

# Нестационарные упругие волны

Сергей Николаевич Гаврилов

<http://www.pdmi.ras.ru/~serge/lectures/2026.pdf>

## Общая характеристика курса

Будем рассматривать и решать нестационарные задачи для уравнений в частных производных, описывающие нестационарные процессы в механических системах с распределенными параметрами — много математики (матфизики).

### Постановка задачи:

- Уравнения движения (линейные PDE):  $\mathcal{L}u(x, t) = f(x, t)$ .
- Начальные условия.
- Условия излучения или (и) граничные условия.

### Нестационарность:

- Влияние начальных условий на движение.
- Задачи, где правая часть уравнения (нагрузка) зависит от времени негармоническим образом.
- Задачи для систем с переменными по времени свойствами.

### Цель курса:

- Научиться решать нестационарные задачи ...
- ...для того, чтобы изучать принципиально нестационарные явления Природы.
- ...которые очень часто являются интуитивно не очевидными или даже контр-очевидными.

- 02–10.2026 Одномерные задачи (PDE с двумя независимыми переменными: координата  $x$  и время  $t$ ).  
Зачет по результатам решения задач на занятиях и дома.
- 11–12.2026 Двух- и трехмерные задачи (PDE с 3–4 независимыми переменными: 2–3 координаты  $x_i$  и время  $t$ ).  
Экзамен по теоретическим материалам всего курса.

## Рассматриваемые в курсе PDE

- Волновое уравнение:

$$\Delta u - c^{-2}\ddot{u} = f.$$

- Телеграфное уравнение:

$$\Delta u - 2\gamma\dot{u} - c^{-2}\ddot{u} - ku = f.$$

- Уравнение Клейна-Гордона:

$$\Delta u - c^{-2}\ddot{u} - ku = f.$$

- Уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2u = f.$$

- Уравнения линейной изотропной эластодинамики Навье:

$$\mu\Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\rho\mathbf{K}.$$

...

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения

## Метод характеристик

- Для матфизики типичной является ситуация, когда получить какие-либо утверждения или даже сформулировать определения для (системы) PDE общего вида — весьма сложная задача.
- Поэтому, рассмотрим метод характеристик на конкретных примерах ...
- ...попутно обсудив понятие гиперболичности.
- Ограничимся случаем двух независимых переменных.



С.К. Годунов

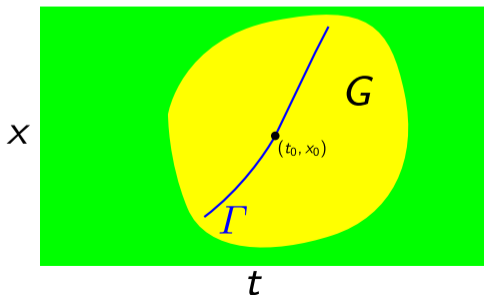
Уравнения математической физики.

М., Наука, 1979.

## Постановка задачи об определении характеристик для линейного уравнения первого порядка с переменными коэффициентами

$$a(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + b(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x) \quad \text{или} \quad a(t, x) \dot{u} + b(t, x) u' = f(t, x)$$

- $\square$  известно, что рассматриваемое уравнение имеет решение в некоторой области  $G$ . Выберем в этой области точку  $(t_0, x_0)$  и проведем через эту точку кривую  $\Gamma$ .
- $\square$  известны значения  $u$  вдоль кривой  $\Gamma$  (начальные условия)
- Рассматривается задача Коши — требуется восстановить  $u$  в некоторой окрестности  $\Gamma$ .
- Характеристики  $\gamma$  — кривые  $\Gamma$ , такие, что сформулированная задача м.б. неразрешима или неоднозначно разрешима в зависимости от НУ.



## Линейное уравнение первого порядка

$$a(t, x)\dot{u} + b(t, x)u' = f(t, x) \quad (1)$$

Можем найти  $u \implies$  можем найти  $\dot{u}, u' \implies$

$$\begin{cases} a\dot{u} + b u' = f \\ dt\dot{u} + dx u' = du \end{cases} \implies \begin{vmatrix} a & b \\ dt & dx \end{vmatrix} \neq 0$$

## Определение

Кривые  $\gamma$  в плоскости  $(t, x)$ , вдоль которых выполняется характеристическое уравнение  $\begin{vmatrix} a & b \\ dt & dx \end{vmatrix} = 0$  — характеристические кривые (характеристики) уравнения (1).

Т.е. на характеристиках  $\frac{dx}{dt}\Big|_{\gamma} = \frac{b}{a}$  или  $\frac{dt}{dx}\Big|_{\gamma} = \frac{a}{b}$ .

Критерий разрешимости задачи:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} a & b \\ dt & dx \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} a & b & f \\ dt & dx & du \end{bmatrix},$$

т.е.  $\frac{du}{dx}\Big|_{\gamma} = \frac{f}{b}$  или  $\frac{du}{dt}\Big|_{\gamma} = \frac{f}{a}$  — соотношение на характеристике.

## Линейное уравнение первого порядка

$$a(t, x)\dot{u} + b(t, x)u' = f(t, x) \quad (1)$$

Поставим в соответствие PDE (1) характеристическую систему ODE:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= a(t, x), \\ \frac{dx}{ds} &= b(t, x). \end{aligned} \quad (2)$$

Характеристики, очевидно, представляют собой параметрически заданные системой (??) кривые  $(t(s), x(s))$ .

Соотношение на характеристике:

$$\frac{du}{ds} = f(t, x). \quad (3)$$

Метод характеристик — решение PDE посредством определения характеристик и использования соотношений на характеристиках. Для линейного PDE первого порядка метод характеристик позволяет свести PDE к системе ODE (??)–(??).

Для линейного однородного PDE первого порядка задача сводится к нахождению первого интеграла системы (??).

## Линейное уравнение первого порядка

$$a(t, x)\dot{u} + b(t, x)u' = f(t, x) \quad (1)$$

Поставим в соответствие PDE (1) характеристическую систему ODE:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= a(t, x), \\ \frac{dx}{ds} &= b(t, x). \end{aligned} \quad (2)$$

Соотношение на характеристике:

$$\frac{du}{ds} = f(t, x). \quad (3)$$

Метод характеристик — решение PDE посредством определения характеристик и использования соотношений на характеристиках. Для линейного PDE первого порядка метод характеристик позволяет свести PDE к системе ODE (??)–(??).

Для линейного однородного PDE первого порядка задача сводится к нахождению первого интеграла системы (??).

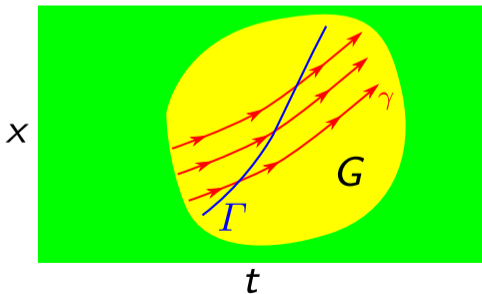
### Задача

Найти характеристики и общее решение линейного однородного уравнения первого порядка

$$\dot{u} + cu' = 0.$$

## Линейное уравнение первого порядка: выводы

- Если начальные условия заданы на кривой  $\Gamma$ , через каждую точку  $s$  которой проходит одна и только одна характеристика  $\gamma$  (не касаясь данной кривой), то соответствующая задача Коши имеет единственное решение.
- Если начальные условия заданы на характеристике  $\gamma$ , то соответствующая задача Коши может не иметь решения, а может иметь неединственное решение (в зависимости от того, выполнено ли соотношение на характеристике  $\gamma$ ).
- Разрывы распространяются вдоль характеристик.



## Квазилинейное уравнение первого порядка

$$a(t, x, u)\dot{u} + b(t, x, u)u' = f(t, x, u) \quad (4)$$

Рассмотрим характеристическую систему ODE:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= a(t, x, u), \\ \frac{dx}{ds} &= b(t, x, u), \\ \frac{du}{ds} &= f(t, x, u). \end{aligned} \quad (5)$$

Для квазилинейного PDE (4) первого порядка метод характеристик позволяет свести PDE к системе ODE (5).

- Характеристики зависят от начального условия.
- Кривая, являющаяся характеристикой для одного НУ, для другого характеристикой, вообще говоря, не является.
- При решении задачи Коши характеристики строятся инкрементально вместе с решением.

Система  $N$  линейных уравнений первого порядка

$$\mathbf{A}(t, x)\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}(t, x)\mathbf{u}' = \tilde{\mathbf{f}}(t, x) \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  — матрицы  $N \times N$ ;  $\det \mathbf{A} \neq 0$ ;  $\mathbf{u}$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}$  — столбцы.

Домножая (6) на  $\mathbf{A}^{-1}$  слева, получим

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t, x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, x),$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\tilde{\mathbf{f}}.$$

Система  $N$  линейных уравнений первого порядка: характеристическое уравнение

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t, x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, x) \quad (7)$$

Можем найти  $\mathbf{u} \implies$  можем найти  $\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}' \implies$

$$\begin{cases} \mathbf{I}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\mathbf{u}' = \mathbf{f} \\ dt\dot{\mathbf{u}} + dx\mathbf{u}' = d\mathbf{u} \end{cases} \implies \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ dt\mathbf{I} & dx\mathbf{I} \end{vmatrix} \neq 0$$

## Определение

Кривые, вдоль которых выполняется характеристическое уравнение  $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ dt\mathbf{I} & dx\mathbf{I} \end{vmatrix} = 0$  — характеристики уравнения (7).

$$\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ dt\mathbf{I} & dx\mathbf{I} \end{vmatrix} = (dt)^N \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathbf{I} & \frac{dx}{dt}\mathbf{I} \end{vmatrix} = (dt)^N \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C} - \frac{dx}{dt}\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \frac{dx}{dt}\mathbf{I} \end{vmatrix} = (dt)^N (-1)^N \begin{vmatrix} \mathbf{C} - \frac{dx}{dt}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \frac{dx}{dt}\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{vmatrix} = (dt)^N (-1)^N \det\left(\mathbf{C} - \frac{dx}{dt}\mathbf{I}\right)$$

Т.е. на характеристиках  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\gamma} = k_i(x, t)$ , где  $k_i$  — собственные числа  $\mathbf{C}$ .

Система  $N$  линейных уравнений первого порядка: соотношения на характеристиках

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t, x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, x) \quad (7)$$

Можем найти  $\mathbf{u}$   $\implies$  можем найти  $\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}' \implies$

$$\begin{cases} \mathbf{I}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\mathbf{u}' = \mathbf{f} \\ dt\dot{\mathbf{u}} + dx\mathbf{u}' = d\mathbf{u} \end{cases} \implies \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ dt\mathbf{I} & dx\mathbf{I} \end{vmatrix} \neq 0$$

## Определение

Кривые, вдоль которых выполняется характеристическое уравнение  $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ dt\mathbf{I} & dx\mathbf{I} \end{vmatrix} = 0$  — характеристики уравнения (7).

Т.е. на характеристиках  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\gamma} = k_i(x, t)$ , где  $k_i$  — собственные числа  $\mathbf{C}$ .

Критерий разрешимости задачи:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ dt\mathbf{I} & dx\mathbf{I} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} & \mathbf{f} \\ dt\mathbf{I} & dx\mathbf{I} & d\mathbf{u} \end{bmatrix}$$

— соотношения на характеристиках.

