. Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
7. Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
8. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
9. Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
10. Метод стационарной фазы
11. Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
12. Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
13. Уравнения Лапласа (Пуассона)
14. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$
15. Уравнения эластодинамики; P и S волны
16. Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

Пространство основных функций $\mathcal{S}$

Определение

Множество основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — все функции класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ убывающие при $|\mathbf{x}| \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|\mathbf{x}|^{-1}$.

Определение

Последовательность функций $\phi_1, \phi_2, \ldots$ из $\mathcal{S}$ сходится к функции $\phi \in \mathcal{S}$ ($\phi_k(\mathbf{x}) \to \phi(\mathbf{x})$), если $\forall\ \alpha,\ \beta$

$$\mathbf{x}^\beta D^\alpha \phi_k(\mathbf{x}) \rightrightarrows \mathbf{x}^\beta D^\alpha \phi(\mathbf{x})$$

Здесь $\alpha,\ \beta$ — мультииндексы,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n,$$

$$D^\alpha \phi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}\phi(\mathbf{x})}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n},$$
$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Пространство основных функций $\mathcal{S}$

- $\mathcal{S}$ — линейное пространство.
- Из сходимости в $\mathcal{D}$ следует сходимость в $\mathcal{S}$.
- $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$.
- $\mathcal{S}$ не совпадает с $\mathcal{D}$ (e.g. $\exp(-x^2)$).
- Операции дифференцирования и линейной неособенной замены переменных непрерывны из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$.
- Умножение на произвольную $a(\mathbf{x}) \in C^\infty$ может вывести за пределы $\mathcal{S}$ (e.g. $\exp(x^2)$).
- $\exists\, a(\mathbf{x}) \in C^\infty$ растет не быстрее полинома:

$$|D^\alpha \phi(\mathbf{x})| \leq C_\alpha (1 + |\mathbf{x}|)^{m_\alpha}.$$

Операция умножения на такую $a(\mathbf{x})$ непрерывна из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$.

Обобщенные функции медленного роста $\mathcal{S}'$

Определение

Обобщенной функцией медленного роста называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathcal{S}$.

- Сходимость в $\mathcal{S}'$ — слабая сходимость последовательности функционалов.
- $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

Обобщенные функции медленного роста $\mathcal{S}'$: примеры

$\exists\, f(\mathbf{x})$ — локально интегрируемая функция полиномиального роста на бесконечности: $\exists\, m$

$$\int |f(\mathbf{x})|(1+|\mathbf{x}|)^{-m}\,\mathrm{d}\mathbf{x} < \infty.$$

Она определяет регулярную обобщенную функцию медленного роста из $\mathcal{S}'$:

$$(f,\phi) = \int f\phi\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Обобщенные функции медленного роста $\mathcal{S}'$: примеры

Не всякая локально интегрируемая функция, принадлежащая $\mathcal{S}'$, имеет полиномиальный рост. Например, функция

$$\big(\cos(\exp x)\big)' = -\exp x \, \sin(\exp x)$$

не является функцией полиномиального роста, но тем не менее задает обобщенную функцию медленного роста по формуле

$$\Big(\big(\cos(\exp x)\big)', \phi\Big) = -\int \cos(\exp x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Обобщенные функции медленного роста $\mathcal{S}'$: примеры

Если f — финитная обобщенная функция из $\mathcal{D}'$, то она единственным образом продолжается на $\mathcal{S}$ как элемент из $\mathcal{S}'$ по формуле

$$(f, \phi) = (f, \eta\phi),$$

где $\eta \in \mathcal{D}$, $\eta = 1$ в окрестности носителя f.

Обобщенные функции медленного роста $\mathcal{S}'$: примеры

$\exists\, f \in \mathcal{S}'$.

- $D^\alpha f \in \mathcal{S}'$.
- $f(\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{b}) \in \mathcal{S}'$ если $\det A \neq 0$.
- $af \in \mathcal{S}'$, если $a(\mathbf{x}) \in C^\infty$ и растет не быстрее полинома.
- Естественным образом определяется прямое произведение: $f \cdot g \in \mathcal{S}'$.
- Естественным образом определяется свёртка $f * g$. Она существует не всегда.

Преобразование Фурье основных функций из $\mathcal{S}$

$\beth\ \phi \in \mathcal{S}$:

$$F[\phi](\boldsymbol{\omega}) = \int \phi(\mathbf{x}) \exp \mathrm{i}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

— преобразование Фурье функции ϕ.

Теорема

Преобразование Фурье взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает $\mathcal{S}$ на $\mathcal{S}$.

$$F^{-1}\big[\phi(\mathbf{x})\big](\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \phi(\mathbf{x}) \exp\big(-\mathrm{i}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})\big)\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^n} F\big[\phi(-\mathbf{x})\big]$$

— обратное преобразование Фурье функции ϕ:

$$\phi = F^{-1}\big[F[\phi]\big] = F\big[F^{-1}[\phi]\big].$$

Преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathcal{S}'$

Определение

$\forall\, f \in \mathcal{S}',\ \phi \in \mathcal{S}$:

$$(F[f], \phi) = (f, F[\phi]),$$

$$F^{-1}\big[f(\mathbf{x})\big] = \frac{1}{(2\pi)^n} F\big[f(-\mathbf{x})\big]$$

Теорема

Преобразование Фурье взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает $\mathcal{S}'$ на $\mathcal{S}'$, причем $\forall\, f \in \mathcal{S}'$

$$f = F^{-1}\big[F[f]\big] = F\big[F^{-1}[f]\big].$$

Свойства преобразования Фурье

- Дифференцирование ПФ: $D^\alpha F[f] = F[(\mathrm{i}\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$.
- ПФ производной: $F[D^\alpha f](\boldsymbol{\omega}) = (-\mathrm{i}\boldsymbol{\omega})^\alpha F[f](\boldsymbol{\omega})$.
- ПФ сдвига: $F[f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)](\boldsymbol{\omega}) = \exp \mathrm{i}(\mathbf{x}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}) F[f](\boldsymbol{\omega})$
- Сдвиг ПФ: $F[f](\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_0) = F[\exp \mathrm{i}(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{x}) f(\mathbf{x})](\boldsymbol{\omega})$
- ПФ подобия: $F[f(c\mathbf{x})](\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{|c|^n} F[f](c^{-1}\boldsymbol{\omega})$.
- ПФ прямого произведения: $F[f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})] = F[f] \cdot F[g]$
- ПФ свертки: $F[f * g] = F[f]F[g]$, если свёртка существует.

Преобразование Фурье дельта-функции

$$F[\delta] = 1,$$
$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$
$$F[1] = (2\pi)^n \delta.$$

Применяя формулу $D^\alpha F[f] = F[(\mathrm{i}\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$ для $f = 1$:

$$F[\mathbf{x}^\alpha] =$$

Преобразование Фурье дельта-функции

$$F[\delta] = 1,$$
$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$
$$F[1] = (2\pi)^n \delta.$$

Применяя формулу $D^\alpha F[f] = F[(\mathrm{i}\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$ для $f = 1$:

$$F[\mathbf{x}^\alpha] = (-\mathrm{i})^{|\alpha|} D^\alpha F[1] = (2\pi)^n (-\mathrm{i})^{|\alpha|} D^\alpha \delta.$$

Преобразование Фурье дельта-функции

$$F[\delta] = 1,$$
$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$
$$F[1] = (2\pi)^n \delta.$$

Применяя формулу $D^\alpha F[f] = F[(\mathrm{i}\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$ для $f = 1$:

$$F[\mathbf{x}^\alpha] = (-\mathrm{i})^{|\alpha|} D^\alpha F[1] = (2\pi)^n (-\mathrm{i})^{|\alpha|} D^\alpha \delta.$$

Применяя формулу $F[D^\alpha f](\boldsymbol{\omega}) = (-\mathrm{i}\boldsymbol{\omega})^\alpha F[f](\boldsymbol{\omega})$ для $f = \delta$:

$$F[D^\alpha \delta] =$$

Преобразование Фурье дельта-функции

$$F[\delta] = 1,$$
$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$
$$F[1] = (2\pi)^n \delta.$$

Применяя формулу $D^\alpha F[f] = F[(\mathrm{i}\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$ для $f = 1$:

$$F[\mathbf{x}^\alpha] = (-\mathrm{i})^{|\alpha|} D^\alpha F[1] = (2\pi)^n (-\mathrm{i})^{|\alpha|} D^\alpha \delta.$$

Применяя формулу $F[D^\alpha f](\boldsymbol{\omega}) = (-\mathrm{i}\boldsymbol{\omega})^\alpha F[f](\boldsymbol{\omega})$ для $f = \delta$:

$$F[D^\alpha \delta] = (-\mathrm{i}\boldsymbol{\omega})^\alpha.$$

Преобразование Фурье функции Хевисайда

$$F[H(t)\exp(-at)] = \int_0^\infty \exp(-at + \mathrm{i}\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{i}}{\omega + \mathrm{i}a}$$

Так как $H(t)\exp(-at) \to H(t)$ в S' при $a \to +0$, в силу непрерывности преобразования Фурье, получаем:

$$F[H] = \frac{\mathrm{i}}{\omega + \mathrm{i}0} = \pi\delta(\omega) + \mathrm{i}\,\mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$$

Последнее равенство справедливо в силу формул Сохоцкого.

Таблицы преобразований Фурье обобщенных функций


Брычков Ю.А., Прудников А.П.
Интегальные преобразования обобщенных функций
Наука, 1977.

Задачи

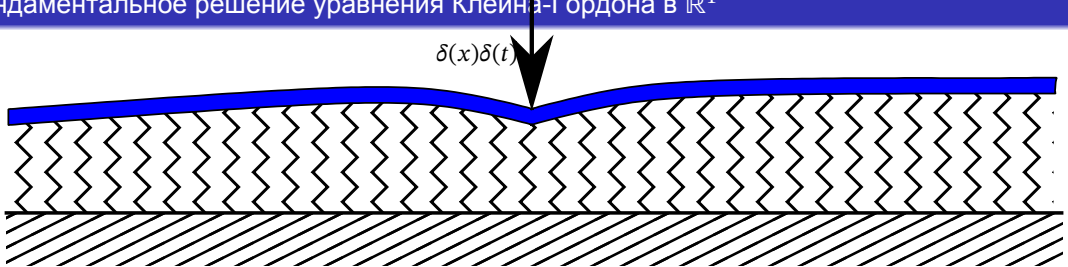
1. Вычислить преобразование Фурье функции $H(R - |x|)$, $R = \text{const}$.
2. При помощи преобразования Фурье по x найти решение уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющее условию $u\big|_{t<0} \equiv 0$.

1. Метод характеристик для гиперболических уравнений
2. Необходимые сведения из математического анализа
3. Начальные сведения об обобщенных функциях
4. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
5. Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
6. Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
7. Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
8. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
9. Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
10. Метод стационарной фазы
11. Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
12. Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
13. Уравнения Лапласа (Пуассона)
14. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$
15. Уравнения эластодинамики; P и S волны
16. Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

Фундаментальное решение уравнения Клейна-Гордона в $\mathbb{R}^1$



Применяя ПФ по x к уравнению

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = \delta(x)\delta(t),$$

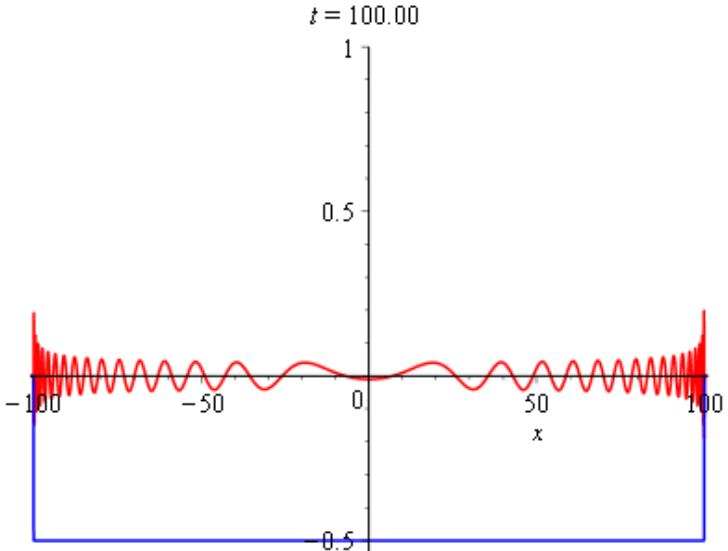
находим:

$$-(\omega^2 + k)u_F - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_F = \delta(t) \quad \Longrightarrow \quad \ddot{u}_F + c^2(\omega^2 + k)u_F = -c^2\delta(t) \quad \Longrightarrow$$

$$u_F = -c^2 H(t)\frac{\sin c\sqrt{\omega^2 + k}\,t}{c\sqrt{\omega^2 + k}} \quad \Longrightarrow \quad u = -\frac{c}{2}H\big(ct - |x|\big)J_0\big(\sqrt{k(c^2t^2 - x^2)}\big)$$

В частном случае $k = 0$ получаем фундаментальное решение волнового уравнения.

Фундаментальные решения волнового уравнения и уравнения Клейна-Гордона в $\mathbb{R}^1$ ($k = 1,\ c = 1$)



Задача

Вычислить фундаментальное решение телеграфного уравнения (уравнения Клейна-Гордона с диссипацией) в $\mathbb{R}^1$:

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = \delta(x)\delta(t),$$

для случая малой диссипации $k_* = k - c^2\gamma^2 > 0$.