Система  $N$  линейных уравнений первого порядка: гиперболичность

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t, x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, x) \quad (7)$$

## Определение

Кривые, вдоль которых выполняется характеристическое уравнение  $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ dt \mathbf{I} & dx \mathbf{I} \end{vmatrix} = 0$ , — характеристики уравнения (7).

Т.е., на характеристиках  $\frac{dx}{dt} = k_i(x, t)$ , где  $k_i$  — собственные числа  $\mathbf{C}$ .

## Определение

Если все собственные числа матрицы  $\mathbf{C}$  вещественны и не являются кратными ни в одной точке рассматриваемой области (т.е. имеется ровно  $N$  семейств характеристик), то система называется гиперболической в области.

Волны — решения гиперболических уравнений.

## Контрольный вопрос

Что можно сказать о гиперболичности линейного уравнения 1 порядка?

Система  $N$  линейных уравнений первого порядка: эллиптичность

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(t, x)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, x) \quad (7)$$

## Определение

Кривые, вдоль которых выполняется характеристическое уравнение  $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ dt \mathbf{I} & dx \mathbf{I} \end{vmatrix} = 0$ , — характеристики уравнения (7).

Т.е., на характеристиках  $\frac{dx}{dt} = k_i(x, t)$ , где  $k_i$  — собственные числа  $\mathbf{C}$ .

## Определение

Если характеристическое уравнение системы не имеет вещественных решений ни в одной точке рассматриваемой области (т.е. характеристик нет), то система называется эллиптической в области.

## Гиперболическая система $N$ линейных уравнений первого порядка: выводы

- Начальные условия и краевые условия (в смешанной задаче) не следует задавать на характеристиках — это может приводить к несуществованию или неединственности решения (в зависимости от того, выполнено ли соотношение на характеристике).
- Разрывы распространяются вдоль характеристик.

## Линейное уравнение второго порядка

Вопрос о нахождении характеристик и классификации уравнений второго порядка для двух независимых переменных может быть решен сведением уравнения к системе 2 уравнений первого порядка.

Рассмотрим его на примере простейшего гиперболического уравнения — одномерного однородного волнового уравнения, для которого метод характеристик чрезвычайно эффективен и нагляден.

# Одномерное однородное волновое уравнение

Механические системы, которые описывает одномерное волновое уравнение:

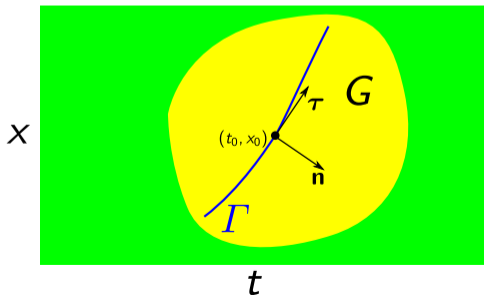
- Поперечные колебания струны:  $Tu'' - \rho_0 S\ddot{u} = 0$ .
- Продольные колебания стержня:  $ESu'' - \rho_0 S\ddot{u} = 0$ .

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0$$

# Постановка задачи об определении характеристик для одномерного однородного волнового уравнения

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0$$

- $\square$  известно, что уравнение имеет решение в некоторой области  $G$ . Выберем в этой области точку  $(t_0, x_0)$  и проведем через эту точку кривую  $\Gamma$ .
- $\square$  известны значения  $u$  и нормальной производной  $\mathbf{n} \cdot \nabla u$  вдоль кривой  $\Gamma$  (начальные условия)
- Рассматривается задача Коши — определить  $u$  в некоторой окрестности  $\Gamma$ .
- Характеристики  $\gamma$  — кривые  $\Gamma$ , такие, что сформулированная задача м.б. неразрешима или неоднозначно разрешима в зависимости от НУ.



## Одномерное волновое уравнение: характеристики, гиперболичность

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \iff \begin{cases} (u')' - c^{-2}(\dot{u})' = 0, \\ (u')' = (\dot{u})'. \end{cases} \quad (8)$$

Можем найти  $u \implies$  можем найти  $\dot{u}, u'', \dot{u}'$

$$\implies \begin{cases} u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \\ u'' dx + \dot{u}' dt = du' \\ \ddot{u} dt + \dot{u}' dx = d\dot{u} \end{cases} \implies \mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ dx & 0 & dt \\ 0 & dt & dx \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\mathcal{D} = 0 \iff c^2 dt^2 = dx^2 \iff \begin{cases} x - ct = \text{const} = \phi_- \\ x + ct = \text{const} = \phi_+ \end{cases}.$$

Имеется 2 семейства характеристик: волновое уравнение — гиперболическое.

## Одномерное волновое уравнение: соотношения на характеристиках

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \iff \begin{cases} (u')' - c^{-2}(\dot{u})' = 0, \\ (u')' = (\dot{u})'. \end{cases} \quad (8)$$

Можем найти  $u \implies$  можем найти  $\dot{u}, u'', \dot{u}'$

$$\implies \begin{cases} u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \\ u'' dx + \dot{u}' dt = du' \\ \dot{u} dt + \dot{u}' dx = d\dot{u} \end{cases} \implies \mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ dx & 0 & dt \\ 0 & dt & dx \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\mathcal{D} = 0 \iff c^2 dt^2 = dx^2 \iff \begin{cases} x - ct = \text{const} = \phi_- \\ x + ct = \text{const} = \phi_+ \end{cases}.$$

На характеристиках система должны быть разрешима:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ dx & 0 & dt \\ 0 & dt & dx \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 & 0 \\ dx & 0 & dt & du' \\ 0 & dt & dx & d\dot{u} \end{bmatrix} \iff dt d\dot{u} = dx du'$$

$$\begin{matrix} \iff \\ dx = \pm c dt \end{matrix} \quad d\dot{u} = \pm c du' \quad \iff \begin{cases} u' - c^{-1}\dot{u} = \text{const}, \\ u' + c^{-1}\dot{u} = \text{const}. \end{cases}$$

— соотношения на характеристиках, где система 2го порядка сводится к одному из уравнений 1го порядка.

## Одномерное волновое уравнение: общее решение

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \iff \begin{cases} (u')' - c^{-2}(\dot{u})' = 0, \\ (u')' = (\dot{u})'. \end{cases} \quad (8)$$

Можем найти  $u \implies$  можем найти  $\ddot{u}$ ,  $u''$ ,  $\dot{u}'$

$$\implies \begin{cases} u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \\ u'' dx + \dot{u}' dt = du' \\ \ddot{u} dt + \dot{u}' dx = d\dot{u} \end{cases} \implies \mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ dx & 0 & dt \\ 0 & dt & dx \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\mathcal{D} = 0 \iff c^2 dt^2 = dx^2 \iff \begin{cases} x - ct = \text{const} = \phi_- \\ x + ct = \text{const} = \phi_+ \end{cases}.$$

На характеристиках PDE (8) упрощается, рассмотрим его в новых переменных  $u(t, x) = u(\phi_+, \phi_-)$ :

$$\begin{aligned} du &= u_{\phi_+}(dx + cdt) + u_{\phi_-}(dx - cdt), \\ d^2u &= u_{\phi_+\phi_+}(dx + cdt)^2 + u_{\phi_-\phi_-}(dx - cdt)^2 + 2u_{\phi_+\phi_-}(dx^2 - c^2dt^2), \\ \ddot{u} &= c^2(u_{\phi_+\phi_+} - 2u_{\phi_+\phi_-} + u_{\phi_-\phi_-}), \quad u'' = u_{\phi_+\phi_+} + 2u_{\phi_+\phi_-} + u_{\phi_-\phi_-}. \end{aligned}$$

Подставляя в PDE (8) и интегрируя, получим решение Даламбера:

$$u_{\phi_+\phi_-} = 0 \iff u = \Psi_-(x - ct) + \Psi_+(x + ct).$$

Здесь  $\Psi_{\pm}$  — произвольные функции (формы волн или просто волны),  $\phi_{\pm}$  — фазы,  $c$  — фазовая скорость (скорость движения точки  $x = X(t)$  с постоянной фазой):  $X(t) \pm ct = \text{const} \implies \dot{X} = \mp c$ .

## Одномерное волновое уравнение: соотношения на характеристиках

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \iff \begin{cases} (u')' - c^{-2}(\dot{u})' = 0, \\ (u')' = (\dot{u})'. \end{cases} \quad (8)$$

Можем найти  $u \implies$  можем найти  $\dot{u}, u'', \dot{u}'$

$$\implies \begin{cases} u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \\ u'' dx + \dot{u}' dt = du' \\ \dot{u} dt + \dot{u}' dx = d\dot{u} \end{cases} \implies \mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ dx & 0 & dt \\ 0 & dt & dx \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\mathcal{D} = 0 \iff c^2 dt^2 = dx^2 \iff \begin{cases} x - ct = \text{const} = \phi_- \\ x + ct = \text{const} = \phi_+ \end{cases}.$$

На характеристиках система должны быть разрешима:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 \\ dx & 0 & dt \\ 0 & dt & dx \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -c^{-2} & 0 & 0 \\ dx & 0 & dt & du' \\ 0 & dt & dx & d\dot{u} \end{bmatrix} \iff dt d\dot{u} = dx du'$$

$$\iff_{dx=\pm c dt} d\dot{u} = \pm c du' \iff \begin{cases} u' - c^{-1}\dot{u} = \text{const} = 2\Psi'_-, \\ u' + c^{-1}\dot{u} = \text{const} = 2\Psi'_+. \end{cases}$$

— соотношения на характеристиках, где система 2го порядка сводится к одному из уравнений 1го порядка.

# Альтернативный подход для волнового уравнения: факторизация дифференциального оператора

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0 \iff \left(\frac{\partial}{\partial x} + c^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - c^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0 \iff \begin{cases} u = u_- + u_+, \\ u'_- + c^{-1}\dot{u}_- = 0, \\ u'_+ - c^{-1}\dot{u}_+ = 0. \end{cases}$$

Т.е., общее решение  $u$  волнового уравнения — сумма общих решений  $u_-$  и  $u_+$  односторонних волновых уравнений, для которых характеристическая система имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \pm c^{-1}, \\ \frac{dx}{ds} &= 1. \end{aligned}$$

Характеристики односторонних волновых уравнений — кривые, удовлетворяющие ODE

$$\frac{dx}{dt} = \pm c \iff x \mp ct = \text{const}:$$

$$x - ct = \text{const},$$

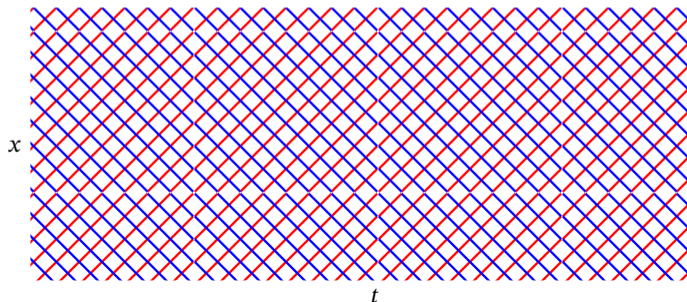
$$x + ct = \text{const}.$$

Соотношения на характеристиках:

$$du_{\mp} \Big|_{x \mp ct = \text{const}} = 0 \implies \begin{cases} u_- = \Psi_-(x - ct), \\ u_+ = \Psi_+(x + ct). \end{cases}$$

# Одномерное волновое уравнение: метод характеристик

- Рассматриваем поведение решения в плоскости  $(t, x)$ .
- Через каждую точку плоскости проходят две характеристики, на которых фазы  $\phi_- = x - ct$  и  $\phi_+ = x + ct$  постоянны.
- В каждую точку возмущение приходит по характеристикам в виде двух волн  $\Psi_-(\phi_-)$  и  $\Psi_+(\phi_+)$  (бегущих “направо” и “налево” соответственно) неизменные вдоль характеристик.
- В каждой точки решение равно сумме волн:  $u = \Psi_-(\phi_-) + \Psi_+(\phi_+)$ .
- Вдоль характеристик решение (сумма волн) удовлетворяет соотношению на характеристике ( $u' - c^{-1}\dot{u} = \text{const} = 2\Psi'_-$ ,  $u' + c^{-1}\dot{u} = \text{const} = 2\Psi'_+$ ).



## Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах



- 1 На интервале  $x \in [-1, 1]$  для всех  $t > 0$  найти решение уравнения

$$u'' - \ddot{u} = 0,$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям при  $t = 0$  и краевым условиям при  $t > 0$

$$\dot{u}(\pm 1, t) = \pm 1$$

(растяжение стержня кинематическим нагружением).

- 2 На интервале  $x \in [-1, 1]$  для всех  $t > 0$  найти решение уравнения

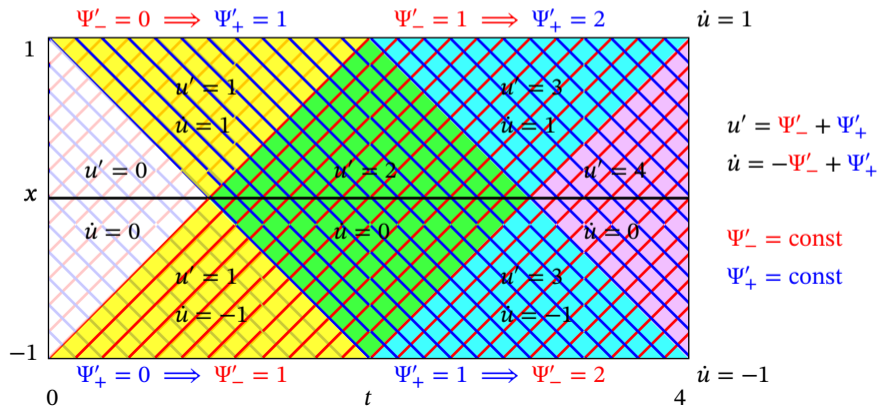
$$u'' - \ddot{u} = 0,$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям при  $t = 0$  и краевым условиям при  $t > 0$

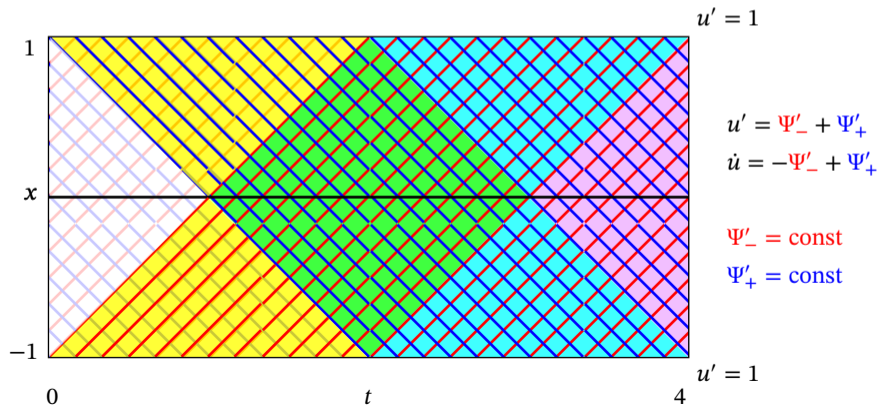
$$u'(\pm 1, t) = 1$$

(растяжение стержня силовым нагружением).

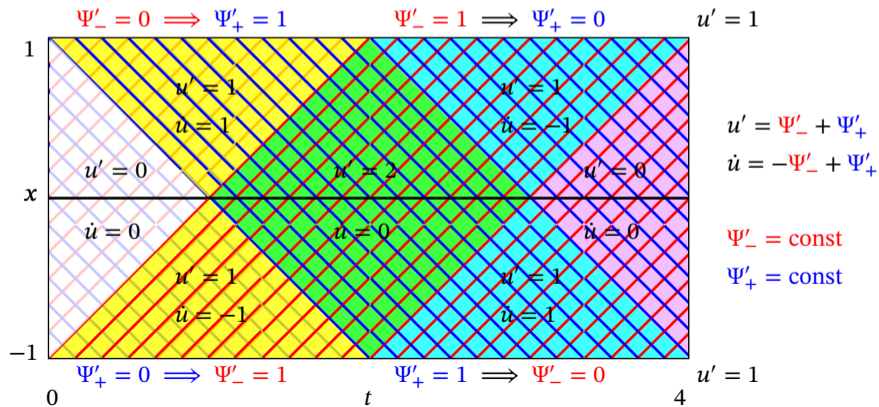
# Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: кинематическое нагружение



# Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: силовое нагружение

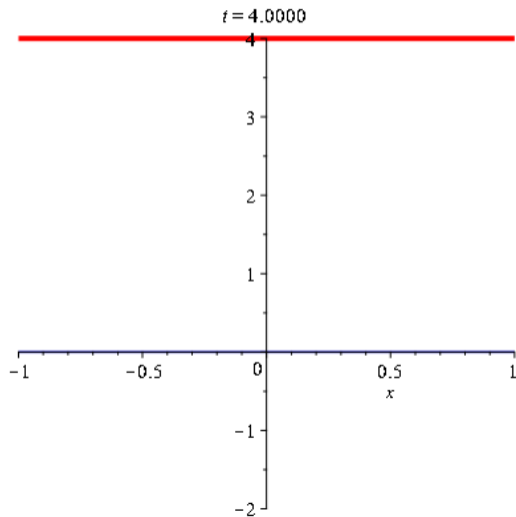


# Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: силовое нагружение



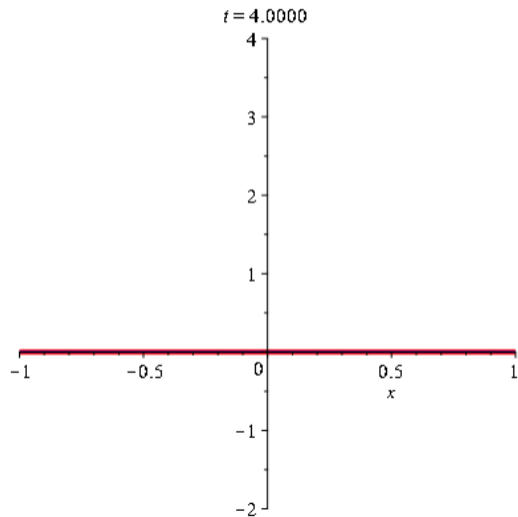
# Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: кинематическое нагружение

Деформация, скорость.



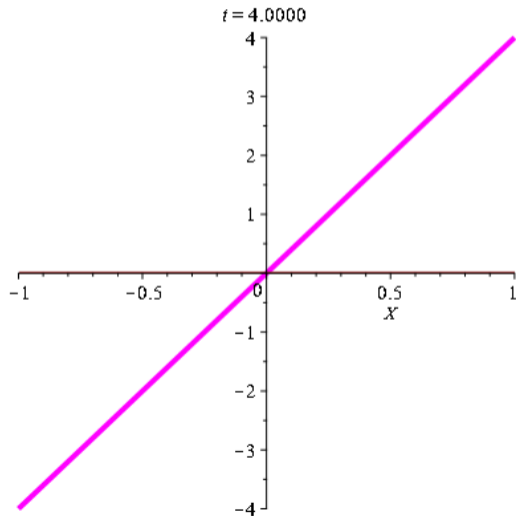
# Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: силовое нагружение

Деформация, скорость.



# Растяжение конечного стержня нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: перемещения

Кинематическое и силовое нагружение.



## Парадокс исчезновения волнового процесса

- На интервале  $x \in [-1, 1]$  для всех  $t > 0$  найти решение уравнения

$$u'' - \ddot{u} = 0,$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям при  $t = 0$  и краевым условиям при  $t > 0$

$$u'(\pm 1, t) = H(4 - t)$$

(растяжение стержня силовым нагружением).



Е.Е. Павловская, Ю.В. Петров.

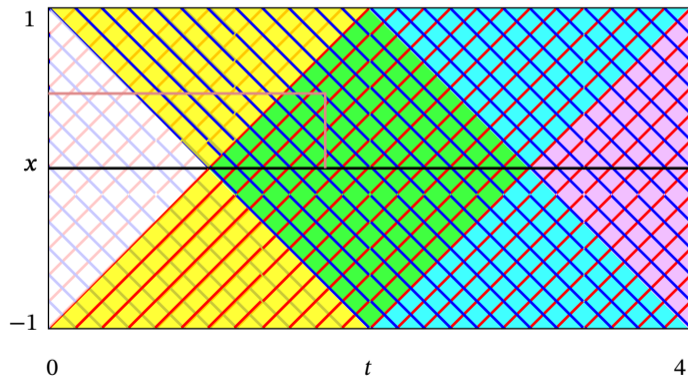
О некоторых особенностях решения динамических задач теории упругости

Известия РАН, МТТ, №4, 2002, с. 39–45.

# Растяжение конечного стержня, нестационарными нагрузками, приложенными на его концах: перемещения

Как определить перемещения?

$$u = \int u' dx = \int \dot{u} dt$$



## Задачи

Найти характеристики и условия на характеристиках для

- ① системы уравнений Коши-Римана

$$u_x - v_y = 0,$$

$$u_y + v_x = 0;$$

- ② уравнения Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0;$$

- ③ уравнения Клейна-Гордона

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} - ku = 0.$$

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа**
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения

## Локально-интегрируемые функции

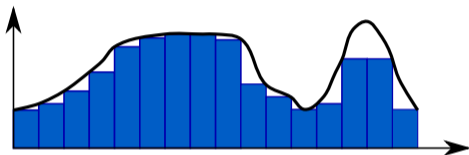
- Одним из важнейших понятий в классической матфизике является понятие локально интегрируемой функции.
- Требование локальной интегрируемости связано с необходимостью иметь возможность вычислить, сколько физической величины (например, объема, массы, количества движения, энергии и т.д.) находится в заданной ограниченной области из  $\mathbb{R}^n$ .
- В современной матфизике интегрируемость функции понимается в смысле Лебега ...
- ...поскольку классический интеграл Римана оказался малоприменимым для потребностей матфизики.
- Причина в том, что многие встречающиеся в приложениях функции оказываются неинтегрируемыми (например, любая неограниченная функция неинтегрируема по Риману).

# Теория меры и интегрирования Лебега

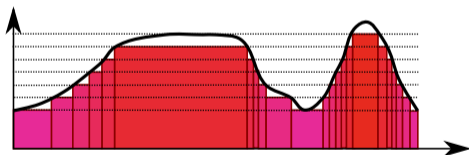
- Интеграл Лебега — это обобщение интеграла Римана на более широкий класс функций.
- Все функции, определённые на конечном отрезке числовой прямой и интегрируемые по Риману, являются также интегрируемыми по Лебегу, причём в этом случае оба интеграла равны. Однако существует большой класс функций, определённых на отрезке и интегрируемых по Лебегу, но неинтегрируемых по Риману. Также интеграл Лебега может иметь смысл для функций, заданных на произвольных абстрактных множествах.
- Мера Лебега — понятие, обобщающее понятия длины, площади, объёма и т.д. (меры Жордана в  $\mathbb{R}^n$ ) как для абстрактных множеств, так и для подмножеств  $\mathbb{R}^n$ , неизмеримых по Жордану.
- Сначала строится теория меры Лебега (которая определена на измеримых множествах), а потом — теория интегрирования, применимая к измеримым функциям.