Фундаментальное решение телеграфного уравнения (уравнения Клейна-Гордона с диссипацией) в $\mathbb{R}^1$: случай большой диссипации

Применяя ПФ по x к уравнению

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = \delta(x)\delta(t),$$

находим ($k_* = k - c^2\gamma^2 < 0$):

$$u = -\frac{c}{2}H(ct - |x|)I_0\left(\sqrt{|k_*|(c^2t^2 - x^2)}\right)\exp(-c^2\gamma t)$$

Фундаментальное решение телеграфного уравнения (уравнения Клейна-Гордона с диссипацией) в $\mathbb{R}^1$: особый случай

Применяя ПФ по x к уравнению

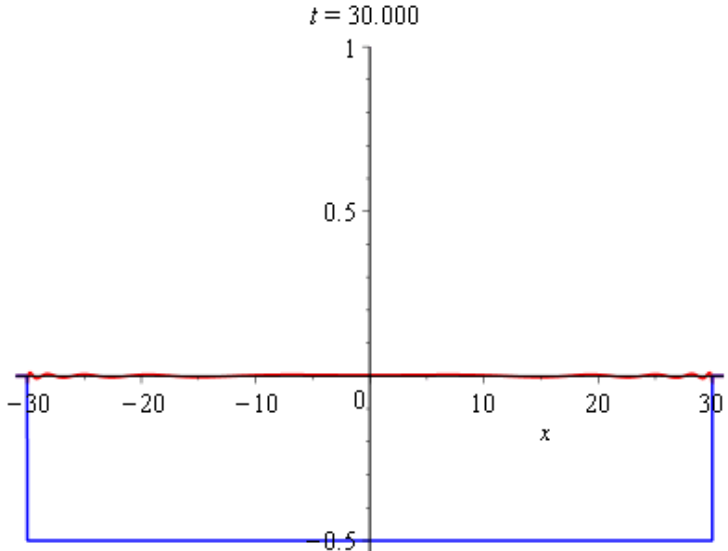
$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = \delta(x)\delta(t),$$

находим ($k_* = k - c^2\gamma^2 = 0$):

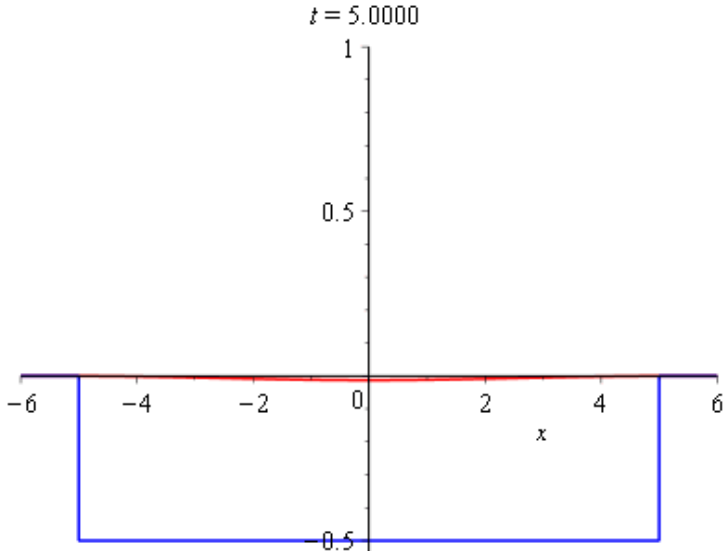
$$u = -\frac{c}{2}H\big(ct - |x|\big)\exp(-c^2\gamma t)$$

В данном случае искажения в форму сигнала, вызванные наличием упругого основания, компенсируются искажениями вследствие диссипации.

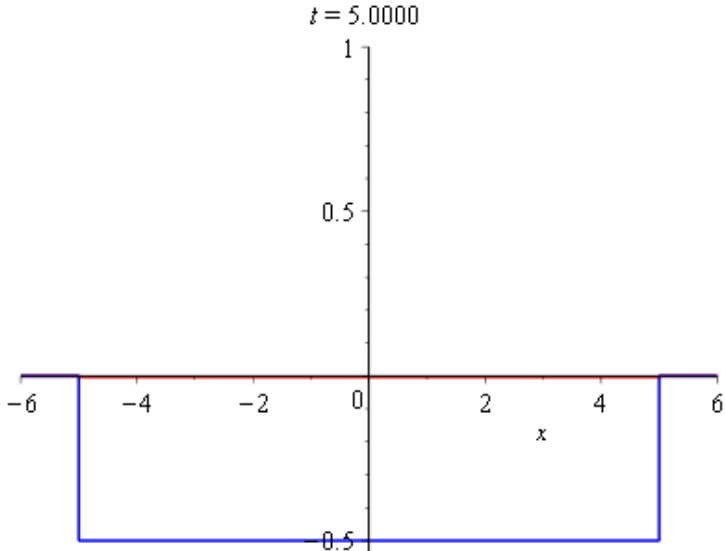
Фундаментальные решения волнового уравнения и телеграфного уравнения в $\mathbb{R}^1$ ($k = 1,\ c = 1, \gamma = 0.1$): случай малой диссипации



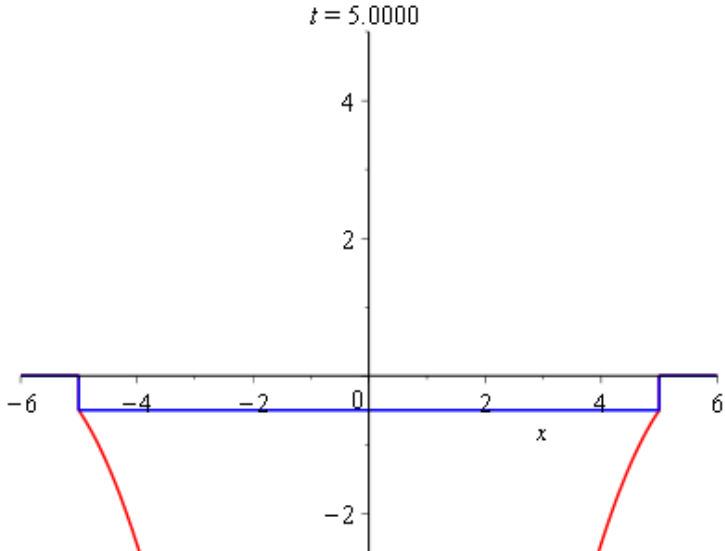
Фундаментальные решения волнового уравнения и телеграфного уравнения в $\mathbb{R}^1$ ($k = 1,\ c = 1, \gamma = 2$): случай большой диссипации



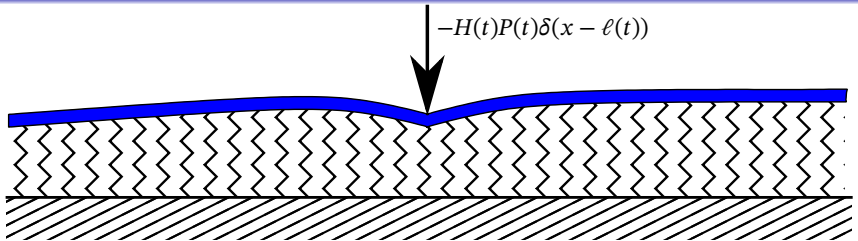
Фундаментальные решения волнового уравнения и телеграфного уравнения в $\mathbb{R}^1$ ($k = 1,\ c = 1, \gamma = 1$): особый случай



Фундаментальные решения волнового уравнения и телеграфного уравнения в $\mathbb{R}^1$ ($k = -1,\ c = 1, \gamma = 0$): случай упругого основания отрицательной жесткости



Подвижная нагрузка на струне на упругом основании



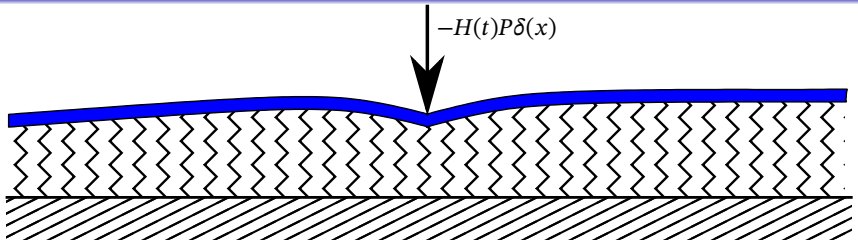
Задача

Найти движение струны на винклеровском основании, вызванное подвижной нагрузкой $H(t)P(t)\delta(x-\ell(t))$, т.е. решение уравнения

$$u''-\frac{1}{c^2}\ddot{u}-ku=-H(t)P(t)\delta(x-\ell(t)),$$

Делаем по аналогии со струной без упругого основания (см. слайд 132).

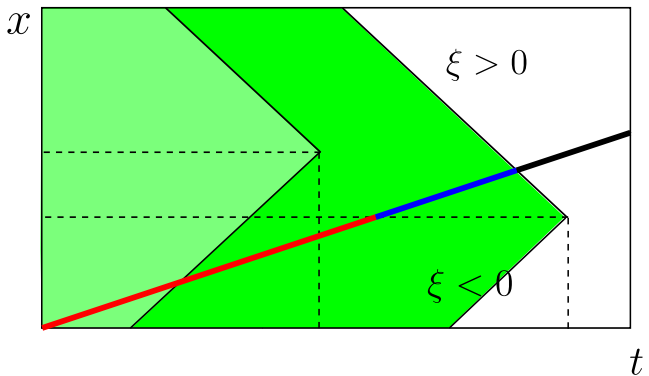
Внезапно приложенная нагрузка постоянной амплитуды



$$u = \frac{cP}{2}\int_0^t H\Big(c(t-\tau)-|x|\Big)J_0\Big(\sqrt{k\Big(c^2(t-\tau)^2-x^2\Big)}\Big)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{cP}{2}\int_0^t H\Big(c\tau-|x|\Big)J_0\Big(\sqrt{k\Big(c^2\tau^2-x^2\Big)}\Big)\,\mathrm{d}\tau$$

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью



$$\xi = x - vt$$

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью

Рассмотрим случай $\xi = x - vt < 0$. Имеем:

$$u = \frac{cP}{2}\int_0^t H\Big(c(t-\tau) - |x - v\tau|\Big) J_0\Big(\sqrt{k\Big(c^2(t-\tau)^2 - \big(x - v\tau\big)^2\Big)}\Big)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{cP}{2}\Bigg(\int_0^{t+\frac{\xi}{v}} H(c(t-\tau) - v(t-\tau) - \xi)\times + \int_{t+\frac{\xi}{v}}^t H(c(t-\tau) + v(t-\tau) + \xi)\times\Bigg)$$

$$\times J_0\left(\sqrt{k(c^2(t-\tau)^2 - (v(t-\tau)+\xi)^2)}\right)\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{cP}{2}\Bigg(\int_{-\frac{\xi}{v}}^t H((c-v)\tau - \xi)\cdot + \int_0^{-\frac{\xi}{v}} H((c+v)\tau + \xi)\cdot\Bigg) J_0\left(\sqrt{k(c^2\tau^2 - (v\tau+\xi)^2)}\right)\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{cP}{2}\int_{\frac{|\xi|}{c+v}}^t J_0\left(\sqrt{k(c^2\tau^2 - (v\tau+\xi)^2)}\right)\mathrm{d}\tau.$$

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью

Делаем замену ($\xi = -|\xi|,\ \operatorname{sign}\xi = -1$)

$$\zeta = c\Big(\tau - \frac{|\xi|}{c - v\operatorname{sign}\xi}\Big),$$

получим

$$u = \frac{P}{2}\int_0^{c(t-\frac{|\xi|}{c-v\operatorname{sign}\xi})} J_0\left(\sqrt{k\zeta((1-\beta^2)\zeta + 2\xi)}\right)\mathrm{d}\zeta,$$

где $\beta = v/c$. Пусть $t \to \infty$, а ξ фиксировано. Тогда верхним пределом интегрирования будет $+\infty$, и после вычисления интеграла получим

$$u = \frac{Pe^{-\sqrt{k_0}|\xi|}}{2\sqrt{k(1-\beta^2)}},$$
$$k_0 = \left|\frac{k}{1-\beta^2}\right|.$$

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью

Для $\xi > 0$ имеем $x > vt > v\tau\ \forall \tau \le t \Longrightarrow H(v\tau - x) = 0$. Поэтому,

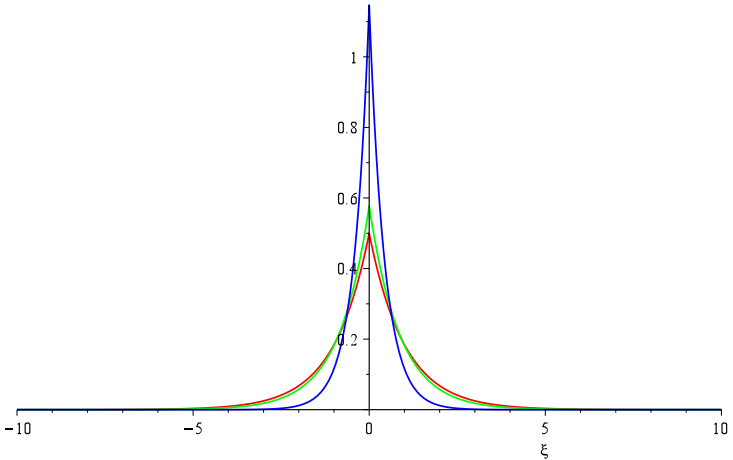
$$u = \frac{cP}{2} \int_0^t H((c-v)\tau - \xi) J_0\left(\sqrt{k(c^2\tau^2 - (v\tau+\xi)^2)}\right) \mathrm{d}\tau$$

Определяя границы промежутка, где подынтегральная функция отлична от нуля, и применяя ту же замену переменной, приходим вновь к формуле

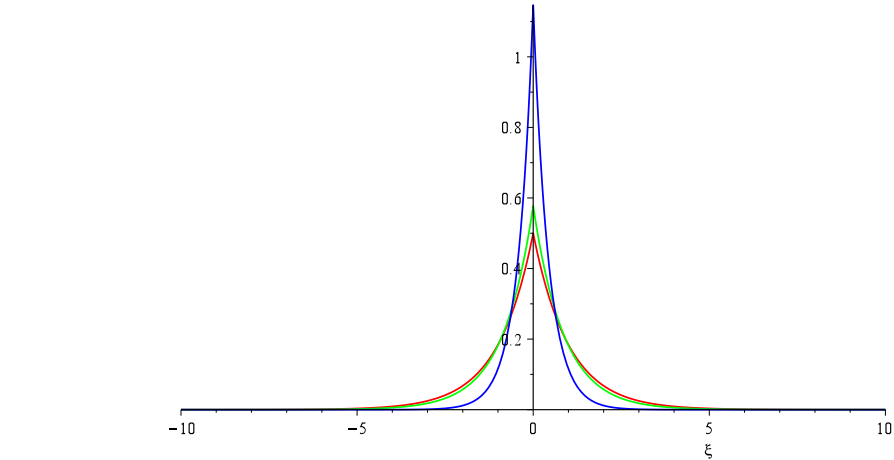
$$u = \frac{Pe^{-\sqrt{k_0}|\xi|}}{2\sqrt{k(1-\beta^2)}},$$
$$k_0 = \left|\frac{k}{1-\beta^2}\right|.$$

Стационарное решение в точке ξ в подвижной системе координат устанавливается за бесконечное время.

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью: профиль прогиба ($v/c = 0, v/c = 0.5, v/c = 0.9$)



Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью: профиль прогиба ($v/c = 0, v/c = 0.5, v/c = 0.9$)



Контрольный вопрос: а что будет в этой же задаче для волнового уравнения?

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью

- При ненулевой скорости нагрузки нестационарное решение несимметрично относительно нагрузки в движущейся с ней СК.
- При $t \to \infty$ устанавливается симметричное в подвижной СК стационарное решение.
- Стационарное решение устанавливается за бесконечное время.
- При скорости нагрузки, близкой к критическому значению c, прогиб под нагрузкой стремится к бесконечности.

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью: стационарная задача

Задача

Показать, что предел нестационарного решения совпадает с решением u^* стационарной задачи

$$\begin{cases} u^{*\prime\prime} - \dfrac{1}{c^2}\ddot{u}^* - ku^* = -P\delta(x - vt), \\ u^* = u^*(x - vt) \equiv u^*(\xi), \\ u^* \underset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью: стационарная задача

Задача

Показать, что предел нестационарного решения совпадает с решением u^* стационарной задачи

$$\begin{cases} u^{*\prime\prime} - \dfrac{1}{c^2}\ddot{u}^* - ku^* = -P\delta(x - vt), \\ u^* = u^*(x - vt) \equiv u^*(\xi), \\ u^* \underset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

Указания:

1. Переписать уравнение движения в новых независимых переменных $\xi = x - vt,\ \tau = t$.
2. В полученном уравнении пренебречь производными по времени τ.
3. Найти решение, удовлетворяющее условиями на бесконечности и условиями Гюгонио на (неподвижном) скачке $\xi = 0$.