# Теория меры и интегрирования Лебега

- Идея построения интеграла Лебега состоит в том, что вместо разбиения области определения подынтегральной функции на части и составления потом интегральной суммы из значений функции на этих частях, на интервалы разбивают её область значений, а затем суммируют с соответствующими весами меры прообразов этих интервалов.



$$\sum_{k=1}^N F(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$



$$\sum_{k=1}^N y_k \mu\{x \in X : y_k < F(x) \leq y_{k+1}\}$$

- Современная теория вероятностей является теорией меры и интеграла Лебега в специальном случае, когда мера универсального множества равна единице.



А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин

Элементы теории функций и функционального анализа.

М., Наука, ...

## Альтернативный подход

- Интеграл Лебега в  $\mathbb{R}^n$  вводится как обобщение понятия интеграла Римана.
- Мера Лебега в  $\mathbb{R}^n$  вводится как интеграл от характеристической функции множества.

Такой подход позволяет быстро ввести необходимые для матфизики понятия.



[В.С. Владимиров.](#)

Уравнения математической физики.

[М., Наука, ...](#)

# Интеграл Лебега: множества меры нуль

## Определение

Множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  имеет меру нуль  $\iff \forall \epsilon > 0$  оно может быть покрыто не более чем счетной системой шаров суммарного объема  $< \epsilon$ .

Из этого определения вытекает, что всякое подмножество множества меры нуль имеет меру нуль и объединение не более чем счетного числа множеств меры нуль также имеет меру нуль. Например, всякое счетное множество и всякая кусочно-гладкая поверхность имеют меру нуль.

## Определение

Некоторое свойство выполняется почти везде в области  $G \in \mathbb{R}^n$ , если множество точек области  $G$ , которые не обладают этим свойством, имеет меру нуль.

## Интеграл Лебега: измеримые функции и множества

Далее считаем, что все функции заданы во всем пространстве  $\mathbb{R}^n$  и почти везде конечны.

### Определение

Функция **называется** измеримой, если она совпадает почти везде с пределом почти везде сходящейся последовательности кусочно-непрерывных функций.

$f, g$  — измеримы  $\implies f + g, fg, \max(f, g)$  etc измеримы.

### Определение

Множество  $A \in \mathbb{R}^n$  называется измеримым, если его характеристическая функция  $\chi_A(\mathbf{x})$  измерима.

Неизмеримые функции (и множества) устроены весьма неправильно, и ни одна из них не построена в явном виде; можно только теоретически доказать их существование, используя так называемую аксиому выбора. Это говорит о том, что все функции и множества, которые нам могут встретиться, будут измеримы. **Поэтому в дальнейшем будем предполагать, не оговаривая этого каждый раз, что все рассматриваемые множества измеримы, а функции измеримы и почти везде конечны.**

Пример неизмеримого множества — множество Витали.

## Пример неизмеримого множества — множество Витали

Рассмотрим отношение эквивалентности  $\sim$  на отрезке  $[0, 1]$ :  $x \sim y$  если разность  $x - y$  рациональна. Это отношение эквивалентности разбивает интервал  $[0, 1]$  на классы эквивалентности, каждый из которых имеет счётную мощность, но их количество имеет мощность континуума. Далее, из каждого класса эквивалентности выберем по представителю — одной точке.

### Аксиома выбора

Для всякого семейства непустых множеств существует функция, которая каждому множеству семейства сопоставляет один из элементов этого множества.

Тогда полученное множество  $E$  представителей будет неизмеримым.

Действительно, если сдвинуть  $E$  счётное число раз на все рациональные числа из интервала  $[-1, 1]$ , то объединение будет содержать весь отрезок  $[0, 1]$ , но при этом оно будет содержаться в отрезке  $[-1, 2]$ . При этом «сдвинутые копии» множества  $E$  не будут пересекаться друг с другом, что непосредственно следует из построения  $\sim$  и  $E$ .

$\square$   $E$  — измеримо (предполагаем что, мера конгруэнтных множеств одинакова):

- Мера  $E$  ноль. Тогда мера  $[0, 1]$  ноль (счётное объединение множеств меры ноль).
- Мера  $E$  — положительна. Тогда мера  $[-1, 2]$  бесконечна (счётное объединение множеств одинаковой ненулевой меры).

# Интеграл Лебега от неотрицательной функции по $\mathbb{R}^n$

## Определение

Пусть неотрицательная измеримая функция  $f(\mathbf{x})$  совпадает почти везде с пределом неубывающей последовательности кусочно-непрерывных функций  $f_k(\mathbf{x})$  с ограниченной последовательностью интегралов (Римана)  $\int f_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ . Предел неубывающей ограниченной последовательности этих интегралов называется интегралом Лебега функции  $f$ . Функция  $f$  в этом случае называется интегрируемой по Лебегу или суммируемой.

Здесь вообще говоря нужно доказать корректность (независимость от  $f_k$ ).

## Теорема

Функция  $f(\mathbf{x}) \geq 0$  равна нулю почти везде  $\iff \int f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$ .

## Обозначение

$$\int f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \int f(\mathbf{x}) \, dx_1 \dots dx_n .$$

Интеграл Лебега от вещественной функции по  $\mathbb{R}^n$ 

□  $f$  — вещественная:

$$f_+ = \max(f, 0),$$

$$f = f_+ - f_-,$$

$$f_- = \max(-f, 0);$$

$$|f| = f_+ + f_-.$$

**Определение**

Вещественная функция  $f$  называется интегрируемой по Лебегу (суммируемой)  $f \in \mathcal{L}$ , если неотрицательные  $f_+$ ,  $f_-$  интегрируемы.

Число

$$\int f \, dx \equiv \int f_+ \, dx - \int f_- \, dx$$

называется интегралом Лебега.

Интеграл Лебега от комплекснозначной функции по  $\mathbb{R}^n$ 

## Определение

Комплекснозначная функция  $f$  называется интегрируемой по Лебегу (суммируемой), если  $\operatorname{Re} f$  и  $\operatorname{Im} f$  интегрируемы.

Число

$$\int f \, d\mathbf{x} \equiv \int \operatorname{Re} f \, d\mathbf{x} + i \int \operatorname{Im} f \, d\mathbf{x}$$

называется интегралом Лебега.

# Интеграл по измеримому множеству

## Определение

Функция  $f$  интегрируема по Лебегу на измеримом множестве  $A$ ,  $f \in \mathcal{L}(A)$ , если  $f\chi_A \in \mathcal{L}$ .

Число

$$\int_A f \, dx \equiv \int f\chi_A \, dx$$

называется интегралом Лебега функции  $f$  по множеству  $A$ .

Число

$$\int_A dx \equiv \int \chi_A \, dx$$

называется мерой Лебега множества  $A$ .

# Теорема Лебега

## Теорема

Пусть последовательность (измеримых) функций  $f_k$  сходится почти везде к функции  $f$ . Если существует интегрируемая функция  $g$  такая, что  $|f_k| \leq g$  почти везде, то  $f$  — интегрируема и

$$\lim \int f_k dx = \int f dx.$$

Отсюда в частности следует, что всякая интегрируемая функция интегрируема по любому измеримому множеству  $A$ .

## Связь с интегралом Римана

### Теорема

Если функции  $f(x)$  и  $|f(x)|$  интегрируемы по Риману (возможно, в несобственном смысле), то они интегрируемы и по Лебегу, и их интегралы в обоих смыслах совпадают.

Пример ограниченной интегрируемой по Лебегу, но не интегрируемой по Риману функции: функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ иррационально,} \\ 1, & x \text{ рационально.} \end{cases}$$

*(доказать по определению!)*

### Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману в $\mathbb{R}^1$

Функция интегрируема по Риману на отрезке  $[a, b]$ , тогда и только тогда, когда на этом отрезке она ограничена, и множество точек, где она разрывна, имеет меру нуль.

### Контрольный вопрос

Почему функция Дирихле не интегрируема по Риману?

# Локально интегрируемые функции

## Определение

Ограниченная область  $G'$  называется подобластью, строго лежащей в области  $G$ , если  $\bar{G}' \subset G$ , при этом пишут  $G' \Subset G$ .

## Определение

Функция  $f$  называется локально интегрируемой по Лебегу в области  $G$ ,  $f \in \mathcal{L}_{loc}(G)$ , если  $f \in \mathcal{L}(G')$  для всех измеримых  $G' \Subset G$ .

## Контрольный вопрос

Является ли локально интегрируемой функция  $f(t) = 1/t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ?

## Теорема Фубини

## Теорема

Если функция  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , заданная на  $\mathbb{R}^{n+m}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  измерима и существует повторный интеграл Лебега

$$\int \left( \int |f| \, d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y} < \infty,$$

то  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ . Обратно, если  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ , то интегралы Лебега

$$\int f \, d\mathbf{x}, \quad \int f \, d\mathbf{y}$$

существуют почти везде, интегрируемы по Лебегу, и справедливы равенства

$$\int \left( \int f \, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int f \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} = \int \left( \int f \, d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y}.$$

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях**
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения



В.С. Владимиров.

Уравнения математической физики.

М., Наука, ...



И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилев.

Обобщенные функции и действия над ними.

М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959.

# Локально интегрируемые функции как линейные функционалы

## Определение

Функция  $\phi(\mathbf{x})$  называется финитной, если  $\phi(\mathbf{x}) \equiv 0$  при  $|\mathbf{x}| > R$  для некоторого  $R$ .

Из [теоремы Лебега](#) следует, что любой локально интегрируемой функции  $f$  на  $\mathbb{R}^n$  можно сопоставить линейный функционал, порождаемый локально интегрируемой в  $\mathbb{R}^n$  функцией  $f$ , действующей по правилу  $(f, \phi) = \int f \phi \, d\mathbf{x}$  на гладкие финитные функции  $\phi$ .

## $\delta$ -функция Дирака как линейный функционал

Возникает при попытке ввести понятие плотности некоторой физической величины для точечного объекта (например, массы для материальной точки, плотности точечного заряда, точечной силы и т.д.).

Размажем рассматриваемую величину по шару радиуса  $\epsilon$  и рассмотрим функцию, заданную на  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  и зависящую от параметра  $\epsilon$ :

$$f_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\epsilon^3}, & |\mathbf{x}| < \epsilon; \\ 0, & |\mathbf{x}| > \epsilon. \end{cases}$$

Примем сначала, что

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} +\infty, & \mathbf{x} = 0; \\ 0, & \mathbf{x} \neq 0. \end{cases}$$

в поточечном смысле. Тогда

$$\int_V \delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} =$$

## $\delta$ -функция Дирака как линейный функционал

Возникает при попытке ввести понятие плотности некоторой физической величины для точечного объекта (например, массы для материальной точки, плотности точечного заряда, точечной силы и т.д.).

Размажем рассматриваемую величину по шару радиуса  $\epsilon$  и рассмотрим функцию, заданную на  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  и зависящую от параметра  $\epsilon$ :

$$f_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\epsilon^3}, & |\mathbf{x}| < \epsilon; \\ 0, & |\mathbf{x}| > \epsilon. \end{cases}$$

Примем сначала, что

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} +\infty, & \mathbf{x} = 0; \\ 0, & \mathbf{x} \neq 0. \end{cases}$$

в поточечном смысле. Тогда

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \text{ области } \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3.$$

Хотим, чтобы было так:

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \begin{cases} 1, & \mathbf{0} \in \mathcal{V}; \\ 0, & \mathbf{0} \notin \mathcal{V}. \end{cases}$$

Поточечный предел не годится!

## $\delta$ -функция Дирака как линейный функционал

$$f_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\epsilon^3}, & |\mathbf{x}| < \epsilon; \\ 0, & |\mathbf{x}| > \epsilon. \end{cases}$$

Рассмотрим слабый предел  $f_\epsilon$ , т.е. для любой достаточно гладкой функции  $\phi$  найдём предел при  $\epsilon \rightarrow 0$  величины  $\int f_\epsilon(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ : Вычисляя, находим:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int f_\epsilon(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{0}).$$

Слабым пределом является функционал  $\delta(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(\mathbf{x})$ , сопоставляющий каждой непрерывной в  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  функции  $\phi(\mathbf{x})$  число  $\phi(\mathbf{0})$ : её значение в точке  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  — дельта-функция Дирака. Тогда имеем:

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x}) \chi_{\mathcal{V}} d\mathbf{x} = \begin{cases} 1, & \mathbf{0} \in \mathcal{V}; \\ 0, & \mathbf{0} \notin \mathcal{V}. \end{cases}$$

## Обобщенные функции: идея

- В связи с тем, например, что решения гиперболических уравнений могут быть разрывными, для решения соответствующих задач матфизики недостаточно локально-интегрируемых функций, а нужны еще так называемые сингулярные функции (например, дельта-функция Дирака).
- При решении конкретных задач сингулярные функции встречаются, как правило, только на начальном или промежуточных этапах. В окончательном ответе сингулярные функции или вовсе отсутствуют или фигурируют под знаком “интеграла” в произведении с какой-либо достаточно хорошей функцией.
- Таким образом, нет прямой необходимости отвечать на вопрос, что такое сингулярная функция сама по себе: нам достаточно понимать как с ней работать.
- Множество всех регулярных (локально интегрируемых функций) и сингулярных функций является множеством обобщенных функций.

## Основные и обобщенные функции — определение

- Обобщенные функции (distributions) — линейные непрерывные функционалы на пространстве достаточно “хороших” функций (основных, test functions).
- Чем более жёсткие требования налагаются на основные функции, тем богаче выбор соответствующих обобщенных функций.
- Далее рассматриваем пространство  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  — пространство финитных (тождественно равных нулю за пределами некоторого шара) бесконечно дифференцируемых функций:  $\mathcal{D} \subset C^\infty$ .
- Последовательность функций из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  сходится, если они равны нулю за пределами некоторого шара и в нём они  $C^\infty$ -сходятся.
- Пример основной функции, отличной от нуля, — “шапочка”:  $C \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - |\mathbf{x}|^2}\right) H(\epsilon - |\mathbf{x}|)$  ( $H$  — функция Хевисайда).

### Определение

Обобщенные функции — элементы линейного пространства  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  линейных непрерывных функционалов на  $\mathcal{D}$ .

## Основные и обобщенные функции — свойства

- Обобщенная функция  $f$  есть функционал на  $\mathcal{D}$ , т.е. каждой  $\phi \in \mathcal{D}$  сопоставляется (комплексное) число  $(f, \phi)$ .
- Обобщенная функция  $f$  есть линейный функционал на  $\mathcal{D}$ , т.е.

$$(f, \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2) = \alpha_1 (f, \phi_1) + \alpha_2 (f, \phi_2).$$

- Обобщенная функция  $f$  есть непрерывный функционал на  $\mathcal{D}$ , т.е.

$$\varphi_k \rightarrow 0 \implies (f, \varphi_k) \rightarrow 0.$$

- Линейные функционалы на  $\mathcal{D}$  не обязаны быть непрерывными. Однако в явном виде не построено ни одного линейного разрывного функционала на  $\mathcal{D}$ ; можно только теоретически доказать их существование, используя аксиому выбора.

Сходимость в  $\mathcal{D}'$  и полнота  $\mathcal{D}'$ 

## Теорема

Пусть последовательность  $f_k \in \mathcal{D}'$  такова, что для каждой  $\phi \in \mathcal{D}$  числовая последовательность  $(f_k, \phi)$  сходится при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда функционал  $f$  на  $\mathcal{D}$ , определенный равенством

$$(f, \phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \phi)$$

также является линейным и непрерывным.

## Носитель основной функции

### Определение

Носителем  $\text{supp } \phi$  непрерывной функции называется замыкание множества тех точек, где  $\phi \neq 0$ .

Совокупность основных функций, носители которых содержатся в данной области  $\mathcal{G}$ , обозначим через  $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ ; таким образом,  $\mathcal{D}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathcal{D}$ .

## Нулевое множество обобщенной функции

Обобщенные функции, вообще говоря, не имеют значений в отдельных точках. Тем не менее можно говорить об обращении в нуль ( $f = 0$ ) обобщенной функции в области.

### Определение

Обобщенная функция  $f$  обращается в нуль в области  $\mathcal{G}$ , если  $(f, \phi) = 0 \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ .

### Теорема

Обобщенная функция  $f$  *обращается в нуль в некоторой окрестности каждой точки области*  $\mathcal{G}$   
 $\Leftrightarrow f$  *обращается в нуль в области*  $\mathcal{G}$ .

### Определение

Объединение всех окрестностей, где  $f = 0$ , образует открытое множество  $\mathcal{O}_f$  которое называется нулевым множеством обобщенной функции  $f$  и представляет собой наибольшее открытое множество, где  $f = 0$ .

# Носитель обобщенной функции

## Определение

Носителем  $\text{supp } f$  называется  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}_f$ .

## Определение

Если  $\text{supp } f$  — ограниченное множество, то обобщенная функция  $f$  называется финитной.

## Регулярные обобщенные функции

Простейшим примером обобщенной функции является функционал, порождаемый локально интегрируемой в  $\mathbb{R}^n$  функцией  $f: (f, \phi) = \int f \phi \, dx$ .

### Теорема (лемма дю Буа-Реймона)

*Для того чтобы локально интегрируемая в  $\mathcal{G}$  функция  $f(x)$  обращалась в нуль в области  $\mathcal{G}$  в смысле обобщенных функций, необходимо и достаточно, чтобы  $f(x) = 0$  почти везде в  $\mathcal{G}$ .*

### Доказательство.

Достаточность очевидна, необходимость доказывается разложением по локальной тригонометрической системе для шара, содержащегося в окрестности выбранной точки области □

Всякая локально интегрируемая функция определяет регулярную обобщенную функцию. Из теоремы следует, что если регулярные обобщенные функции равны в смысле обобщенных функций, то они равны почти везде как локально-интегрируемые. Поэтому мы будем отождествлять локально интегрируемую функцию  $f(x)$  и порождаемую ею обобщенную функцию.

# Сингулярные обобщенные функции

Сингулярную обобщенную функцию нельзя отождествить ни с какой локально интегрируемой функцией.

## Примеры.

- Дельта-функция Дирака  $\delta(\mathbf{x})$ ;
- $\text{VP} \frac{1}{t} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  :  $\left(\text{VP} \frac{1}{t}, \phi\right) = \text{VP} \int \frac{\phi(t)}{t} dt$  — интеграл в смысле главного значения.

# Линейная замена переменных в обобщенных функциях из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$

□  $f$  — локально интегрируемая,  $t = A\tau + b$ ,  $A \neq 0$  — неособенное линейное преобразование пространства  $\mathbb{R}^1$  на себя. Тогда:

$$\begin{aligned} (f(A\tau + b), \phi) &= \int_{\mathbb{R}} f(A\tau + b)\phi(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{|A|} \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi(A^{-1}(t - b)) dt = \frac{1}{|A|} (f, \phi(A^{-1}(t - b))) \end{aligned}$$

□  $f \in \mathcal{D}'$ :

## Определение

$$(f(At + b), \phi) \equiv \frac{1}{|A|} (f, \phi(A^{-1}(t - b)))$$

# Линейная замена переменных в обобщенных функциях из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

□  $f$  — локально интегрируемая,  $\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}$ ,  $\det \mathbf{A} \neq 0$  — неособенное линейное преобразование пространства  $\mathbb{R}^n$  на себя. Тогда:

$$\begin{aligned} (f(\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}), \phi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}) \phi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \\ &= \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b})) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} (f, \phi(\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}))) \end{aligned}$$

□  $f \in \mathcal{D}'$ :

## Определение

$$(f(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}), \phi) \equiv \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} (f, \phi(\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b})))$$

Линейная замена переменных в обобщенных функциях из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ : частные случаи

- $(f(c\mathbf{x}), \phi) = \frac{1}{|c|^n} (f, \phi(c^{-1}\mathbf{x}))$
- $(f(\mathbf{x} + \mathbf{b}), \phi) = (f, \phi(\mathbf{x} - \mathbf{b}))$
- $(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \phi) = (\delta(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)) = \phi(\mathbf{x}_0)$
- $\delta(c\mathbf{x}) = \frac{1}{|c|^n} \delta(\mathbf{x})$
- $[\delta(t)] = \text{секунда}^{-1}$ , если  $t$  — время.

## Умножение обобщенных функций

Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую:  $\square a(\mathbf{x}) \in C^\infty$ :

## Определение

$$(af, \phi) \equiv (f, a\phi).$$

## Примеры.

- $a(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}) = a(\mathbf{0})\delta(\mathbf{x})$
- $t \text{ VP } \frac{1}{t} = 1$ :

$$\left(t \text{ VP } \frac{1}{t}, \phi\right) = \left(\text{VP } \frac{1}{t}, t\phi\right) = \text{VP} \int_{\mathbb{R}} \frac{t\phi(t)}{t} dt = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt = (1, \phi).$$

## Умножение обобщенных функций

Операция произведения не допускает распространения на любые обобщённые функции так, чтобы она была ассоциативной, коммутативной и чтобы сужение этой операции на множество непрерывных функций совпадало с обычным произведением:

$$0 = 0 \text{ VP } \frac{1}{t} = (t\delta(t)) \text{ VP } \frac{1}{t} = (\delta(t)t) \text{ VP } \frac{1}{t} = \delta(t) \left( t \text{ VP } \frac{1}{t} \right) = \delta(t)$$

Дифференцирование обобщённых функций из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ 

Для гладких локально-интегрируемых  $f$

$$\int_{\mathbb{R}} Df(t)\phi(t) dt = - \int_{\mathbb{R}} f(t)D\phi(t) dt$$

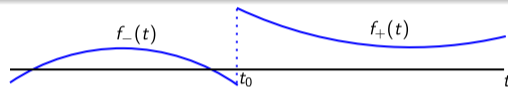
Определение

$$(Df, \phi) = -(f, D\phi)$$

## Дифференцирование функции, имеющей разрыв 1 рода

## Задача

$$f(t) = \begin{cases} f_-(t), & t < t_0, \\ f_+(t), & t > t_0; \end{cases} \quad f_-(t_0) \neq f_+(t_0), \quad f_{\pm} \in C^1. \text{ Вычислить } f'.$$



$$\{f'\} \equiv \begin{cases} f'_-(t), & t < t_0, \\ f'_+(t), & t > t_0; \end{cases} \quad \text{— классическая производная } f(t), \quad [f] \equiv f_+(t_0) - f_-(t_0) \quad \text{— величина скачка.}$$

$$\begin{aligned} (f', \phi) &= -(f, \phi') = - \int_{\mathbb{R}} f(t) \phi'(t) dt = - \left( \int_{-\infty}^{t_0} + \int_{t_0}^{\infty} \right) f(t) \phi'(t) dt = \\ &= (f(t_0 + 0) - f(t_0 - 0)) \phi(t_0) + \int_{\mathbb{R}} \{f'\}(t) \phi(t) dt = \\ &= ([f] \delta(t - t_0) + \{f'\}, \phi). \end{aligned}$$

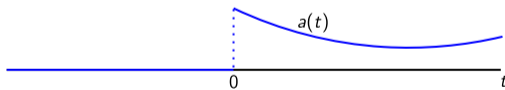
## Следствие

$$H' = \delta.$$

## Дифференцирование функции, имеющей разрыв 1 рода

## Задача

$f(t) = a(t)H(t)$ ,  $a \in C^1$  Вычислить  $f'$ .