Нагрузка, движущаяся с критической скоростью

$\xi > 0$: $u = 0$.

$\xi < 0$:

$$u = \frac{cP}{2} H\Big(t - \frac{|\xi|}{2c}\Big) \int_{\frac{|\xi|}{2c}}^{t} J_0\left(\sqrt{k(2c|\xi|\tau - \xi^2)}\right) \mathrm{d}\tau.$$

Сделав замену

$$\zeta = \sqrt{\tau - \frac{|\xi|}{2c}},$$

приводим интеграл к табличному:

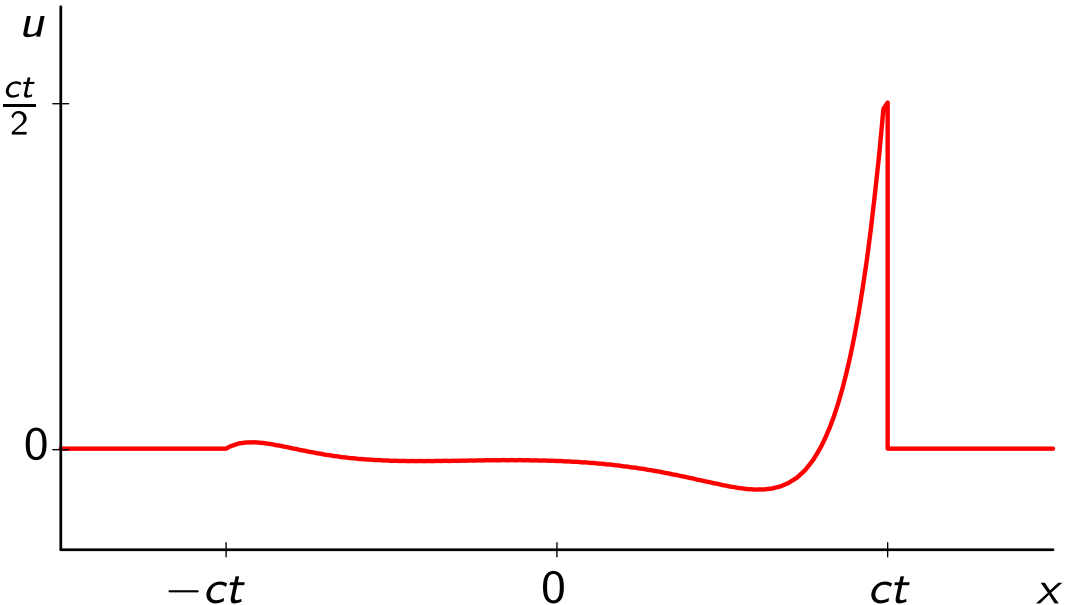
$$u = cP\, H\Big(t - \frac{|\xi|}{2c}\Big) \int_0^{\sqrt{t - \frac{|\xi|}{2c}}} \zeta\, J_0\left(\sqrt{2kc|\xi|}\,\zeta\right) \mathrm{d}\zeta =$$

$$= P\sqrt{\frac{ct - \frac{|\xi|}{2}}{2k|\xi|}}\, J_1\Big(\sqrt{2k|\xi|(ct - \tfrac{|\xi|}{2})}\Big)\, H\Big(t - \frac{|\xi|}{2c}\Big)$$

При $\xi \to -0$:

$$u = \frac{cPt}{2} + o(1).$$

Нагрузка, движущаяся с критической скоростью



1. Метод характеристик для гиперболических уравнений
2. Необходимые сведения из математического анализа
3. Начальные сведения об обобщенных функциях
4. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
5. Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
6. Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
7. Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
8. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
9. Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
10. Метод стационарной фазы
11. Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
12. Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
13. Уравнения Лапласа (Пуассона)
14. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$
15. Уравнения эластодинамики; P и S волны
16. Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

Необходимые определения

Интеграл Фурье:

$$\mathcal{I}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)t}\, \mathrm{d}\omega, \quad t \to +\infty$$

- $\varphi(\omega)$ — фаза
- ω_* : $\varphi'(\omega_*) = 0$ — стационарные точки.
- ω_* : $\varphi'(\omega_*) \neq 0$; $f, \varphi \in C^\infty(\omega_* - \delta, \omega_* + \delta)$ — обыкновенные точки.
- Точки не являющиеся обыкновенными — критические.
- Вкладом от изолированной критической точки ω_* называется интеграл

$$\hat{\mathcal{I}}(t, \omega_*) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, \eta(\omega - \omega_*)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)t}\, \mathrm{d}\omega,$$

Здесь η — нейтрализатор: $\eta \in \mathcal{D}$, $\eta \equiv 1$ в некоторой окрестности ω_*, $\operatorname{supp}\eta$ не содержит других критических точек.



Федорюк М.В. Метод перевала. М: Наука, 1977.

Лемма Римана-Лебега

Для интегрируемой f:

$$\mathcal{J}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}\omega = o(1), \quad t \to +\infty$$

Вклад от границ промежутка интегрирования

Теорема

Пусть $I = [a, b]$ — конечный отрезок,

$$\varphi'(\omega) \neq 0, \quad x \in I,$$

и $f(\omega) \in C^{N+1}$, $\varphi(\omega) \in C^{N+2}$. Тогда при $t \to +\infty$

$$\mathcal{I}(t) = \sum_{k=0}^{N} (it)^{-k-1} M^k \left(\frac{f(\omega)}{\varphi'(\omega)} \right) \Bigg|_a^b + o(t^{-N-1}).$$

$$M = -\frac{1}{\varphi'(\omega)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}$$

Главный член ($N = 0$) асимптотики имеет вид:

$$\mathcal{I}(t) = (it)^{-1} \left(\frac{f(b)}{\varphi'(b)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(b)t} - \frac{f(a)}{\varphi'(a)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(a)t} \right) + o(t^{-1}).$$

Вклад от границ промежутка интегрирования

Доказательство

$$\mathcal{J}(t) = \int_a^b f(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)t}\, d\omega = \frac{1}{it} \int_a^b \frac{f(\omega)}{\varphi'(\omega)}\, \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{it\varphi(\omega)}\right) = \frac{1}{it} \frac{f(\omega)}{\varphi'(\omega)}\, \mathrm{e}^{it\varphi(\omega)} \Big|_a^b + \frac{1}{it}\mathcal{J}_1(t)$$

$$\mathcal{J}_1(t) = -\int_a^b e^{\mathrm{i}\varphi(\omega)t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{f(\omega)}{\varphi'(\omega)}\right) \mathrm{d}\omega = o(1)$$

Лемма Эрдейи

Теорема

Пусть $a > 0,\ \alpha \geq 1,\ \beta > 0,\ f(\Omega) \in C^\infty,\ f^{(n)}(a) = 0\ \forall n$. Тогда

$$\int_0^a \Omega^{\beta-1} f(\Omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Omega^\alpha}\, \mathrm{d}\Omega \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}, \quad t \to \infty;$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!\alpha}\, \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi(k+\beta)}{2\alpha}}.$$

Принцип локализации

Лемма

Пусть $\varphi(\omega) \in C^\infty$, $f(\omega) \in \mathcal{D}$, причем $\varphi'(\omega) \neq 0$. Тогда при $t \to +\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)t}\, \mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty}).$$

Доказательство.

Интеграл фактически берется по конечному отрезку; применяем формулу для вкладов от границ промежутка интегрирования. □

Принцип локализации

Пусть $I = [a; b]$ — конечный отрезок, и пусть интеграл $\mathcal{I}(t)$ имеет конечное число изолированных критических точек $\omega_1, \ldots, \omega_k \in I$. Тогда

$$\mathcal{I}(t) = \sum_{j=1}^{k} \hat{\mathcal{I}}(t, \omega_j) + O(t^{-\infty}),$$

т.е. интеграл $\mathcal{I}(t)$ равен сумме вкладов от критических точек с точностью до $O(t^{-\infty})$.

Вклад от стационарной точки

Теорема

Пусть $I = [a, b]$ — конечный отрезок, и выполнены условия:

1. $f(\omega) \in C^1$, $\varphi(\omega) \in C^1$.
2. Функция $\varphi(\omega)$ имеет при $\omega \in I$ единственную стационарную точку ω_*: $\varphi'(\omega_*) = 0$.
3. $\varphi''(\omega_*) \neq 0$ (т.е. ω_* — невырожденная стационарная точка).

Тогда при $t \to +\infty$ главный член асимптотики имеет вид

$$\mathcal{I}(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\varphi''(\omega_*)|t}}\, f(\omega_*)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega_*)t + \frac{\mathrm{i}\pi}{4}\operatorname{sign}\varphi''(\omega_*)} + O(t^{-1}).$$

Доказательство.

- Промежуток интегрирования разбивается на два точкой ω_*.
- В каждом из интегралов делается замена переменной: $\omega = \psi(w)$: $\varphi(\omega) - \varphi(\omega_*) = w^2$.
- Применяем лемму Эрдейи к каждому из интегралов.

□

Задача

Задача

Вычислить асимптотику при $t \to +\infty$ функции Бесселя целого порядка $n \geq 0$

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \mathrm{i}(t \sin \omega - n\omega)\, \mathrm{d}\omega$$

Вклад от полюса: эталонные интегралы

$\exists\, f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp \mathrm{i}\pi\delta(\omega) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega \pm i0}\,\mathrm{d}\omega = \mp \mathrm{i}\pi f(0) + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Вклад от полюса: эталонные интегралы

$\exists\, f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp \mathrm{i}\pi\delta(\omega) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega \pm i0}\,\mathrm{d}\omega = \mp \mathrm{i}\pi f(0) + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Лемма

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty})$

Вклад от полюса: эталонные интегралы

$\exists\ f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp \mathrm{i}\pi\delta(\omega) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega \pm i0}\,\mathrm{d}\omega = \mp \mathrm{i}\pi f(0) + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Лемма

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty})$

Доказательство.

$\exists\ \eta(\omega) \in \mathcal{D}:\ \eta \equiv 1$ при $|\omega| < \delta$, $\quad f(\omega) = \big(f(\omega) - \eta(\omega) f(0)\big) + \eta(\omega) f(0)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega+i0}\,\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f(\omega)-\eta(\omega)f(0))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega+i0}\,\mathrm{d}\omega + f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega+i0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty}) + f(0)\left(\int_{\to\curvearrowright\to} \frac{\eta(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega+i0}\,\mathrm{d}\omega\right) =$$

$$= O(t^{-\infty}) + f(0)\left(\frac{i}{t}\right)^N \left(\int_{\to\curvearrowright\to} \frac{d^N}{d\omega^N}\left(\frac{\eta(\omega)}{\omega}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\right) \underset{\left|\frac{d^N}{d\omega^N}\left(\frac{\eta(\omega)}{\omega}\right)\right| \le C_N}{\overset{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}| \le 1}{=\!=\!=\!=}} O(t^{-\infty})$$

Контур $\to\curvearrowright\to$: 2 луча и полуокружность фиксированного радиуса $\rho < \delta$, где $\eta \equiv 1$. □

Вклад от полюса: эталонные интегралы

$\exists\, f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp \mathrm{i}\pi\delta(\omega) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega \pm i0}\,\mathrm{d}\omega = \mp \mathrm{i}\pi f(0) + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Лемма

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty})$

Следствие

$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \mathrm{i}\pi f(0) + O(t^{-\infty})$

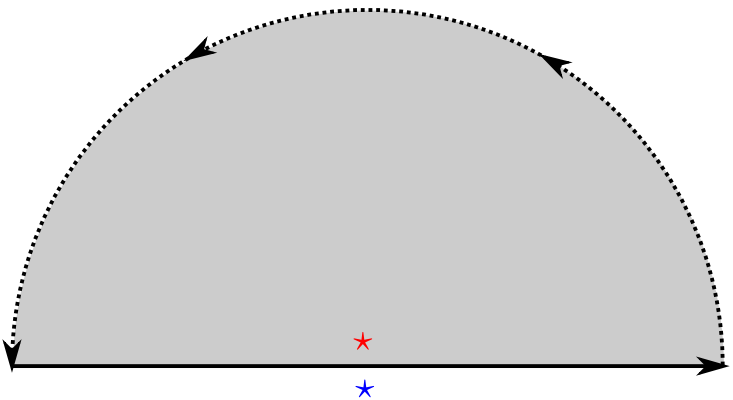
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega = 2i\pi f(0) + O(t^{-\infty})$

Вклад от полюса: аналогия с вычислением интеграла через сумму вычетов

Для голоморфных и ограниченных в верхней полуплоскости f:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega = 2i\pi f(0).$$

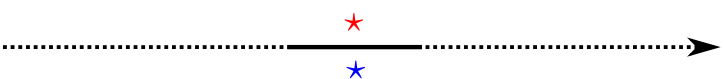


Вклад от полюса: аналогия с вычислением интеграла через сумму вычетов

Для функций вещественной переменной $f \in \mathcal{D}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega = 2i\pi f(0) + O(t^{-\infty}).$$



Вклад от полюса: эталонные интегралы

$\exists\, f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp \mathrm{i}\pi\delta(\omega) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega \pm i0}\,\mathrm{d}\omega = \mp \mathrm{i}\pi f(0) + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Вклад от полюса: эталонные интегралы

$\exists\, f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp \mathrm{i}\pi\delta(\omega) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega \pm i0}\,\mathrm{d}\omega = \mp \mathrm{i}\pi f(0) + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Лемма

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty})$

Вклад от полюса: эталонные интегралы

$\exists\, f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp \mathrm{i}\pi\delta(\omega) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega \pm i0}\,\mathrm{d}\omega = \mp \mathrm{i}\pi f(0) + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Лемма

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty})$

Доказательство.

Аналогично □

Вклад от полюса: эталонные интегралы

$\exists\, f(\omega) \in \mathcal{D}$. Рассмотрим интегралы Фурье

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp \mathrm{i}\pi\delta(\omega) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega \pm i0}\,\mathrm{d}\omega = \mp \mathrm{i}\pi f(0) + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Лемма

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega - i0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty})$

Следствие

$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = -\mathrm{i}\pi f(0) + O(t^{-\infty})$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega + i0}\,\mathrm{d}\omega = -2i\pi f(0) + O(t^{-\infty})$

Вклад от полюса: общий случай

Теорема

Пусть $f(\omega) \in \mathcal{D}$, $\varphi(\omega) \in C^\infty$, причем $\varphi'(\omega) \neq 0$. Тогда при $t \to +\infty$

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)t}}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \pi\mathrm{i}\alpha\, f(0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(0)t} + O(t^{-\infty}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)t}}{\omega + \mathrm{i}\alpha 0}\,\mathrm{d}\omega = O(t^{-\infty}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)t}}{\omega - \mathrm{i}\alpha 0}\,\mathrm{d}\omega = 2\pi\mathrm{i}\alpha\, f(0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(0)t} + O(t^{-\infty}),$$

где $\alpha = \operatorname{sign}\varphi'(0)$.