Свойства  $\delta'(t)$ 

## Задача

Доказать равенство:  $a(t)\delta'(t) = -a'(0)\delta(t) + a(0)\delta'(t)$ ,  $a \in C^1$ .

Дифференцирование обобщённых функций из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 

Для гладких локально-интегрируемых  $f$

$$\int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})D^\alpha \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

## Определение

$$(D^\alpha f, \phi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \phi)$$

Здесь используются обозначения:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

— мульти-индекс,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

$$D^\alpha \phi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} \phi(\mathbf{x})}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

— частная производная  $\phi$  порядка  $|\alpha|$ .

## Свойства обобщенных производных

- Если обобщенная функция гладкая, то ее обобщенная производная совпадает с классической производной (прямое следствие определения обобщенной производной)
- Любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема (поскольку основные функции бесконечно дифференцируемы)
- Результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования (поскольку это так для основных функций)

# Дифференцирование произведения обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую

## Утверждение

Для произведения  $af$ , где  $a \in C^\infty$ ,  $f \in \mathcal{D}'$ , справедлива формула Лейбница дифференцирования произведения. Например, в одномерном случае

$$(af)' = a'f + af'.$$

## Доказательство.

$$\begin{aligned} ((af)', \phi) &= -(af, \phi') = -(f, a\phi') = -(f, (a\phi)' - a'\phi) = \\ &= -(f, (a\phi)') + (f, a'\phi) = (f', a\phi) + (a'f, \phi) = (a'f + af', \phi) \end{aligned}$$



Наводящие соображения:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(\tau) \phi(\tau) d\tau = \phi(0)$$

□  $\tau = f(t)$  — монотонная бесконечно дифференцируемая функция, имеющая единственный простой корень при  $t = t_0$ :

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(f(t)) \phi(f(t)) |f'(t)| dt = \phi(0)$$

□  $\psi(t) = \phi(f(t)) |f'(t)|$ :

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(f(t)) \psi(t) dt = \phi(0) = \frac{\psi(t_0)}{|f'(t_0)|}.$$

$\delta(f(t))$ 

## Определение

□  $t_i$  — все корни  $f(t)$  — простые:  $f(t_i) = 0$ ,  $f'(t_i) \neq 0$ . Тогда

$$(\delta(f(t)), \phi) = \sum_i \frac{\phi(t_i)}{|f'(t_i)|},$$

т.е.

$$\delta(f(t)) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t - t_i).$$

Это определение является естественным обобщением на нелинейный случай [формулы для линейной замены переменных](#) в обобщенных функциях.

## Пример

$$\delta(\sin t) = \sum_i \delta(t - \pi i).$$

$\delta^{(n)}(f(t))$ 

Наводящие соображения:

$$\begin{aligned} \delta(f(t)) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t - t_i) &\implies \delta'(f(t))f'(t) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|} \frac{d\delta(t - t_i)}{dt} \\ \implies \delta'(f(t)) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|} \frac{1}{f'(t)} \frac{d\delta(t - t_i)}{dt} &\implies \delta'(f(t)) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|} \left( \frac{1}{f'(t)} \frac{d}{dt} \right) \delta(t - t_i). \end{aligned}$$

### Определение

□  $t_i$  — все корни  $f(t)$  — простые:  $f(t_i) = 0$ ,  $f'(t_i) \neq 0$ . Тогда

$$\delta^{(n)}(f(t)) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|} \left( \frac{1}{f'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n \delta(t - t_i). \quad (9)$$

### Контрольный вопрос

Можно ли заменить в формуле (9) оператор  $\left( \frac{1}{f'(t)} \frac{d}{dt} \right)$  на  $\left( \frac{1}{f'(t_i)} \frac{d}{dt} \right)$ ?

Структура пространства обобщенных функций  $\mathcal{D}'$ 

## Теорема

Любая обобщенная функция является конечной суммой производных некоторого порядка в обобщенном смысле от некоторых непрерывных функций.

# Формулы Сохоцкого

## Утверждение

$$\frac{1}{t \pm i0} = \mp i\pi\delta(t) + \text{VP} \frac{1}{t}$$

## Доказательство.

□  $\phi(t) \equiv 0$  при  $|t| > R$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int \frac{\phi(t)}{t \pm i\epsilon} dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{t \mp i\epsilon}{t^2 + \epsilon^2} \phi(t) dt = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{\mp i\epsilon}{t^2 + \epsilon^2} \phi(0) dt + \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{t \mp i\epsilon}{t^2 + \epsilon^2} (\phi(t) - \phi(0)) dt = \\ &= \mp 2i\phi(0) \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \text{arctg} \frac{R}{\epsilon} + \int_{-R}^R \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} dt = \\ &= \mp i\pi\phi(0) + \text{VP} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t)}{t} dt - \text{VP} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(0)}{t} dt = \mp i\pi\phi(0) + \text{VP} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t)}{t} dt \end{aligned}$$

□

## Задачи

- 1  $\square f(t) = a(t)H(t)$ ,  $a \in C^2$ . Вычислить  $f''$ .
- 2 Вычислить обобщенные производные порядка 1, 2, 3 функций  $f_1(t) = |t| \sin t$ ,  $f_2(t) = |t| \cos t$ .
- 3 Вычислить обобщенную производную  $f^{(n)}$  порядка  $n$  функции  $f(t) = \text{sign}(\sin t)$ .
- 4 Упростить выражение  $\sin t \cdot \delta(\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}))$ .
- 5 Вычислить  $|\sin t|'' + |\sin t|$ .

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций**
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения

## Прямое произведение обобщенных функций

□  $f(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{y})$  — локально интегрируемые функции в  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^m$  соответственно. Функция  $f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})$  также будет локально интегрируемой в  $\mathbb{R}^{m+n}$ . Она определяет (регулярную) обобщенную функцию, действующую на основные функции  $\phi$  по формулам

$$\begin{aligned}
 (f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}), \phi) &\equiv \iint f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} = \\
 &= \int f(\mathbf{x}) \int g(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} = (f(\mathbf{x}), (g(\mathbf{y}), \phi)) = \\
 &= (g(\mathbf{y})f(\mathbf{x}), \phi) = \iint g(\mathbf{y})f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} = \\
 &= \int g(\mathbf{y}) \int f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} = (g(\mathbf{y}), (f(\mathbf{x}), \phi))
 \end{aligned}$$

## Прямое произведение обобщенных функций

## Определение

Прямым произведением обобщенных функций  $f(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{y})$  из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  и  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  соответственно называется обобщенная функция  $f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})$  из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ , действующая по правилу  $(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (f(\mathbf{x}), (g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})))$ .

## Теорема (корректность определения)

Функционал, определяемый формулой  $(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (f(\mathbf{x}), (g(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})))$ , линейный и непрерывный.

## Свойства прямого произведения обобщенных функций

- Коммутативность

$$f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{y}) \cdot f(\mathbf{x})$$

(для  $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N u_i(\mathbf{x})v_i(\mathbf{y})$  очевидна, в общем случае следует из того, что множество таких функций всюду плотно в  $\mathcal{D}$ )

- Ассоциативность

$$(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})) \cdot h(\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) \cdot (g(\mathbf{y}) \cdot h(\mathbf{z}))$$

- Умножение прямого произведения.  $\exists a(\mathbf{x}) \in C^\infty$  :

$$a(\mathbf{x})(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})) = (a(\mathbf{x})f(\mathbf{x})) \cdot g(\mathbf{y})$$

- Дифференцирование прямого произведения

$$D_{\mathbf{x}}^\alpha (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})) = (D_{\mathbf{x}}^\alpha f(\mathbf{x})) \cdot g(\mathbf{y})$$

## Прямое произведение: пример

Обобщенная функция  $f(x) \cdot 1(y)$ , которая не зависит от  $y$ :

$$(f(x) \cdot 1(y), \phi) = \left( f(x), \int_{\mathbb{R}} \phi(x, y) dy \right) = (1(y) \cdot f(x), \phi) = \int_{\mathbb{R}} (f(x), \phi(x, y)) dy.$$

Здесь  $x, y \in \mathbb{R}$ .

## Свёртка регулярных обобщённых функций

## Определение

□  $f(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x})$  — локально интегрируемые функции в  $\mathbb{R}^n$  такие, что функция  $\int |g(\mathbf{y})f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{y}$  также локально интегрируема. Свёрткой  $f * g$  называется функция

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{y})f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = (g * f)(\mathbf{x})$$

Она стандартным образом определяет (регулярную) обобщенную функцию:

$$\begin{aligned} (f * g, \phi) &= \int (f * g)(\xi)\phi(\xi) d\xi = \\ &= \int \left( \int g(\mathbf{y})f(\xi - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \phi(\xi) d\xi = \\ &= \int g(\mathbf{y}) \left( \int f(\xi - \mathbf{y})\phi(\xi) d\xi \right) d\mathbf{y} = \\ &= \int g(\mathbf{y}) \left( \int f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y} = \\ &= \int \int g(\mathbf{y})f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \end{aligned}$$

## Свёртка (в классическом смысле) существует не всегда!

Некоторые достаточные условия существования свёртки:

- Одна из функций финитна;
- Обе функции обращаются в нуль при  $x < 0$  ( $n = 1$ );
- Обе функции интегрируемы в  $\mathbb{R}^n$ .

## Свёртка обобщённых функций: идея определения

Для локально интегрируемых функций:

$$(f * g, \phi) = (f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})),$$

## Свёртка обобщённых функций: идея определения

Для локально интегрируемых функций:

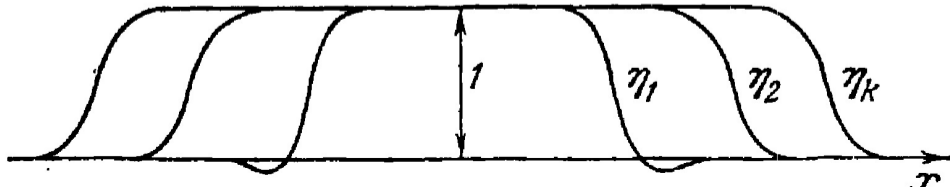
$$(f * g, \phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})) \quad \forall \eta_k,$$

где  $\eta_k \rightarrow 1$  (сходится к единице) в  $\mathcal{D}$ :

- $\eta_k \in \mathcal{D}$ ;
- $\forall$  замкнутого и ограниченного множества  $\mathcal{K}$  найдется  $N$ :  $\eta_k = 1$  при  $k \geq N$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ ;
- $\eta_k$  равномерно ограничены со всеми своими производными:  $|D^\alpha \eta_k| < C_\alpha$ .