Доказательство.

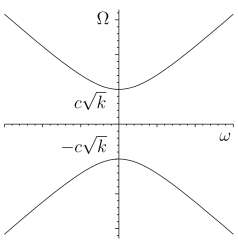
Заменой переменных $\omega = \psi(w)$: $\varphi(\omega) - \varphi(0) = w$ сводим интегралы к эталонным. □

1. Метод характеристик для гиперболических уравнений
2. Необходимые сведения из математического анализа
3. Начальные сведения об обобщенных функциях
4. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
5. Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
6. Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
7. Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
8. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
9. Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
10. Метод стационарной фазы
11. Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
12. Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
13. Уравнения Лапласа (Пуассона)
14. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$
15. Уравнения эластодинамики; P и S волны
16. Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость.

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = 0 \qquad u = u_0(\omega, \Omega)\, e^{-i\omega x} e^{-i\Omega t} \Rightarrow$$

Дисперсионное соотношение: $\Omega^2 - c^2(\omega^2 + k) = 0$



$\Omega_* = c\sqrt{k}$ — частота отсечки

$\frac{\Omega}{\omega}$ — фазовая скорость

$\frac{d\Omega}{d\omega} = \frac{c^2}{(\Omega/\omega)} = c\frac{\sqrt{\Omega^2 - \Omega_*^2}}{\Omega}$ —

— групповая скорость

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \to +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t)\sin\Omega_0 t\,\delta(x),$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \to +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t)\exp i\Omega_0 t\,\delta(x),$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \to +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t)\exp i\Omega_0 t\,\delta(x),$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

$$\ddot{u}_F + 2c^2\gamma\dot{u} + c^2(\omega^2 + k)u_F = c^2PH(t)\exp i\Omega_0 t \quad \Longrightarrow$$

$$u_F = u_{F_*} + C_+\exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}\,t) + C_-\exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}\,t).$$

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F_*} = \frac{c^2P\exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 2\gamma c^2\Omega_0 i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Воспользовавшись НУ найдем C_-, C_+:

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \to +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t)\exp i\Omega_0 t\,\delta(x),$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

$$\ddot{u}_F + 2c^2\gamma\dot{u} + c^2(\omega^2 + k)u_F = c^2PH(t)\exp i\Omega_0 t \quad \Longrightarrow$$

$$u_F = u_{F_*} + C_+\exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}\,t) + C_-\exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}\,t).$$

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F_*} = \frac{c^2P\exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 0i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Воспользовавшись НУ найдем C_-, C_+:

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \to +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t)\exp i\Omega_0 t\,\delta(x),$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

$$\ddot{u}_F + 2c^2\gamma\dot{u} + c^2(\omega^2 + k)u_F = c^2PH(t)\exp i\Omega_0 t \quad \Longrightarrow$$

$$u_F = u_{F_*} + C_+\exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}\,t) + C_-\exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}\,t).$$

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F_*} = \frac{c^2P\exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 0i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Воспользовавшись НУ найдем C_-, C_+:

$$\begin{cases} C_+ + C_- = -u_{F_*}\big|_{t=0} \\ C_+ - C_- = -\dfrac{\Omega_0}{c\sqrt{\omega^2 + k}}u_{F_*}\big|_{t=0} \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Рассмотрим задачу ($\gamma \to +0$, $\Omega_0 > c\sqrt{k}$)

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t)\exp i\Omega_0 t\,\delta(x),$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

$$\ddot{u}_F + 2c^2\gamma\dot{u} + c^2(\omega^2 + k)u_F = c^2PH(t)\exp i\Omega_0 t \quad \Longrightarrow$$

$$u_F = u_{F_*} + C_+\exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}\,t) + C_-\exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}\,t).$$

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F_*} = \frac{c^2P\exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 0i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Воспользовавшись НУ найдем C_-, C_+:

$$\begin{cases} C_+ + C_- = -u_{F_*}\big|_{t=0} \\ C_+ - C_- = -\dfrac{\Omega_0}{c\sqrt{\omega^2 + k}}u_{F_*}\big|_{t=0} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad C_\pm = \frac{-c\sqrt{\omega^2 + k} \mp \Omega_0}{2c\sqrt{\omega^2 + k}}\,u_{F_*}\big|_{t=0}$$

Стационарное решение

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F_*} = \frac{c^2 P \exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 0i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Находим корни знаменателя:

$$c^2\omega^2 = \Omega_0^2 - c^2 k - 0i \quad \Longrightarrow \quad \omega = \omega_\pm \equiv \pm\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} \mp 0i$$

Разлагаем дробь на простейшие:

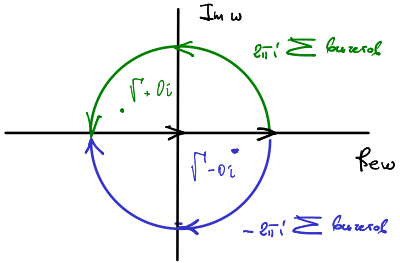
$$u_{F_*} = \frac{P \exp i\Omega_0 t}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left(\frac{1}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \frac{1}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i} \right)$$

Применяем обратное преобразование Фурье по x:

$$u_* = \frac{P \exp i\Omega_0 t}{4\pi\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i\omega x)\, d\omega}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i\omega x)\, d\omega}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i} \right)$$

Вычисляем интегралы через вычеты. Для $x > 0$ учитываем полюс в верхней полуплоскости, для $x < 0$ — в нижней.

$$u_* = \frac{e^{i\Omega_* t}}{2\pi} \frac{p}{2\sqrt{\frac{\Omega_*^2}{c^2} - k}} \left(\int \frac{e^{-i\omega x}\, d\omega}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_*^2}{c^2} - k} + 0i} - \int \frac{e^{-i\omega x}\, d\omega}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_*^2}{c^2} - k} - 0i} \right)$$



$x > 0$: $u_* = \frac{-ip}{2\sqrt{\frac{\Omega_*^2}{c^2} - k}} e^{i\Omega_* t} e^{-i\sqrt{\ } x}$

$x < 0$: $u_* = \frac{-ip}{2\sqrt{\frac{\Omega_*^2}{c^2} - k}} e^{i\Omega_* t} e^{i\sqrt{\ } x}$

Вычислим Im:

$$u_* = -\frac{p}{2\sqrt{\frac{\Omega_*^2}{c^2} - k}} \cos\left(\Omega_* t - \sqrt{\frac{\Omega_*^2}{c^2} - k}\,|x|\right)$$

Асимптотика переходного процесса

$$u_F = u_{F_*} + \tilde{u}_F \equiv u_{F_*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}\, t) + C_- \exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}\, t),$$

$$C_\pm = \frac{-c\sqrt{\omega^2 + k} \mp \Omega_0}{2c\sqrt{\omega^2 + k}}\, u_{F_*}\big|_{t=0},$$

$$u_{F_*}\big|_{t=0} = \frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left(\frac{1}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \frac{1}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i} \right),$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_F \exp(-i\omega x)\, d\omega.$$

Асимптотика переходного процесса

$$u_F = u_{F_*} + \tilde{u}_F \equiv u_{F_*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}\, t) + C_- \exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}\, t),$$

$$C_\pm = \frac{-c\sqrt{\omega^2 + k} \mp \Omega_0}{2c\sqrt{\omega^2 + k}}\, u_{F_*}\big|_{t=0},$$

$$u_{F_*}\big|_{t=0} = \frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left(\frac{1}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \frac{1}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i} \right),$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_F \exp(-i\omega W t)\, d\omega.$$

Рассматривая при $t \to \infty$ переходный процесс на фронте, движущимся от источника с произвольной скоростью W, видим что основной вклад порядка $O(1)$ в финальный результат соответствуют тем же полюсам, что были рассмотрены при исследовании стационарного решения. Применяем теорему о вкладе от полюса в интеграл Фурье.

Вычисляем $C_-(\omega_\pm) = 0$, $C_+(\omega_\pm) = -u_{F_*}\big|_{t=0}$, $c\sqrt{\omega_\pm^2 + k} = \Omega_0$.

Асимптотика переходного процесса

$$u_F = u_{F_*} + \tilde{u}_F \equiv u_{F_*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}t) + o(1),$$
$$C_+ = -u_{F_*}\big|_{t=0},$$

$$u_{F_*}\big|_{t=0} = \frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left(\frac{1}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \frac{1}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i} \right),$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_{F_*} \exp(-i\omega W t)\, d\omega.$$

Для интеграла Фурье фаза равна:

$$\varphi(\omega) = c\sqrt{\omega^2 + k} - \omega W.$$

Вычисляем $\varphi'(\omega_\pm)$ с учетом дисперсионного соотношения $\Omega^2 = c^2(\omega^2 + k)$:

$$\varphi'(\omega_\pm) = \pm c_g(\Omega_0) - W.$$

В соответствии с теоремой имеем:

- $|W| < c_g$: оба вклада в переходный процесс — o(1), решение равно стационарному;
- $|W| > c_g$: вклад в переходный процесс равен стационарному решению с обратным знаком, решение равно $o(1)$;
- $|W| \simeq c_g$: стационарная точка совпадает с полюсом, требуется дополнительное исследование.

Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником

Задача

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t)\sin\Omega_0 t\,\delta(x),$$
$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Асимптотика решения при $t \to \infty$, $x = Wt$, $c_g(\Omega_0) - \frac{|x|}{t} \neq 0$

$$u = -\frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}}\cos\left(\Omega_0 t - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}\,|x|\right)H\left(c_g(\Omega_0) - \frac{|x|}{t}\right) + O(t^{-1/2})$$

Групповая скорость

Основной вывод

На больших временах скорость переднего фронта гармонического сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником, равна групповой скорости, соотвествующей частоте колебаний источника.

Важные идеи, использованные при решении задачи

- Асимптотическая оценка интеграла обратного преобразования Фурье.
- Принцип предельного поглощения.
- Рассмотрение решения на подвижном фронте, движущимся от источника с произвольной скоростью.

1. Метод характеристик для гиперболических уравнений
2. Необходимые сведения из математического анализа
3. Начальные сведения об обобщенных функциях
4. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
5. Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
6. Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
7. Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
8. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
9. Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
10. Метод стационарной фазы
11. Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
12. Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
13. Уравнения Лапласа (Пуассона)
14. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$
15. Уравнения эластодинамики; P и S волны
16. Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

Нестационарное возмущение системы с дисперсией

https://en.wikipedia.org/wiki/Breather

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t)\,\delta(x),$$
$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \quad \Longrightarrow$$

Нестационарное возмущение системы с дисперсией

https://en.wikipedia.org/wiki/Breather

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t)\,\delta(x),$$
$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \quad \Longrightarrow \quad u_F = H(t)\,\frac{\sin\sqrt{\omega^2+1}\,t}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_F \exp(-i\omega x)\,d\omega \quad \Longrightarrow$$

Нестационарное возмущение системы с дисперсией

https://en.wikipedia.org/wiki/Breather

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t)\,\delta(x),$$
$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \quad \Longrightarrow \quad u_F = H(t)\,\frac{\sin\sqrt{\omega^2+1}\,t}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_F \exp(-i\omega x)\,d\omega \quad \Longrightarrow \quad u = -\frac{c}{2}H\big(ct-|x|\big)J_0\big(\sqrt{k(c^2t^2-x^2)}\big)$$

Нестационарное возмущение системы с дисперсией

https://en.wikipedia.org/wiki/Breather

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t)\,\delta(x),$$
$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \quad \Longrightarrow \quad u_F = H(t)\,\frac{\sin\sqrt{\omega^2+1}\,t}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_F \exp(-i\omega W t)\,d\omega \quad \Longrightarrow$$

Нестационарное возмущение системы с дисперсией

https://en.wikipedia.org/wiki/Breather

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t)\,\delta(x),$$
$$u\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по x:

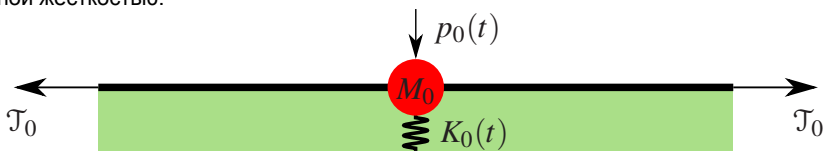
$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \quad \Longrightarrow \quad u_F = H(t)\,\frac{\sin\sqrt{\omega^2+1}\,t}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_F \exp(-i\omega W t)\,d\omega \quad \Longrightarrow \quad u = O(t^{-1/2}), \quad t \to \infty$$

Необходимое условие локализации в линейных системах

Необходимое условие локализации в линейных системах — наличие пространственной неоднородности.

В механических системах такими неоднородностями могут быть инерционные включения и/или зоны с ослабленной жесткостью.



Вынужденные колебания струны на упругом основании

$$u'' - \ddot{u} - u = P\exp(-\mathrm{i}\Omega t)\,\delta(x),$$

$\exists\, u = \hat{u}(x)\,\exp(-i\Omega t)$:

$$\hat{u}'' - (1-\Omega^2)\hat{u} = P\,\delta(x).$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 - \Omega^2 + 1 = 0.$$

Решение:

$$\hat{u} = -P\,\frac{\exp\big(-\sqrt{1-\Omega^2}|x|\big)}{2\sqrt{1-\Omega^2}}, \quad |\Omega| < \Omega_*;$$

$$\hat{u} = P\,\frac{\exp\big(\mathrm{i}\ \mathrm{sign}\,\Omega\,\sqrt{\Omega^2-1}|x|\big)}{2\mathrm{i}\ \mathrm{sign}\,\Omega\,\sqrt{\Omega^2-1}}, \quad |\Omega| > \Omega_*.$$

Здесь: $\Omega_* = 1$ — частота отсечки.

$|\Omega| > \Omega_*$: Синусоидальные бегущие волны

$|\Omega| < \Omega_*$: Локализованные решения, удовлетворяющие условиям конечности энергии:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}^2\,dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}'^2\,dx < \infty.$$

Локализованные колебания струны на упругом основании

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t)\,\delta(x),$$
$$P(t) = -M\ddot{u}(0,t) - Ku(0,t),$$
$$M \geq 0, \qquad K \lessgtr 0.$$

$\exists\, u = \hat{u}(x)\,\exp(-i\Omega t)$:

$$\hat{u}'' - (1-\Omega^2)\hat{u} = (K - M\Omega^2)\hat{u}(0)\,\delta(x).$$

Ищем решения с конечной энергией:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}^2\,dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}'^2\,dx < \infty.$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 + A^2(\Omega) = 0, \qquad A^2(\Omega) = 1 - \Omega^2.$$

Решение:

$$\hat{u} = -(K - M\Omega^2)\,\hat{u}(0)\frac{\exp\left(-\sqrt{1-\Omega^2}|x|\right)}{2\sqrt{1-\Omega^2}}, \quad |\Omega| < 1;$$

Частотное уравнение для локализованной моды:

$$2\sqrt{1-\Omega_0^2} = M\Omega_0^2 - K.$$

Локализованные колебания струны на упругом основании

Частотное уравнение для локализованной моды:

$$2\sqrt{1-\Omega_0^2} = M\Omega_0^2 - K.$$

Задача

Найти выражения для частоты Ω_0 локализованной моды и необходимые и достаточные условия существования локализованной моды в частных случаях a) $K = 0$ b) $M = 0$.

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t)\,\delta(x),$$
$$P(t) = -M\ddot{u}(0,t) - Ku(0,t) + p(t),$$

Применяем преобразование Фурье по t:

$$u_F'' - A^2(\Omega)u_F = \big(Ku_F(0,\Omega) - M\Omega^2 u_F(0,\Omega) - p_F(\Omega)\big)\,\delta(x),$$

Решение:

$$\hat{u} = -\big((K - M\Omega^2)\,\hat{u}(0) - p_F(\Omega)\big)\frac{\exp\big(-\sqrt{1-\Omega^2}|x|\big)}{2\sqrt{1-\Omega^2}}, \quad |\Omega| < 1;$$

$$u(0,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_F e^{-\mathrm{i}\Omega\tau}\,\mathrm{d}\Omega}{2\sqrt{1-\Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}$$

$$=$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t)\,\delta(x),$$
$$P(t) = -M\ddot{u}(0,t) - Ku(0,t) + p(t),$$

Применяем преобразование Фурье по t:

$$u_F'' - A^2(\Omega)u_F = \big(Ku_F(0,\Omega) - M\Omega^2 u_F(0,\Omega) - p_F(\Omega)\big)\,\delta(x),$$

Решение:

$$\hat{u} = -\big((K - M\Omega^2)\,\hat{u}(0) - p_F(\Omega)\big)\frac{\exp\big(-\sqrt{1-\Omega^2}|x|\big)}{2\sqrt{1-\Omega^2}}, \quad |\Omega| < 1;$$

$$u(0,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_F e^{-\mathrm{i}\Omega\tau}\,\mathrm{d}\Omega}{2\sqrt{1-\Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}$$
$$= -\mathrm{i}\sum_{\bar{\Omega}=\pm\Omega_0-\mathrm{i}0} p_f(\bar{\Omega})\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{2\sqrt{1-\Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}, \bar{\Omega}\right)\exp(-\mathrm{i}\bar{\Omega}\tau) + o(1)$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t)\,\delta(x),$$
$$P(t) = -M\ddot{u}(0,t) - Ku(0,t) + p(t),$$

Применяем преобразование Фурье по t:

$$u_F'' - A^2(\Omega)u_F = \big(Ku_F(0,\Omega) - M\Omega^2 u_F(0,\Omega) - p_F(\Omega)\big)\,\delta(x),$$

Решение:

$$\hat{u} = -\big((K - M\Omega^2)\,\hat{u}(0) - p_F(\Omega)\big)\frac{\exp\big(-\sqrt{1-\Omega^2}|x|\big)}{2\sqrt{1-\Omega^2}}, \quad |\Omega| < 1;$$

$$u(0,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_F e^{-\mathrm{i}\Omega\tau}\,\mathrm{d}\Omega}{2\sqrt{1-\Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}$$
$$= -\mathrm{i}\sum_{\bar{\Omega}=\pm\Omega_0-\mathrm{i}0} p_f(\bar{\Omega})\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{2\sqrt{1-\Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}, \bar{\Omega}\right)\exp(-\mathrm{i}\bar{\Omega}\tau) + o(1)$$
$$= \frac{\sqrt{1-\Omega_0^2}\,|p_F(\Omega_0)|}{\Omega_0\Big(1 + M\sqrt{1-\Omega_0^2}\Big)}\,\sin\big(\Omega_0 t - \arg p_F(\Omega_0)\big) + o(1), \quad t \to \infty.$$

Балка Бернулли-Эйлера на упругом основании: функция Грина

$$\ddot{G} + G'''' + G = \exp(-\mathrm{i}\Omega t)\delta(x), \qquad |\Omega| < 1.$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^4 - \Omega^2 + 1 = 0.$$

Ищем решение в виде:

$$G = 2\,\mathrm{Re}\left(G_0(x,\Omega)\right)\exp(-\mathrm{i}\Omega t),$$

$$G_0(x,\Omega) = \begin{cases} \dfrac{C}{2}\,\exp\Big(\mathrm{i}\big(\omega_+ x - \varphi/2\big)\Big), & x > 0; \\ \dfrac{C}{2}\,\exp\Big(\mathrm{i}\big(\omega_- x + \varphi/2\big)\Big), & x < 0; \end{cases}$$

где C, φ — вещественные константы, $\omega_\pm$ — волновые числа

$$\omega_\pm = \pm a\mathrm{i} + a, \qquad a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{1-\Omega^2}.$$

$$\mathrm{Re}[\mathrm{i}\omega\exp(\mp\mathrm{i}\varphi/2)] = 0,$$
$$\mathrm{Re}[(\mathrm{i}\omega)^2\exp(\mp\mathrm{i}\varphi/2)] = 0,$$
$$2C\,\mathrm{Re}[(\mathrm{i}\omega)^3\exp(\mp\mathrm{i}\varphi/2)] = 1.$$

Балка Бернулли-Эйлера на упругом основании: функция Грина

$$\ddot{G} + G'''' + G = \exp(-\mathrm{i}\Omega t)\delta(x), \qquad |\Omega| < 1.$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^4 - \Omega^2 + 1 = 0.$$

Ищем решение в виде:

$$G = 2\,\mathrm{Re}\left(G_0(x,\Omega)\right)\exp(-\mathrm{i}\Omega t),$$

$$G_0(x,\Omega) = \begin{cases} \dfrac{C}{2}\,\exp\Big(\mathrm{i}\big(\omega_+ x - \varphi/2\big)\Big), & x > 0; \\ \dfrac{C}{2}\,\exp\Big(\mathrm{i}\big(\omega_- x + \varphi/2\big)\Big), & x < 0; \end{cases}$$

где C, φ — вещественные константы, $\omega_\pm$ — волновые числа

$$\omega_\pm = \pm a\mathrm{i} + a, \qquad a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{1-\Omega^2}.$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2} = 0,$$

$$a^3\left(-\sin\frac{\varphi}{2} + 3\sin\frac{\varphi}{2} + 3\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2C}.$$

Балка Бернулли-Эйлера на упругом основании: функция Грина

$$\ddot{G} + G'''' + G = \exp(-\mathrm{i}\Omega t)\delta(x), \qquad |\Omega| < 1.$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^4 - \Omega^2 + 1 = 0.$$

Ищем решение в виде:

$$G = 2\,\mathrm{Re}\left(G_0(x,\Omega)\right)\exp(-\mathrm{i}\Omega t),$$

$$G_0(x,\Omega) = \begin{cases} \dfrac{C}{2}\,\exp\Big(\mathrm{i}\big(\omega_+ x - \varphi/2\big)\Big), & x > 0; \\ \dfrac{C}{2}\,\exp\Big(\mathrm{i}\big(\omega_- x + \varphi/2\big)\Big), & x < 0; \end{cases}$$

где C, φ — вещественные константы, $\omega_\pm$ — волновые числа

$$\omega_\pm = \pm a\mathrm{i} + a, \qquad a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{1-\Omega^2}.$$

$$C = \frac{1}{2(1-\Omega^2)^{3/4}},$$

$$\tan\frac{\varphi}{2} = 1.$$

Балка Бернулли-Эйлера на упругом основании: функция Грина

$$\ddot{G} + G'''' + G = \exp(-\mathrm{i}\Omega t)\delta(x), \qquad |\Omega| < 1.$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^4 - \Omega^2 + 1 = 0.$$

Ищем решение в виде:

$$G = 2\,\mathrm{Re}\left(G_0(x,\Omega)\right)\exp(-\mathrm{i}\Omega t),$$

$$G_0(x,\Omega) = \begin{cases} \dfrac{C}{2}\,\exp\Big(\mathrm{i}\big(\omega_+ x - \varphi/2\big)\Big), & x > 0; \\ \dfrac{C}{2}\,\exp\Big(\mathrm{i}\big(\omega_- x + \varphi/2\big)\Big), & x < 0; \end{cases}$$

где C, φ — вещественные константы, $\omega_\pm$ — волновые числа

$$\omega_\pm = \pm a\mathrm{i} + a, \qquad a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{1-\Omega^2}.$$

$$2\,\mathrm{Re}\,G_0(x,\Omega) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{-a|x|}\cos\big(a|x| - \pi/4\big)}{(1-\Omega^2)^{3/4}}.$$

Локализованные колебания балки на упругом основании: спектральная задача

$$\ddot{w} + w'''' + w = P(t)\delta(x),$$
$$P(t) = -Kw(0,t).$$

Задача

Найти частотное уравнение, выражение для частоты Ω_0 локализованной моды, необходимые и достаточные условия существования локализованной моды.

Локализованные колебания балки на упругом основании: нестационарная задача

$$\ddot{w} + w'''' + w = P(t)\delta(x),$$
$$P(t) = -Kw(0,t) + p(t).$$

Задача

Найти выражение для незатухающих колебаний.

Параметрическое возмущение системы с единственной низкочастотной локализованной модой

Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной жесткостью: метод многих масштабов

$$\ddot{u} + \Omega_0^2(\epsilon t)u = 0, \qquad t = O(\epsilon^{-1}).$$



Найфэ А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

Используем асимптотический анзац (аппроксимацию решения):

$$T = \epsilon t,$$
$$u(t) = W(T)\,\exp\varphi(t),$$
$$\dot{\varphi} = -\mathrm{i}\,\Omega_0(T),$$
$$W(T) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j W_j(T).$$

Переменные φ, T считаем независимыми.

$$(\dot{\cdot}) = -\mathrm{i}\,\Omega_0\,\partial_\varphi + \epsilon\,\partial_T,$$
$$(\ddot{\cdot}) = -\Omega_0^2\,\partial^2_{\varphi\varphi} - 2\epsilon\mathrm{i}\,\Omega_0\,\partial^2_{\varphi T} - \epsilon\mathrm{i}\,{\Omega_0}'_T\partial_\varphi + O(\epsilon^2),$$

Подставляя в уравнение, получаем уравнение первого приближения:

$$2\Omega_0 {W_0}'_T + {\Omega_0}'_T W_0 = 0.$$

Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной жесткостью: метод многих масштабов

$$\ddot{u} + \Omega_0^2(\epsilon t)u = 0$$

Уравнение первого приближения:

$$2\Omega_0 W_{0T}' + \Omega_{0_T}' W_0 = 0.$$

$$\frac{\mathrm{d}W_0}{W_0} = -\frac{\mathrm{d}\Omega_0}{2\Omega_0}$$

$$W_0 = C_0 \exp\left(-\int \frac{\mathrm{d}\Omega_0}{2\Omega_0}\right) = \frac{C_0}{\sqrt{|\Omega_0|}},$$

Собирая линейную комбинацию двух решений, отвечающих $\pm\Omega_0$, находим:

$$u(0,\tau) = \frac{2C_0}{\sqrt{|\Omega_0|}} \sin\left(\int_0^t \Omega_0(T)\,\mathrm{d}T - D_0\right) + O(\epsilon).$$

Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой: метод многих масштабов

Задача

Исследовать свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой.

Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой: метод многих масштабов

Задача

Исследовать свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой.

$$(M(\varepsilon t)\dot{u})^{\cdot} + u = 0.$$

Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой: метод многих масштабов

Задача

Исследовать свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой.

$$(M(\varepsilon t)\dot{u})^{\cdot} + u = 0.$$

$\supset \Omega_0^2 = 1/M$. Уравнение первого приближения:

$$2\Omega_0 W_{0T}' + \left(\Omega_{0T}' + \Omega_0 \frac{M_T'}{M}\right) W_0 = 0.$$

$$\frac{\mathrm{d}W_0}{W_0} = -\frac{\mathrm{d}\Omega_0}{2\Omega_0} - \frac{\mathrm{d}M}{2M}$$

$$W_0 = C_0 \exp\left(-\int\left(\frac{\mathrm{d}\Omega_0}{2\Omega_0} + \frac{\mathrm{d}M}{2M}\right)\right) = \frac{C_0}{\sqrt{|\Omega_0 M|}} = C_0\sqrt{|\Omega_0|},$$

Собирая линейную комбинацию двух решений, отвечающих $\pm\Omega_0$, находим:

$$u(0,\tau) = 2C_0\sqrt{|\Omega_0|}\sin\left(\int_0^t \Omega_0(T)\,\mathrm{d}T - D_0\right) + O(\varepsilon).$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t)\,\delta(x),$$
$$P(t) = -M\ddot{u}(0,t) - K(\epsilon t)u(0,t) + p(t),$$

- $\epsilon = o(1)$,
- $t = O(\epsilon^{-1})$,
- $K(\epsilon t)$ такова, что локализованная мода $\exists\ \forall t$.

Будем предполагать, что

- Частотное уравнение
$$2\sqrt{1 - \Omega_0^2(\epsilon t)} = M\Omega_0^2(\epsilon t) - K(\epsilon t)$$
выполняется $\forall t$;
- Дисперсионное соотношение
$$\omega^2(\epsilon t) - \Omega^2(\epsilon t) + 1 = \omega^2 + A^2(\Omega) = 0$$
при $x = \pm 0$ выполняется $\forall t$.