Для обобщённых функций:

$$(f * g, \phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})) \quad \forall \eta_k$$



## Свёртка обобщённых функций: определение и свойства

## Определение

Пусть пара обобщенных функций  $f(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{y})$  из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  такова, что их прямое произведение  $f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})$  допускает продолжение на функции вида  $\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ , а именно  $\forall \phi \in \mathcal{D}, \forall \eta_k \rightarrow 1 \exists$  предел числовой последовательности

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})),$$

не зависящий от выбора  $\eta_k$ . Свёрткой  $f * g$  называется функционал

$$(f * g, \phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})).$$

Свойства:

- Линейность;
- Коммутативность (следствие коммутативности прямого произведения).

Свёртка с  $\delta$ 

## Утверждение

Свёртка любой обобщенной функции  $f$  с  $\delta$ -функцией существует и равна  $f$ :

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

## Доказательство.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(\mathbf{x}) \cdot \delta(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(\mathbf{x})(\delta(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}))) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(\mathbf{x}), \eta_k(\mathbf{x}, 0) \phi(\mathbf{x})) = (f, \phi)$$

□

## Дифференцирование свёртки

## Теорема

Если свертка  $f * g$  существует, то существуют свертки  $(D^\alpha f) * g$  и  $f * (D^\alpha g)$ , причем

$$D^\alpha f * g = D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$$

## Доказательство.

Достаточно доказать  $\forall D_j$ :

$$\begin{aligned} & \square \forall \eta_k \rightarrow 1 \implies \eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_k} \rightarrow 1 \implies (D_j(f * g), \phi) = -(f * g, D_j \phi) = \\ & = -\lim_{k \rightarrow \infty} \left( f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y})}{\partial x_j} \right) = -\lim_{k \rightarrow \infty} \left( f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \frac{\partial(\eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}))}{\partial x_j} - \frac{\partial(\eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}))}{\partial x_j} \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \right) = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( D_j f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \right) + \lim_{k \rightarrow \infty} \left( f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \left( \eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right) \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \right) - \lim_{k \rightarrow \infty} \left( f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \right) = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( D_j f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \right) + (f * g, \phi) - (f * g, \phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( D_j f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}), \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \right) = \\ & \qquad \qquad \qquad = (D_j f * g, \phi) \end{aligned}$$

Второе равенство  $f * D_j g = D_j(f * g)$  следует из первого и коммутативности свертки. □

# Дифференцирование свёртки

- Существование сверток  $(D^\alpha f) * g$  и  $f * D^\alpha g$  ( $|\alpha| \geq 1$ ) не достаточно для существования свертки  $f * g$  и справедливости равенства  $(D^\alpha f) * g = f * D^\alpha g$ . **Контрольный вопрос:** почему?
- Например:  $H' * 1 = \delta * 1 = 1$ , но  $H * 1' = H * 0 = 0$ . **Контрольный вопрос:** что можно сказать про свёртку  $H * 1$ ?
- Операция свертки, вообще говоря, не ассоциативна:

$$(H * \delta') * 1 = H' * 1 = 1,$$

$$H * (\delta' * 1) = H * 0 = 0.$$

Свёртка с  $\delta^{(n)}$ 

## Утверждение

Свёртка любой обобщенной функции с  $\delta^{(n)}$  существует и равна  $f^{(n)}$ :

$$f * \delta^{(n)} = \delta^{(n)} * f = f^{(n)}.$$

## Доказательство.

Применяем теорему о дифференцировании свёртки к тождеству

$$f * \delta = \delta * f = f.$$



## Достаточные условия существования свёртки обобщённых функций

- Одна из функций финитна
- $n = 1$ : Обе функции обращаются в нуль при  $t < 0$  (в этом случае можно доказать ассоциативность операции свертки).

## Задачи

- 1 Вычислить свёртки:  $H(t) * \delta'(t)$ ,  $H(t) * H(t)$ ,  $H(t) * H(-t)$ .

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE**
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения



И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов.

Обобщенные функции и действия над ними.

М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959.



В.С. Владимиров.

Обобщенные функции в математической физике.

М., Наука, 1976.

## Обобщенное решение линейных ODE/PDE с постоянными коэффициентами

$$\square \quad L(D)u(\mathbf{x}) \equiv \sum_{|\alpha|=0}^n a_\alpha D^\alpha u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad f \in \mathcal{D}'$$

— линейное ODE/PDE порядка  $n$  с постоянными коэффициентами.

## Определение

Обобщенным решением в области  $G$  называется всякая обобщенная функция  $u \in \mathcal{D}'$ , удовлетворяющая этому уравнению в области  $G$  в обобщенном смысле, т.е. для любой  $\phi \in \mathcal{D}$ :

$$(L(D)u, \phi) = (f, \phi)$$

$\Leftrightarrow$

$$\left( u, \sum_{|\alpha|=0}^n (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \phi) \right) = (f, \phi)$$

Всякое классическое решение является и обобщенным решением. Всякое гладкое обобщенное решение является классическим решением.

## Лемма

$\phi_0 \in \mathcal{D}$  может быть представлена как  $\phi_0 = \dot{\phi}_1$ ,  $\phi_1 \in \mathcal{D} \iff \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t) dt = 0$ .

## Доказательство.

$\square \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t) dt = 0$ :  $\phi_1(t) = \int_{-\infty}^t \phi_0(\tau) d\tau \in \mathcal{D}$

$\square \phi_0 = \dot{\phi}_1$ :  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t) dt = \phi_1(t)|_{-\infty}^{\infty} = 0$ .  $\square$

ODE  $\dot{u} = 0$ 

## Теорема

Общее решение уравнения  $\dot{u} = 0$  в классе обобщенных функций —  $u = C = \text{const}$ .

## Доказательство.

$\dot{u} = 0 \iff (u, \dot{\phi}) = (u, -\dot{\phi}) = 0$ , т.е.  $u$  уже задан на основных функциях, представимых в виде производных.

$$\square \phi_1 \in \mathcal{D}, \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t) dt = 1.$$

$$\forall \phi \in \mathcal{D} : \phi(t) = \phi_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt + \phi_0(t), \text{ где } \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t) dt = 0 \implies$$

$$(u, \phi) = \underbrace{(u, \phi_1)}_C \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt + 0 = \int_{-\infty}^{\infty} C \phi(t) dt$$



Первообразная обобщенной функции из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ 

## Определение

Первообразной (или неопределенным интегралом) от обобщенной функции  $f(t) \in \mathcal{D}'$

$$u = \int f dt$$

называется решение ОДУ

$$\dot{u} = f(t).$$

Первообразная обобщенной функции из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ 

## Теорема

Любая обобщенная функция  $f(t) \in \mathcal{D}'$  имеет единственную с точностью до аддитивной постоянной первообразную.

## Доказательство.

$\dot{u} = f \iff \forall \phi \quad (\dot{u}, \phi) = (u, -\dot{\phi}) = (f, \phi)$ , т.е.  $u$  уже задан на основных функциях, представимых в виде производных.

$$\square \phi_1 \in \mathcal{D}, \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(t) dt = 1.$$

$$\forall \phi \in \mathcal{D} : \phi(t) = \phi_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt + \phi_0(t), \text{ где } \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t) dt = 0, \implies$$

$$(u, \phi) = \underbrace{(u, \phi_1)}_C \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt + (u, \phi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} C \phi(t) dt - \left( f, \int_{-\infty}^t \phi_0(\tau) d\tau \right).$$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = f \\ \dot{u}_2 = f \end{cases} \implies (u_1 - u_2)' = 0 \implies u_1 - u_2 = \text{const}$$

□

# Фундаментальное решение линейного ODE с постоянными коэффициентами

## Определение

Фундаментальным решением  $\Phi(t)$  (функцией Грина, функцией влияния) оператора  $L\left(\frac{d}{dt}\right)$  (или ODE  $L\left(\frac{d}{dt}\right)u = f$ ) называется обобщенное решение ODE

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi = \delta(t).$$

Фундаментальное решение очевидно не единственно. Если  $\Phi_1(t)$  — фундаментальное решение, то  $\Phi_1 + \Phi_0$ , где

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi_0 = 0$$

также является фундаментальным решением.

При рассмотрении задач Коши для ODE и гиперболических / параболических PDE нас будут интересовать фундаментальные решения, обладающие свойством  $\Phi|_{t < 0} \equiv 0$ .

# Фундаментальное решение оператора линейного ОДУ с постоянными коэффициентами

## Теорема

Фундаментальным решением оператора линейного ОДУ с постоянными коэффициентами порядка  $n$

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) \equiv \frac{d^n}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k}{dt^k},$$

удовлетворяющем условию  $\Phi|_{t < 0} \equiv 0$ , является  $\Phi(t) = U(t)H(t)$ , где  $U(t)$  — решение однородного уравнения  $LU = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям

$$U(0) = 0, \quad \dots, \quad U^{(n-2)}(0) = 0, \quad U^{(n-1)}(0) = 1.$$

## Доказательство.

□  $n = 2$ :

$$\dot{\Phi}(t) = U(0)\delta(t) + \dot{U}(t)H(t),$$

$$\ddot{\Phi}(t) = U(0)\dot{\delta}(t) + \dot{U}(0)\delta(t) + \ddot{U}(t)H(t)$$

⇒  $L\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi = \delta(t)$ . При  $n > 2$  доказательство аналогично. □

## Фундаментальное решение оператора линейного ОДУ с постоянными коэффициентами

## Теорема

Фундаментальным решением оператора линейного ОДУ с постоянными коэффициентами порядка  $n$

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) \equiv \frac{d^n}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k}{dt^k},$$

удовлетворяющем условию  $\Phi|_{t<0} \equiv 0$ , является  $\Phi(t) = U(t)H(t)$ , где  $U(t)$  — решение однородного уравнения  $LU = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям

$$U(0) = 0, \quad \dots, \quad U^{(n-2)}(0) = 0, \quad U^{(n-1)}(0) = 1.$$

## Доказательство.

□  $n = 2$ :

$$\dot{\Phi}(t) = \underline{U(0)}\delta(t) + \dot{U}(t)H(t),$$

$$\ddot{\Phi}(t) = \underline{U(0)}\dot{\delta}(t) + \dot{U}(0)\delta(t) + \ddot{U}(t)H(t)$$

⇒  $L\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi = \delta(t)$ . При  $n > 2$  доказательство аналогично. □

## Фундаментальное решение линейного ODE с постоянными коэффициентами

## Пример 1

Фундаментальным решением оператора  $\frac{d^2}{dt^2} + a^2$  является функция

$$\Phi(t) = H(t) \frac{\sin at}{a}.$$

## Пример 2

Фундаментальным решением оператора  $\frac{d}{dt} + a$  является функция

$$\Phi(t) = H(t) \exp(-at).$$

## Обобщенное решение неоднородного линейного ODE с постоянными коэффициентами

## Теорема

Пусть  $f \in \mathcal{D}'$  такова, что свертка  $\Phi * f$  существует в  $\mathcal{D}'$ . Тогда решение уравнения

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)u = f(t)$$

существует в  $\mathcal{D}'$  и дается формулой  $u = \Phi * f$ .