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

Используем асимптотический анзац ($t > 0$, $x \lesseqgtr 0$):

$$u(x,t) = W(X,T)\,\exp\varphi(x,t),$$
$$T = \epsilon t, \quad X = \epsilon x,$$
$$\varphi' = \mathrm{i}\,\omega(X,T), \quad \dot\varphi = -\mathrm{i}\,\Omega(X,T),$$
$$W(X,T) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j W_j(X,T),$$

причем

$$\Omega'_X + \omega'_T = 0.$$

Переменные $\varphi,\ T,\ X$ считаем независимыми.

$$(\dot\cdot) = -\mathrm{i}\,\Omega\,\partial_\varphi + \epsilon\,\partial_T,$$
$$(\ddot\cdot) = -\Omega^2\,\partial^2_{\varphi\varphi} - 2\epsilon\mathrm{i}\,\Omega\,\partial^2_{\varphi T} - \epsilon\mathrm{i}\,\Omega'_T\,\partial_\varphi + O(\epsilon^2),$$
$$(\cdot)' = \mathrm{i}\,\omega\,\partial_\varphi + \epsilon\,\partial_X,$$
$$(\cdot)'' = -\omega^2\,\partial^2_{\varphi\varphi} + 2\epsilon\mathrm{i}\,\omega\,\partial^2_{\varphi X} + \epsilon\mathrm{i}\,\omega'_X\,\partial_\varphi + O(\epsilon^2).$$

Условия при $x = 0$:

$$\Omega(\pm 0, T) = \Omega_0(T),$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t)\,\delta(x),$$
$$P(t) = -M\ddot{u}(0,t) - K(\epsilon t)u(0,t) + p(t),$$

$$\Longrightarrow \quad [u'] = -M\ddot{u}(0,t) - K(\epsilon t)u(0,t) + \cancel{p(t)}, \quad t \to \infty.$$

Подставляя в выражение

$$[u'] = -M\ddot{u}(0,t) - K(\epsilon t)u(0,t),$$

представления для решения и дифференциальных операторов, получим:

$$M(2\Omega_0 W_{0T}' + \Omega_{0T}' W_0) = \mathrm{i}[W_{0X}'].$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

$$u'' - \ddot{u} - u = \cancel{-P(t)\,\delta(x)}, \quad x = \pm 0.$$

Подставляя представления для решения и дифференциальных операторов, получим:

$$2\omega\, W_0{}'_X + \omega'_X\, W_0 + 2\Omega_0\, W_0{}'_T + \Omega_0{}'_T\, W_0 = 0.$$

Имеем:

$$\omega = \mathrm{i}\,\mathrm{sign}\, x\, A(\Omega_0),$$
$$\omega'_X = \omega'_\Omega\, \Omega'_X = -\omega'_\Omega\, \omega'_T.$$

Отсюда:

$$W_0{}'_X = -\frac{2\Omega_0\, W_0{}'_T + (-\omega'_\Omega \omega'_T + \Omega_0{}'_T)\, W_0}{2\mathrm{i}\,\mathrm{sign}\, x\, A(\Omega_0, T)},$$

$$[W_0{}'_X] = -\frac{\Lambda_2 W_0 + \Lambda_1 W_0{}'_T}{\mathrm{i}A(\Omega_0)},$$

$$\Lambda_1 \equiv 2\Omega_0,$$

$$\Lambda_2 \equiv A'_\Omega(\Omega_0) A'_T(\Omega_0) + \Omega_0{}'_T = \frac{\Omega_0^2 \Omega_0{}'_T}{1 - \Omega_0^2} + \Omega_0{}'_T.$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

Приравнивая выражения для $[W_{0X}']$, получаем уравнение для $\bar{W}_0(T) \equiv W_0(0,T)$:

$$M\left(2\Omega_0 \bar{W}_{0T}' + \Omega_{0T}' \bar{W}_0\right) = -\frac{\Lambda_2 \bar{W}_0 + \Lambda_1 \bar{W}_{0T}'}{A(\Omega_0)}$$

или

$$\bar{W}_{0T}' + \left(\frac{\Omega_{0T}'}{2\Omega_0} + \frac{\Omega_0 \Omega_{0T}'}{2(1-\Omega_0^2)\left(1 + M\sqrt{1-\Omega_0^2}\right)} \right) \bar{W}_0 = 0.$$

Общее решение имеет вид:

$$\bar{W}_0 = \frac{C_0}{2} \exp\left(-\int \frac{\mathrm{d}\Omega_0}{2\Omega_0} - \int \frac{\Omega_0 \, \mathrm{d}\Omega_0}{2(1-\Omega_0^2)\left(1 + M\sqrt{1-\Omega_0^2}\right)} \right)$$

Вычисляя интегралы, находим:

$$\bar{W}_0 = \frac{C_0}{2} \frac{\left(1-\Omega_0^2\right)^{1/4}}{\Omega_0^{1/2}\left(1 + M\sqrt{1-\Omega_0^2}\right)^{1/2}}.$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

Комбинируя найденное решение с комплексно-сопряженным, находим

$$u(0,t) \sim C_0 \frac{\left(1-\Omega_0^2\right)^{1/4}}{\Omega_0^{1/2}\left(1+M\sqrt{1-\Omega_0^2}\right)^{1/2}} \sin\left(\int_0^t \Omega_0(T)\,\mathrm{d}T - D_0\right).$$

Константы C_0 и D_0 должны быть определены приравниванием найденного решения при $t=0$ к решению задачи в нулевом приближении (при $\epsilon=0$):

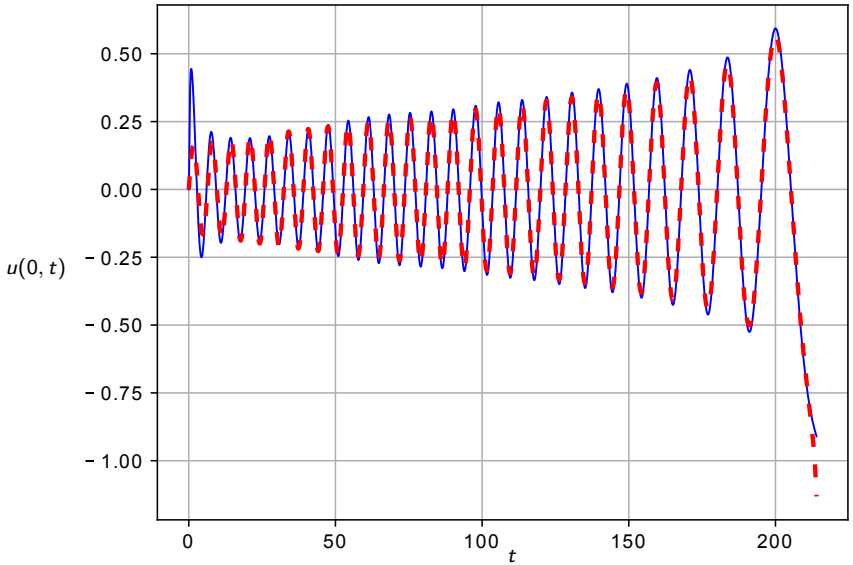
$$u(0,t) = \frac{\sqrt{1-\Omega_0^2}\,|p_F(\Omega_0)|}{\Omega_0\left(1+M\sqrt{1-\Omega_0^2}\right)} \sin\left(\Omega_0 t - \arg p_F(\Omega_0)\right) + o(1).$$

Находим:

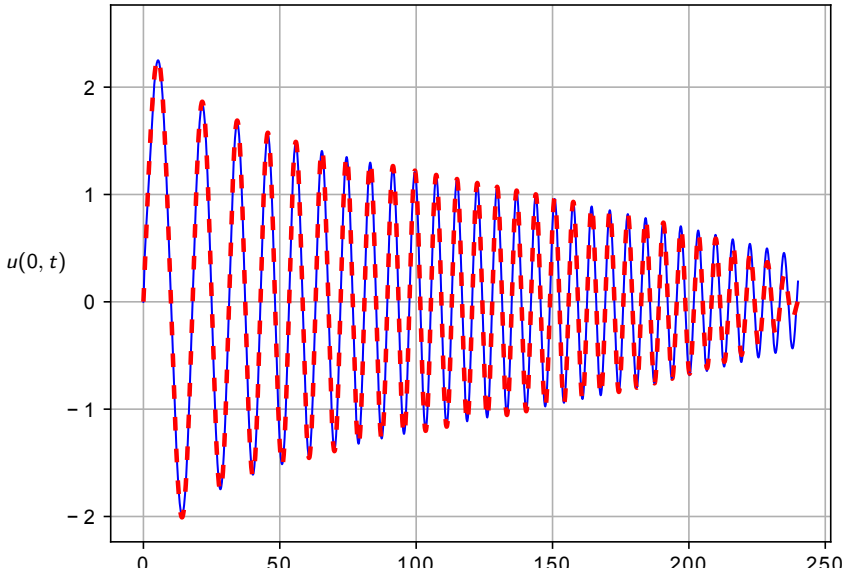
$$C_0 = \frac{\left(1-\Omega_0^2(0)\right)^{1/4}\,|p_F\big(\Omega_0(0)|}{\Omega_0^{1/2}(0)\left(1+M\sqrt{1-\Omega_0^2(0)}\right)^{1/2}},$$

$$D_0 = \arg p_F\big(\Omega_0(0)\big).$$

Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами: сравнение аналитического и численного решения



Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами: сравнение аналитического и численного решения



Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами: ссылки

Впервые подход был предложен С.Н. Гавриловым



С.Н. Гаврилов, Д.А. Индейцев.
Об эволюции локализованной моды колебаний в системе “струна на упругом основании — подвижное инерционное включение”
Прикладная математика и механика, Т.66. №5, 2002. С. 864–873.

Рассмотренная задача исследована в статье



S.N. Gavrilov, E.V. Shishkina, Yu.A. Mochalova.
An infinite-length system possessing a unique trapped mode versus a single degree of freedom system: a comparative study in the case of time-varying parameters.
In book: Editors: Altenbach H. et al. Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures, Springer, 2019.

1. Метод характеристик для гиперболических уравнений
2. Необходимые сведения из математического анализа
3. Начальные сведения об обобщенных функциях
4. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
5. Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
6. Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
7. Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
8. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
9. Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
10. Метод стационарной фазы
11. Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
12. Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
13. Уравнения Лапласа (Пуассона)
14. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$
15. Уравнения эластодинамики; P и S волны
16. Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$

$$\triangle u = \delta(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$$

Применяя преобразование Фурье по x_1, x_2, x_3, получим

$$-\mathbf{k}^2 u_F(\mathbf{k}) = 1.$$

Функция $\mathbf{k}^{-2}$ — локально интегрируемая в $\mathbb{R}^3$, поэтому

$$u = -\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\, dk_1\, dk_2\, dk_3}{\mathbf{k}^2} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-i|\mathbf{k}||\mathbf{r}|\cos\theta) k^2 \sin\theta\, dk\, d\theta\, d\phi}{k^2}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-ik|\mathbf{r}|\cos\theta) \sin\theta\, dk\, d\theta \quad \boxed{\mu = \cos\theta} \quad = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{1} \int_0^{\infty} \exp(-ik|\mathbf{r}|\mu)\, dk\, d\mu$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{1} \int_0^{\infty} \cos(k|\mathbf{r}|\mu)\, dk\, d\mu \quad = -\frac{2}{(2\pi)^2 |\mathbf{r}|} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\sin(k|\mathbf{r}|)}{k}\, dk}_{\text{Интеграл Дирихле} = \frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

Интеграл Дирихле $\int_0^\infty \frac{\sin(k\alpha)}{k}\,dk$

$$\lim_{\epsilon\to+0}\oint \frac{\exp(ik\alpha)}{k+i\epsilon}\,dk = 0 \overset{\alpha>0}{=} \lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_{\mathrm{Re}} + \int_{\cap}\right)\frac{\exp(ik\alpha)}{k+i\epsilon}\,dk =$$

Формулы Сохоцкого: $\frac{1}{k\mp i0} = \pm i\pi\delta(k) + \mathrm{VP}\,\frac{1}{k}$

$$= -i\pi + \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ik\alpha)}{k}\,dk \quad \overset{\mathrm{Im}}{\Longrightarrow}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(k\alpha)}{k}\,dk = \frac{\pi}{2}$$

Разложение Гельмгольца в $\mathbb{R}^3$

$\forall$ гладкого поля $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{\Psi},$$

где

$$\Phi = \nabla \cdot \mathbf{W},$$
$$\mathbf{\Psi} = -\nabla \times \mathbf{W},$$
$$\mathbf{W} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{f} * \frac{1}{|\mathbf{r}|}.$$

Здесь Φ — скалярный потенциал, $\mathbf{\Psi}$ — векторный потенциал.

1. Метод характеристик для гиперболических уравнений
2. Необходимые сведения из математического анализа
3. Начальные сведения об обобщенных функциях
4. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
5. Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
6. Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
7. Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
8. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
9. Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
10. Метод стационарной фазы
11. Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
12. Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
13. Уравнения Лапласа (Пуассона)
14. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$
15. Уравнения эластодинамики; P и S волны
16. Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

Сферические волны в $\mathbb{R}^3$

$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = 0$$

$\exists\, u = u(r,t), \quad r = |\mathbf{r}| \quad \Longrightarrow \quad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$

Для $r > 0$:

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r - c^{-2}\ddot{u} = 0 \quad \overset{u=v/r}{\Longrightarrow} \quad v_{rr} - c^{-2}\ddot{v} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad u = \frac{1}{r}\,\phi_-\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}\,\phi_+\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$

$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = \chi(t)\delta(\mathbf{r}), \qquad \chi\big|_{t<0} \equiv 0. \tag{3}$$

Начальные условия: $u\big|_{t<0} \equiv 0$.

$\beth\ u = u(r,t), \quad r = |\mathbf{r}| \qquad \Longrightarrow \qquad \triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$

Для $r > 0$:

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r - c^{-2}\ddot{u} = 0 \quad \overset{u=v/r}{\Longrightarrow} \quad v_{rr} - c^{-2}\ddot{v} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad u = \frac{1}{r}\phi_-\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}\phi_+\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$

$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = \chi(t)\delta(\mathbf{r}), \qquad \chi\big|_{t<0} \equiv 0. \tag{3}$$

Начальные условия: $u\big|_{t<0} \equiv 0$.

$\exists\, u = u(r,t), \quad r = |\mathbf{r}| \qquad \Longrightarrow \qquad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$

$u = \frac{1}{r}\phi\left(t - \frac{r}{c}\right)$, где ϕ подлежит определению. Вычислим $\triangle u$:

$$\triangle \frac{\phi(r,t)}{r} =$$

$$= \phi\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{1}{r} + 2\cancel{\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \phi\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} + \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial r}} = \phi\triangle\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}$$

$$= -4\pi\phi(0,t)\delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \underset{\phi(r,t)=\phi(t-r/c)}{\overset{(3)}{\Longrightarrow}} \phi(0,t) = -\frac{1}{4\pi}\chi(t)$$

Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$

$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = \chi(t)\delta(\mathbf{r}), \qquad \chi\big|_{t<0} \equiv 0. \tag{3}$$

Начальные условия: $u\big|_{t<0} \equiv 0$.

$\beth\, u = u(r,t), \quad r = |\mathbf{r}| \qquad \Longrightarrow \qquad \triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$

$$u = -\frac{\chi\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

В частности, если $\chi(t) = \delta(t)$:

$$u = \mathcal{U}_{(3)} \equiv -\frac{\delta\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

Отражение сферической волны от центра симметрии

Ранее мы показали, что

$$\left(\triangle - c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\phi\left(t \pm \frac{r}{c}\right)}{r} = -4\phi\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Таким образом однородному волновому уравнению во всём $\mathbb{R}^3$ удовлетворяет линейная комбинация

$$\frac{\phi\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r} - \frac{\phi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r},$$

т.е. сходящаяся волна $r^{-1}\phi\left(t + \frac{r}{c}\right)$ отражается от центра симметрии аналогично волнам в струне с закреплённым концом.

Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$

Рассмотрим источник единичной плотности в $\mathbb{R}^3$, сосредоточенный на оси x_3:

$$\triangle u_{(2)} - c^{-2}\ddot{u}_{(2)} = \delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2)1(x_3). \tag{4}$$

Начальные условия: $u_{(2)}\big|_{t<0} \equiv 0$.

Предполагая, что $u_{(2)} = u_{(2)}(\mathfrak{r}),\ \mathfrak{r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, получаем вместо (4) уравнение в $\mathbb{R}^2$:

$$\tilde{\triangle} u_{(2)} - c^{-2}\ddot{u}_{(2)} = \delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2).$$

Решение (4) строится как свёртка (метод спуска):

$$u_{(2)} = u_{(3)} \star 1(x_3)\delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2) =$$

...

Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$

Рассмотрим источник единичной плотности в $\mathbb{R}^3$, сосредоточенный на оси x_3:

$$\triangle u_{(2)} - c^{-2}\ddot{u}_{(2)} = \delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2)1(x_3). \tag{4}$$

Начальные условия: $u_{(2)}\big|_{t<0} \equiv 0$.

Предполагая, что $u_{(2)} = u_{(2)}(\mathfrak{r}),\ \mathfrak{r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, получаем вместо (4) уравнение в $\mathbb{R}^2$:

$$\tilde{\triangle} u_{(2)} - c^{-2}\ddot{u}_{(2)} = \delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2).$$

Решение (4) строится как свёртка (метод спуска):

$$u_{(2)} = u_{(3)} \star 1(x_3)\delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u^{(3)}(\mathfrak{r}, x_3, t)\, dx_3 = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta\left(t - \frac{\sqrt{\mathfrak{r}^2+x^2}}{c}\right)}{\sqrt{\mathfrak{r}^2+x^2}}\, dx$$

$$\delta\big(f(t)\big) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t - t_i)$$

Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$

$$x_0 = \sqrt{c^2t^2 - \mathfrak{r}^2}$$

$$g'_x\Big|_{x=x_0} = \left(t - \frac{\sqrt{\mathfrak{r}^2+x^2}}{c}\right)'_x\Big|_{x=x_0} = -\frac{2x}{2c\sqrt{\mathfrak{r}^2+x^2}}\Big|_{x=x_0} = -\frac{\sqrt{c^2t^2-\mathfrak{r}^2}}{c^2t}$$

Решение (4) строится как свёртка (метод спуска):

$$\mathcal{U}_{(2)} = \mathcal{U}_{(3)} \star 1(x_3)\delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2) =$$

$$= -\frac{H(ct-\mathfrak{r})}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\delta\big(g(x)\big)}{\sqrt{\mathfrak{r}^2+x^2}}\,dx = -\frac{H(ct-\mathfrak{r})}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\delta(x-x_0)}{|g'(x_0)|\sqrt{\mathfrak{r}^2+x_0^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{c}{2\pi}\frac{H(ct-\mathfrak{r})}{\sqrt{c^2t^2-\mathfrak{r}^2}}$$

Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^1$

Совершенно аналогично:

$$\mathcal{U}_{(1)} = \mathcal{U}^{(2)} \star 1(x_2)\delta(t)\delta(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_{(2)}(x_1, y, t)\, dy =$$

$$= -\frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(c^2t^2 - x_1^2 - y^2)}{\sqrt{c^2t^2 - x_1^2 - y^2}}\, dy =$$

$$= -\frac{cH(ct - |x_1|)}{\pi} \int_0^{\sqrt{c^2t^2 - x_1^2}} \frac{dy}{\sqrt{c^2t^2 - x_1^2 - y^2}} =$$

$$= -\frac{cH(ct - |x_1|)}{\pi} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = -\frac{cH(ct - |x_1|)}{\pi} \arcsin 1 =$$

$$= -\frac{cH(ct - |x_1|)}{2}$$

— уже знакомый нам результат!

Принцип Гюйгенса ($\mathbb{R}^3$)

$$u_{(3)} = -\frac{\delta\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

Принцип Гюйгенса: Возмущение от точечного, мгновенно действующего источника $\delta(\mathbf{r})\delta(t)$ к моменту времени $t > 0$ будет сосредоточено на сфере радиуса ct с центром в точке $\mathbf{r} = 0$. Это значит, что такое возмущение распространяется в виде сферической волны движущейся со скоростью c, причем после прохождения этой волны опять тождественно равно нулю.

Принцип Гюйгенса ($\mathbb{R}^2$)

$$u_{(2)} = -\frac{c}{2\pi}\frac{H(ct-\mathfrak{r})}{\sqrt{c^2t^2-\mathfrak{r}^2}}$$

Принцип Гюйгенса: Возмущение от точечного, мгновенно действующего источника $\delta(\mathbf{r})\delta(t)$ к моменту времени $t > 0$ будет сосредоточено на сфере радиуса ct с центром в точке $\mathbf{r} = 0$. Это значит, что такое возмущение распространяется в виде сферической волны движущейся со скоростью c, причем после прохождения этой волны опять тождественно равно нулю.

Для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$ принцип Гюйгенса не выполняется, т.к. за фронтом покой не наступает. Говорят, что имеет место диффузия волн.

Принцип Гюйгенса ($\mathbb{R}^1$)

$$u_{(1)} = -\frac{cH(ct - |x_1|)}{2}$$

Принцип Гюйгенса: Возмущение от точечного, мгновенно действующего источника $\delta(\mathbf{r})\delta(t)$ к моменту времени $t > 0$ будет сосредоточено на сфере радиуса ct с центром в точке $\mathbf{r} = 0$. Это значит, что такое возмущение распространяется в виде сферической волны движущейся со скоростью c, причем после прохождения этой волны опять тождественно равно нулю.

Для волнового уравнения в $\mathbb{R}^1$ принцип Гюйгенса выполняется для производных $u', \dot{u}$ и не выполняется для u.

Принцип Гюйгенса ($\mathbb{R}^n, n > 1$)

Выполняется для нечётных n, не выполняется для чётных n.

Задачи

1. Для $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ задано неоднородное волновое уравнение
$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = \delta(x_1)\delta(x_2)H(1 - |x_3|)\delta(t).$$
и нулевые начальные условия. На плоскости $x_3 = 0$ найти выражение для решения задачи.
2. Вычислить решение неоднородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$
$$\triangle u - c^{-2}\ddot{u} = \delta(x_1)\delta(x_2)H(t),$$
удовлетворяющее нулевым НУ.

1. Метод характеристик для гиперболических уравнений
2. Необходимые сведения из математического анализа
3. Начальные сведения об обобщенных функциях
4. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
5. Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
6. Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
7. Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
8. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
9. Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
10. Метод стационарной фазы
11. Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
12. Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
13. Уравнения Лапласа (Пуассона)
14. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$
15. Уравнения эластодинамики; P и S волны
16. Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

Полезная литература


В.С. Владимиров
Уравнения математической физики.
М., Наука, …


Л.И. Слепян
Нестационарные упругие волны.
Л., «Судостроение», 1972.

Полезная литература


Бабич, В.М., Киселёв А.П.
Упругие волны. Высокочастотная теория.
СПб, «БХВ-Петербург», 2014.


Eringen, A.C., Şuhubi E.S.
Elastodynamics. Vol 2. Linear theory.
Academic Press, 1975.


Achenbach, J.D.
Wave propagation in elastic solids.
North Holland, 1975.

Уравнения линейной изотропной эластодинамики (Навье, Ламе)

Баланс количества движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{K} - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Баланс кинетического момента:

$$\mathbf{T}^{\mathsf{T}} = \mathbf{T}.$$

Закон Гука для линейно-упругого изотропного материала:

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}\ \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} = k \operatorname{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}\ \mathbf{I} + 2\mu \operatorname{Dev}\boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla\mathbf{u})^S$ — тензор малых деформаций, $\lambda,\ \mu$ — постоянные Ламе ($\mu > 0,\ 3\lambda + 2\mu \equiv 3k > 0$).

$$\mu \triangle \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\rho\mathbf{K}$$

Плоские волны

$$\mu \bigtriangleup \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

Ищем решения однородных уравнений ЭД в виде $\mathbf{u} = \mathbf{A}f(\theta)$, $\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega t$ — плоские волны.

f — форма волны (произвольная функция),
θ — фаза,
$\mathbf{A}$ — векторная амплитуда,
$\mathbf{k}$ — волновой вектор.

Фазовая скорость плоской волны — нормальная скорость движения поверхности постоянной фазы:

$$\mathbf{v} = \frac{\Omega\mathbf{k}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} = \frac{\Omega}{|\mathbf{k}|}\hat{\mathbf{k}}$$

Медленность плоской волны:

$$\mathbf{s} = \frac{|\mathbf{k}|}{\Omega}\hat{\mathbf{k}} = \Omega^{-1}\mathbf{k}$$

Плоские волны

$$\mu \bigtriangleup \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

Ищем решения однородных уравнений ЭД в виде $\mathbf{u} = \mathbf{A}f(\theta)$, $\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega t$ — плоские волны.

$$\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla\nabla f \cdot \mathbf{A} = f''\mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathbf{A},$$
$$\bigtriangleup \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla\mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla f\mathbf{A} = f''(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{I} \cdot \mathbf{A},$$
$$\ddot{\mathbf{u}} = f''\Omega^2\mathbf{A}$$

Получаем задачу на собственные значения:

$$\left((\lambda + \mu)\mathbf{k}\mathbf{k} + \mu(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\,\mathbf{I} - \rho\Omega^2\mathbf{I}\right) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Плоские P & S волны

$$\Big((\lambda+\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}+\mu(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{I}-\rho\Omega^2\mathbf{I}\Big)\cdot\mathbf{A}=\mathbf{0}.$$

$A \parallel \mathbf{k}$ — собственный вектор, если $(\lambda+2\mu)\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=\rho\Omega^2$. Вычисляя по определению фазовую скорость и медленность, находим

$$\mathbf{v}\equiv\frac{\Omega}{|\mathbf{k}|}\hat{\mathbf{k}}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\,\hat{\mathbf{k}}\equiv c_1\hat{\mathbf{k}},\qquad \mathbf{s}\equiv\Omega^{-1}\mathbf{k}=c_1^{-1}\hat{\mathbf{k}}.$$

Это плоские P (Primary, продольные, растяжения-сжатия, дилатации) волны.

Плоские P & S волны

$$\Big((\lambda+\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}+\mu(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{I}-\rho\Omega^2\mathbf{I}\Big)\cdot\mathbf{A}=\mathbf{0}.$$

$A \parallel \mathbf{k}$ — собственный вектор, если $(\lambda+2\mu)\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=\rho\Omega^2$. Вычисляя по определению фазовую скорость и медленность, находим

$$\mathbf{v}\equiv\frac{\Omega}{|\mathbf{k}|}\hat{\mathbf{k}}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\,\hat{\mathbf{k}}\equiv c_1\hat{\mathbf{k}},\qquad \mathbf{s}\equiv\Omega^{-1}\mathbf{k}=c_1^{-1}\hat{\mathbf{k}}.$$

Это плоские P (Primary, продольные, растяжения-сжатия, дилатации) волны.

$A \perp \mathbf{k}$ — собственный вектор, если $\mu\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=\rho\Omega^2$. Вычисляя по определению фазовую скорость и медленность, находим

$$\mathbf{v}\equiv\frac{\Omega}{|\mathbf{k}|}\hat{\mathbf{k}}=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,\hat{\mathbf{k}}\equiv c_2\hat{\mathbf{k}},\qquad \mathbf{s}\equiv\Omega^{-1}\mathbf{k}=c_2^{-1}\hat{\mathbf{k}}.$$

Это плоские S (Secondary, поперечные, сдвига-вращения, искажения) волны.

Скалярный потенциал и P-волны

$$\mu \bigtriangleup \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

∃ поле перемещений потенциально:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi,$$

Φ — скалярный потенциал. Подставляя это представление в уравнения эластодинамики, получаем волновое уравнение

$$\cancel{(\lambda + 2\mu)}\nabla\left(\bigtriangleup\Phi - c_1^{-2}\ddot{\Phi}\right) = 0.$$

Пример

Плоской P-волне

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}f'(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega t). \qquad c_1^2\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \Omega^2$$

соответствует скалярный потенциал $\Phi = f(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega t)$.

Решения, представляемые посредством скалярного потенциала, являются P-волнами.

Векторный потенциал и S-волны

$$\mu \bigtriangleup \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

∃ поле перемещений соленоидально:

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{\Psi},$$

$\mathbf{\Psi}$ — векторный потенциал. Подставляя это представление в уравнения эластодинамики, получим волновое уравнение

$$\mu\nabla\times\left(\bigtriangleup\mathbf{\Psi} - c_2^{-2}\ddot{\mathbf{\Psi}}\right) = \mathbf{0}.$$

Пример

Плоской S-волне

$$\mathbf{u} = \mathbf{k} \times \mathbf{m}\, f'(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega t), \qquad c_2^2\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \Omega^2$$

соответствует векторный потенциал $\mathbf{\Psi} = \mathbf{m} f(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega t)$.

Решения, представляемые посредством векторного потенциала, являются S-волнами.

Потенциалы: общий случай при наличии внешних сил

$$\mu \triangle \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\rho\mathbf{K}$$

$\exists\, \mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{\Psi}, \quad \mathbf{K} = \nabla X + \nabla \times \mathbf{Y}$:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\big(\triangle\Phi - c_1^{-2}\ddot{\Phi}\big) + \mu\nabla\times\big(\triangle\mathbf{\Psi} - c_2^{-2}\ddot{\mathbf{\Psi}}\big) = -\rho(\nabla X + \nabla \times \mathbf{Y}).$$

$$\Longleftarrow \qquad \begin{aligned} \triangle\Phi - c_1^{-2}\ddot{\Phi} &= -c_1^{-2}X, \\ \triangle\mathbf{\Psi} - c_2^{-2}\ddot{\mathbf{\Psi}} &= -c_2^{-2}\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

$$\Phi = -\frac{\delta\big(t - \frac{r}{c_1}\big)}{4\pi r} * \big(-c_1^{-2}X\big),$$

$$\mathbf{\Psi} = -\frac{\delta\big(t - \frac{r}{c_2}\big)}{4\pi r} * \big(-c_2^{-2}\mathbf{Y}\big),$$

В общем случае решения уравнений ЭД являются суммой P и S волн, распространяющихся со скоростями c_1 и c_2 соответственно.

Уравнения линейной изотропной эластодинамики (Навье, Навье-Коши, Ламе)

Баланс количества движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{K} - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Баланс кинетического момента:

$$\mathbf{T}^{\mathsf{T}} = \mathbf{T}.$$

Закон Гука для линейно-упругого изотропного материала:

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}\ \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} = k \operatorname{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}\ \mathbf{I} + 2\mu \operatorname{Dev}\boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla\mathbf{u})^S$ — тензор малых деформаций, $\lambda,\ \mu$ — постоянные Ламе ($\mu > 0,\ 3\lambda + 2\mu \equiv 3k > 0$).

$$\mu \triangle \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\rho\mathbf{K}$$

Уравнения линейной изотропной эластодинамики (Навье, Навье-Коши, Ламе)

Баланс количества движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{K} - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Баланс кинетического момента:

$$\mathbf{T}^{\mathsf{T}} = \mathbf{T}.$$

Закон Гука для линейно-упругого изотропного материала:

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}\ \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} = k \operatorname{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}\ \mathbf{I} + 2\mu \operatorname{Dev}\boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla\mathbf{u})^S$ — тензор малых деформаций, $\lambda,\ \mu$ — постоянные Ламе ($\mu > 0,\ 3\lambda + 2\mu \equiv 3k > 0$).

$$-\mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\rho\mathbf{K}$$

Уравнения линейной изотропной эластодинамики (Навье, Навье-Коши, Ламе)

Баланс количества движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{K} - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Баланс кинетического момента:

$$\mathbf{T}^{\mathsf{T}} = \mathbf{T}.$$

Закон Гука для линейно-упругого изотропного материала:

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}\ \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} = k \operatorname{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}\ \mathbf{I} + 2\mu \operatorname{Dev}\boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla\mathbf{u})^S$ — тензор малых деформаций, $\lambda,\ \mu$ — постоянные Ламе ($\mu > 0,\ 3\lambda + 2\mu \equiv 3k > 0$).

$$-c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + c_1^2 \nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}$$

1. Метод характеристик для гиперболических уравнений
2. Необходимые сведения из математического анализа
3. Начальные сведения об обобщенных функциях
4. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
5. Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
6. Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
7. Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
8. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
9. Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
10. Метод стационарной фазы
11. Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
12. Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
13. Уравнения Лапласа (Пуассона)
14. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$
15. Уравнения эластодинамики; P и S волны
16. Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$-c_2^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+c_1^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\ddot{\mathbf{u}}=-\chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n},$$

Начальные условия $\mathbf{u}\big|_{t<0}\equiv 0$, при этом предполагаем $\chi\big|_{t<0}\equiv 0$.

$\exists\ \phi=\nabla\cdot\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\psi}=\nabla\times\mathbf{u}$:

$$\nabla\cdot:\quad \triangle\phi-c_1^{-2}\ddot{\phi}=-c_1^{-2}\chi(t)\nabla\cdot\mathbf{n}\delta(\mathbf{r})$$
$$\nabla\times:\quad \triangle\boldsymbol{\psi}-c_2^{-2}\ddot{\boldsymbol{\psi}}=-c_2^{-2}\chi(t)\nabla\times\mathbf{n}\delta(\mathbf{r})$$

$\Longrightarrow$

$$\phi=c_1^{-2}\nabla\cdot\mathbf{n}\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{4\pi r},$$
$$\boldsymbol{\psi}=c_2^{-2}\nabla\times\mathbf{n}\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r}$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} + c_1^2 \nabla \phi + \chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

$\exists\, \phi = \nabla \cdot \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\psi} = \nabla \times \mathbf{u}$:

$$\triangle \phi - c_1^{-2}\ddot{\phi} = -c_1^{-2}\chi(t)\nabla \cdot \mathbf{n}\delta(\mathbf{r})$$
$$\triangle \boldsymbol{\psi} - c_2^{-2}\ddot{\boldsymbol{\psi}} = -c_2^{-2}\chi(t)\nabla \times \mathbf{n}\delta(\mathbf{r})$$

$\Longrightarrow$

$$\phi = c_1^{-2}\nabla \cdot \mathbf{n}\frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{4\pi r},$$
$$\boldsymbol{\psi} = c_2^{-2}\nabla \times \mathbf{n}\frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r}$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} + c_1^2 \nabla \phi + \chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

$\exists\, \phi = \nabla \cdot \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\psi} = \nabla \times \mathbf{u}$:

$$\triangle \phi - c_1^{-2}\ddot{\phi} = -c_1^{-2}\chi(t)\nabla \cdot \mathbf{n}\delta(\mathbf{r})$$
$$\triangle \boldsymbol{\psi} - c_2^{-2}\ddot{\boldsymbol{\psi}} = -c_2^{-2}\chi(t)\nabla \times \mathbf{n}\delta(\mathbf{r})$$

$\Longrightarrow$

$$\phi = c_1^{-2}\nabla \cdot \mathbf{n}\frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{4\pi r},$$
$$\boldsymbol{\psi} = c_2^{-2}\nabla \times \mathbf{n}\frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r}$$

объемная деформация (дилатация)
удвоенный вектор малого поворота

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} + c_1^2 \nabla \phi + \chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

$$c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{n}) \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} = (-\triangle \mathbf{n} + \nabla\nabla \cdot \mathbf{n}) \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} =$$

$$= \nabla\nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} - \triangle \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} \mathbf{n} =$$

$$= \nabla\nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} + \chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n} - \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi c_2^2 r} \mathbf{n}$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} + c_1^2 \nabla \phi + \cancel{\chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}}$$

$$c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{n}) \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} = (-\triangle \mathbf{n} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{n}) \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} =$$

$$= \nabla \nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} - \triangle \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} \mathbf{n} =$$

$$= \nabla \nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} + \cancel{\chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}} - \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi c_2^2 r} \mathbf{n}$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{n}\cdot\nabla\nabla\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{r}-\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{r}\right)+\frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\mathbf{n}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} =$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{n}\cdot\nabla\nabla\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{r} - \frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{r}\right) + \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\mathbf{n}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} = \quad \nabla\left(\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\chi - \frac{\dot{\chi}}{cr}\hat{\mathbf{r}}\right) = \nabla\left(-\frac{\chi}{r^3}\mathbf{r} - \frac{\dot{\chi}}{cr^2}\mathbf{r}\right)$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{n}\cdot\nabla\nabla\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{r} - \frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{r}\right) + \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\mathbf{n}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} = \quad \nabla\left(\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\chi - \frac{\dot{\chi}}{cr}\hat{\mathbf{r}}\right) = \nabla\left(-\frac{\chi}{r^3}\mathbf{r} - \frac{\dot{\chi}}{cr^2}\mathbf{r}\right)$$

$$\overset{\nabla\mathbf{r}=\mathbf{I}}{=} \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I})$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{n}\cdot\nabla\nabla\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{r}-\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{r}\right)+\frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\mathbf{n}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} = \quad \nabla\left(\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\chi-\frac{\dot{\chi}}{cr}\hat{\mathbf{r}}\right) = \nabla\left(-\frac{\chi}{r^3}\mathbf{r}-\frac{\dot{\chi}}{cr^2}\mathbf{r}\right)$$

$$\overset{\nabla\mathbf{r}=\mathbf{I}}{=} \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}+\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3}+\frac{\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{I})$$

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\big((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\big)+$$

$$+\left(\frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1}-\frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2}+\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)-\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)\right)\frac{\big((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\big)}{r^3}$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\rho\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\left((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\right)+$$

$$+\left(\frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1} - \frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2} + \chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right) - \chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)\right)\frac{\left((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\right)}{r^3}$$

$$\beth\, z = \int_{r/c_1}^{r/c2} \tau\chi(t-\tau)\,d\tau \qquad \Longrightarrow$$

$$\ddot{z} = \frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1} - \frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2} + \chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right) - \chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}) +$$

$$+\left(\frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1} - \frac{r\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2} + \chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right) - \chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)\right)\frac{((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n})}{r^3}$$

$$z = \int_{r/c}^{r/\beta} \tau\,\chi(t-\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} = \int_{r/c}^{r/\beta} \tau\,\ddot{\chi}(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{t-r/\beta}^{t-r/\alpha} (t-\tau)\,d\dot{\chi} = \frac{r}{\beta}\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{\beta}\right) - \frac{r}{\alpha}\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) -$$

$$+ \int_{t-r/\beta}^{t-r/\alpha} d\chi = \frac{r}{\beta}\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{\beta}\right) - \frac{r}{\alpha}\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) + \chi\Big|_{t-r/\beta}^{t-r/\alpha}$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\left((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}\right) +$$

$$+ \frac{d^2}{dt^2}\left(\int_{r/c_1}^{r/c2} \tau\chi(t-\tau)\,d\tau\right)\frac{\left((3\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}\right)}{r^3}$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\mathbf{u} = \frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\big((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\big) +$$

$$+\left(\int_{r/c_1}^{r/c2}\tau\chi(t-\tau)\,d\tau\right)\frac{\big((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\big)}{r^3}$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$-c_2^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+c_1^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\ddot{\mathbf{u}}=-\chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0}\equiv 0$.

$$\mathbf{u}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\big((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\big)+\right.$$

$$\left.+\int_{r/c_1}^{r/c2}\tau\chi(t-\tau)\,d\tau\,\frac{\big((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\big)}{r^3}\right)$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики: $\Box\,\chi = \delta$

$$-c_2^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) + c_1^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\delta(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0} \equiv 0$.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\big((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\big) + \right.$$

$$\left. + \int_{r/c_1}^{r/c_2} \tau\delta(t-\tau)\,d\tau\,\frac{\big((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\big)}{r^3}\right)$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики: $\Box\,\chi = \delta$

$$-c_2^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) + c_1^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\delta(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0} \equiv 0$.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}} - \frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}\big((\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\big) + \right.$$

$$\left. + t\big(H(t-r/c_1) - H(t-r/c_2)\big)\frac{\big((3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{n}\big)}{r^3}\right)$$

The basic singular solution of elastodynamics

Тензор Стокса

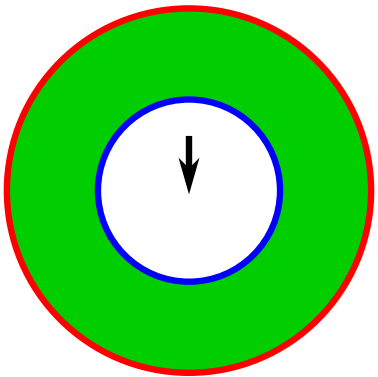
$$-c_2^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+c_1^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\ddot{\mathbf{u}}=-\delta(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n}$$

Начальные условия: $\mathbf{u}\big|_{t<0}\equiv 0$.

$$\mathbf{u}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}-\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{I})+t\big(H(t-r/c_1)-H(t-r/c_2)\big)\frac{3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{I}}{r^3}\right)\cdot\mathbf{n}$$

Тензор Стокса: характер волнового поля

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r}(\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}) + t\big(H(t - r/c_1) - H(t - r/c_2)\big)\frac{3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}}{r^3} \right) \cdot \mathbf{n}$$



$r = c_1 t$: дилатация и сдвиг

$r = c_2 t$: поворот и сдвиг

сдвиг

Тензор Стокса: характер волнового поля

Задача

Показать непосредственным вычислением, что дилатация и поворот между фронтами P и S волн равны нулю:

- $\nabla \cdot \dfrac{3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}}{r^3} = \mathbf{0}$,
- $\nabla \times \dfrac{3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}}{r^3} = \mathbf{0}$.

Решение через потенциалы

$$-c_2^2\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+c_1^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\ddot{\mathbf{u}}=-\chi(t)\delta(\mathbf{r})\mathbf{n},$$

Начальные условия $\mathbf{u}\big|_{t<0}\equiv 0$, при этом предполагаем $\chi\big|_{t<0}\equiv 0$.

$\beth\,\mathbf{u}=\nabla\Phi+\nabla\times\mathbf{\Psi}$:

$$\triangle\Phi-c_1^{-2}\ddot{\Phi}=c_1^{-2}\chi(t)\nabla\cdot\frac{\mathbf{n}}{4\pi r}$$

$$\triangle\mathbf{\Psi}-c_2^{-2}\ddot{\mathbf{\Psi}}=-c_2^{-2}\chi(t)\nabla\times\frac{\mathbf{n}}{4\pi r}$$

$\Longrightarrow\qquad \beth\,\Phi=\nabla\cdot\varphi\mathbf{n},\quad \mathbf{\Psi}=-\nabla\times\psi\mathbf{n}$

$\cancel{\nabla\cdot}$: $\qquad \triangle\varphi-c_1^{-2}\ddot{\varphi}=c_1^{-2}\dfrac{\chi(t)}{4\pi r},\qquad \varphi\big|_{t<0}\equiv 0;$

$\cancel{\nabla\times}$: $\qquad \triangle\psi-c_2^{-2}\ddot{\psi}=c_2^{-2}\dfrac{\chi(t)}{4\pi r},\qquad \psi\big|_{t<0}\equiv 0.$

$\Longrightarrow\qquad \beth\,\varphi=\dfrac{\varphi_0(r)}{4\pi r},\quad \psi=\dfrac{\psi_0(r)}{4\pi r}$:

$$\varphi_0''-c_1^{-2}\ddot{\varphi}_0=c_1^{-2}\chi(t),\qquad \varphi_0\big|_{t<0}\equiv 0;$$

$$\psi_0{}''-c_2^{-2}\ddot{\psi}_0=c_2^{-2}\chi(t),\qquad \psi_0\big|_{t<0}\equiv 0.$$

Решение через потенциалы

$\varphi = \dfrac{\varphi_0(r)}{4\pi r}, \quad \psi = \dfrac{\psi_0(r)}{4\pi r}$:

$$\varphi_0'' - c_1^{-2}\ddot{\varphi}_0 = c_1^{-2}\chi(t), \qquad \varphi_0\big|_{t<0} \equiv 0;$$

$$\psi_0'' - c_2^{-2}\ddot{\psi}_0 = c_2^{-2}\chi(t), \qquad \psi_0\big|_{t<0} \equiv 0.$$

$$4\pi\varphi = \frac{1}{r}\left(\int_0^{t-r/c_1} \tau\chi(t - r/c_1 - \tau)\,d\tau - \int_0^{t} \tau\chi(t-\tau)\,d\tau\right)$$

$$4\pi\psi = \frac{1}{r}\left(\int_0^{t-r/c_2} \tau\chi(t - r/c_2 - \tau)\,d\tau - \int_0^{t} \tau\chi(t-\tau)\,d\tau\right)$$

$$\mathbf{u} = \nabla\nabla\cdot\varphi\mathbf{n} - \nabla\times(\nabla\times\psi\mathbf{n}) = \nabla\nabla\cdot(\varphi-\psi)\mathbf{n} + \triangle\psi\mathbf{n} =$$

$$\nabla\nabla\cdot\frac{\mathbf{n}}{4\pi r}\left(\int_0^{t-r/c_1} \tau\chi(t - r/c_1 - \tau)\,d\tau - \int_0^{t-r/c_2} \tau\chi(t - r/c_2 - \tau)\,d\tau\right) +$$

$$+ \frac{\chi(t-r/c_2)\mathbf{n}}{4\pi c_2^2 r}$$

и далее, упрощая полученное выражение, приходим к прежнему ответу (см. Achenbach).

Решение через потенциалы

$\varphi = \dfrac{\varphi_0(r)}{4\pi r}, \quad \psi = \dfrac{\psi_0(r)}{4\pi r}$:

$$\varphi_0'' - c_1^{-2}\ddot{\varphi}_0 = c_1^{-2}\chi(t), \qquad \varphi_0\big|_{t<0} \equiv 0;$$

$$\psi_0'' - c_2^{-2}\ddot{\psi}_0 = c_2^{-2}\chi(t), \qquad \psi_0\big|_{t<0} \equiv 0.$$

$$4\pi\varphi = \frac{1}{r}\left(\int_0^{t-r/c_1} \tau\chi(t - r/c_1 - \tau)\,d\tau - \int_0^{t} \tau\chi(t-\tau)\,d\tau\right)$$

$$4\pi\psi = \frac{1}{r}\left(\int_0^{t-r/c_2} \tau\chi(t - r/c_2 - \tau)\,d\tau - \int_0^{t} \tau\chi(t-\tau)\,d\tau\right)$$

Важный вывод

Для $\chi(t)$: $\chi(t) \neq 0$ при $t > 0$ потенциалы мгновенно становятся ненулевыми во всём $\mathbb{R}^3$, однако вне фронта $r = c_1 t$ их вклад в перемещения равен нулю.