Это решение единственно в классе тех обобщенных функций из  $\mathcal{D}'$  для которых существует свертка с  $\Phi$ .

## Доказательство.

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)(\Phi * f) = \left(L\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi\right) * f = \delta * f = f.$$

Для доказательства единственности этого достаточно установить, что соответствующее однородное уравнение  $L\left(\frac{d}{dt}\right)\hat{u} = 0$  имеет только нулевое решение. Это так:

$$\hat{u} = \hat{u} * \delta = \hat{u} * L\left(\frac{d}{dt}\right)\Phi = L\left(\frac{d}{dt}\right)\hat{u} * \Phi = 0.$$



# Обобщенная задача Коши для линейного ODE 2го порядка с постоянными коэффициентами: идея

## Задача

$u(t) = u_*(t)H(t)$ ,  $u_* \in C^2$ . Вычислить  $\dot{u}$ ,  $\ddot{u}$ .

$$\dot{u} = u_*(0)\delta(t) + \dot{u}_*(t)H(t),$$

$$\ddot{u} = u_*(0)\dot{\delta}(t) + \dot{u}_*(0)\delta(t) + \ddot{u}_*(t)H(t).$$

## Задача Коши для линейного ODE 2го порядка с постоянными коэффициентами

Классическая задача Коши: для  $t > 0$  разыскивается гладкая функция  $u_*(t)$ :

$$\ddot{u}_* + \omega^2 u_* = f_*(t),$$

$$u_*(0) = u_0, \quad \dot{u}_*(0) = u_1.$$

## Задача Коши для линейного ODE 2го порядка с постоянными коэффициентами

Классическая задача Коши: для  $t > 0$  разыскивается гладкая функция  $u_*(t)$ :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_* + \omega^2 u_* &= f_*(t), \\ u_*(0) &= u_0, \quad \dot{u}_*(0) = u_1. \end{aligned}$$

Обобщенная задача Коши:  $\forall t \in \mathbb{R}$  разыскивается обобщённая функция  $u(t) = u_*(t)H(t)$ :

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \omega^2 u &= f(t), \\ f(t) &= f_*(t)H(t) + u_0\dot{\delta}(t) + u_1\delta(t), \\ u|_{t<0} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Обобщенная задача Коши является “частным случаем” классической задачи для случая гладкой правой части  $f_*$ .

## Решение задачи Коши для линейного ODE 2го порядка с постоянными коэффициентами: интеграл Дюамеля

Обобщенная задача Коши:  $\forall t \in \mathbb{R}$  разыскивается обобщённая функция  $u(t) = u_*(t)H(t)$ :

$$\ddot{u} + \omega^2 u = f(t),$$

$$f(t) = f_*(t) + u_0 \delta(t) + u_1 \delta'(t), \quad f_*|_{t < 0} \equiv 0,$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Решение обобщенной задачи Коши для ОДУ с постоянными коэффициентами существует (поскольку при  $n = 1$  существует свёртка любых двух обобщенных функций, тождественно равных нулю при  $t < 0$ ), единственно и выражается формулой:

$$u = \Phi * f.$$

В частности, в случае гладкой функции  $f_*$  решение имеет вид:

$$u(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) f_*(\tau) d\tau + u_0 \cos \omega t + u_1 \frac{\sin \omega t}{\omega}.$$

## Задача Коши для линейного ODE с постоянными коэффициентами

Классическая задача Коши: для  $t > 0$  разыскивается гладкая функция  $u_*(t)$ :

$$u_*^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_*^{(k)} \equiv L\left(\frac{d}{dt}\right)u_*(t) = f_*(t),$$

$$u_*(0) = u_0, \quad \dots, \quad u_*^{(n-1)}(0) = u_{n-1}.$$

Обобщенная задача Коши: разыскивается обобщенная функция  $u(t) = u_*(t)H(t)$ :

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = f(t),$$

$$f(t) = f_*(t)H(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0,$$

$$c_{n-1} = u_0, \quad c_{n-2} = a_{n-1}u_0 + u_1, \quad \dots, \quad c_0 = a_1u_0 + \dots + a_{n-1}u_{n-2} + u_{n-1}.$$

- 1 Сформулировать обобщенную задачу Коши, соответствующую классической задаче Коши для уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 2\eta\dot{u} + \omega^2 u &= f(t), \\ u(0) &= u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1. \end{aligned}$$

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи**
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения

# Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

## Утверждение

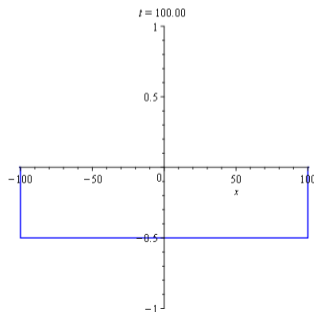
Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct - |x|) = -\frac{c}{2}\left(H(x)H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t + \frac{x}{c}\right)\right).$$

является решением уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию  $\Psi_1|_{t < 0} \equiv 0$ .



# Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

## Утверждение

Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct - |x|) = -\frac{c}{2}\left(H(x)H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t + \frac{x}{c}\right)\right).$$

является решением уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию  $\Psi_1|_{t < 0} \equiv 0$ .

## Доказательство.

$t > 0$  :

$$\dot{\Psi}_1 = \dots,$$

$$\Psi_1' = \dots$$



# Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

## Утверждение

Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct - |x|) = -\frac{c}{2}\left(H(x)H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t + \frac{x}{c}\right)\right).$$

является решением уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию  $\Psi_1|_{t < 0} \equiv 0$ .

## Доказательство.

$t > 0$  :

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_1 &= -\frac{c}{2}\left(\delta\left(t - \frac{x}{c}\right) + \delta\left(t + \frac{x}{c}\right)\right), \\ \Psi_1' &= -\frac{1}{2}\left(-\delta\left(t - \frac{x}{c}\right) + \delta\left(t + \frac{x}{c}\right)\right).\end{aligned}$$



# Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

## Утверждение

Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct - |x|) = -\frac{c}{2}\left(H(x)H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t + \frac{x}{c}\right)\right).$$

является решением уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию  $\Psi_1|_{t < 0} \equiv 0$ .

## Доказательство.

$t > 0$  :

$$\ddot{\Psi}_1 = -\frac{c}{2}\left(\dot{\delta}\left(t - \frac{x}{c}\right) + \dot{\delta}\left(t + \frac{x}{c}\right)\right),$$

$$\Psi_1'' = -\frac{1}{2c}\left(\dot{\delta}\left(t - \frac{x}{c}\right) + \dot{\delta}\left(t + \frac{x}{c}\right)\right).$$



# Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

## Утверждение

Функция

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct - |x|) = -\frac{c}{2}\left(H(x)H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t + \frac{x}{c}\right)\right).$$

является решением уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющим условию  $\Psi_1|_{t < 0} \equiv 0$ .

## Доказательство.

$t \rightarrow +0$  :

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct - |x|) \rightarrow 0,$$

$$\dot{\Psi}_1 = -\frac{c}{2}\left(\delta\left(t - \frac{x}{c}\right) + \delta\left(t + \frac{x}{c}\right)\right) \rightarrow -c^2\delta(x).$$



## Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

## Доказательство

$$\begin{aligned}
(\Psi_1'' - c^{-2}\ddot{\Psi}_1, \phi) &= (\Psi_1, \phi'' - c^{-2}\ddot{\phi}) = -\frac{c}{2}(H(ct - |x|), \phi'' - c^{-2}\ddot{\phi}) = \\
&= -\frac{c}{2} \iint (\phi'' - c^{-2}\ddot{\phi})H(ct - |x|) dx dt = \\
&= -\frac{c}{2} \int_0^\infty \int_{-ct}^{ct} \phi'' dx dt + \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^\infty \int_{|x|/c}^\infty \ddot{\phi} dt dx = \\
&= -\frac{c}{2} \int_0^\infty (\phi'(ct, t) - \phi'(-ct, t)) dt - \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^\infty \dot{\phi}\left(x, \frac{|x|}{c}\right) dx = \\
&= -\frac{c}{2} \int_0^\infty (\phi'(ct, t) - \phi'(-ct, t)) dt - \\
&\quad - \frac{1}{2c} \int_0^\infty \dot{\phi}\left(x, \frac{|x|}{c}\right) dx - \frac{1}{2c} \int_0^\infty \dot{\phi}\left(-x, \frac{|x|}{c}\right) dx =
\end{aligned}$$

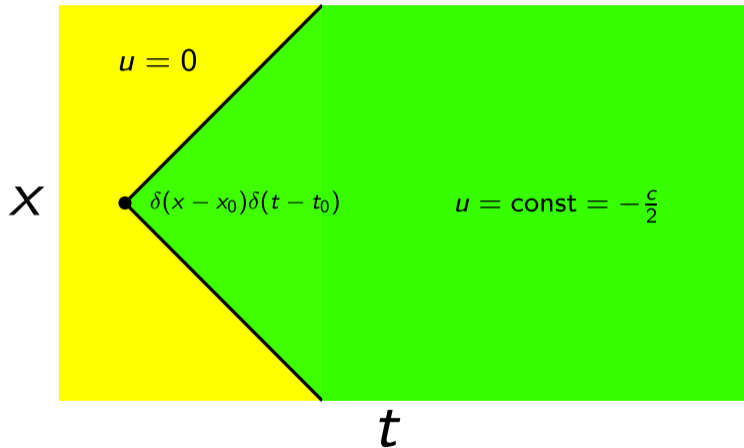
## Фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{c}{2} \int_0^{\infty} (\phi'(ct, t) - \phi'(-ct, t)) dt - \\
&\quad - \frac{1}{2c} \int_0^{\infty} \dot{\phi}\left(t, \frac{t}{c}\right) dt - \frac{1}{2c} \int_0^{\infty} \dot{\phi}\left(-t, \frac{t}{c}\right) dt = \\
&= -\frac{c}{2} \int_0^{\infty} (\phi'(ct, t) - \phi'(-ct, t)) dt - \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \dot{\phi}(ct, t) dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \dot{\phi}(-ct, t) dt = \\
&\quad = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{d\phi(ct, t)}{dt} + \frac{d\phi(-ct, t)}{dt} \right) dt = \\
&\quad = \frac{1}{2} \phi(0, 0) + \frac{1}{2} \phi(0, 0) = (\delta, \phi)
\end{aligned}$$

□

# Свойства фундаментального решения: область влияния — характеристический (световой) конус будущего



## Классическая и обобщенная задача Коши для одномерного волнового уравнения

Классическая задача Коши: для  $t > 0$  разыскивается гладкая функция  $u(x, t)$ :

$$u_*'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_* = f_*(x, t),$$

$$u_*(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}_*(x, 0) = u_1(x).$$

## Классическая и обобщенная задача Коши для одномерного волнового уравнения

Классическая задача Коши: для  $t > 0$  разыскивается гладкая функция  $u(x, t)$ :

$$u_*'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_* = f_*(x, t),$$

$$u_*(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}_*(x, 0) = u_1(x).$$

Обобщенная задача Коши: разыскивается обобщенная функция  $u(x, t) = u_*(x, t)H(t)$ :

$$u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = f(x, t),$$

$$f(x, t) = f_*(t)H(t) + u_0(x)\dot{\delta}(t) + u_1(x)\delta(t),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Обобщенная задача Коши является “частным случаем” классической задачи для случая гладкой правой части  $f_*$ .

## Обобщенная задача Коши для одномерного волнового уравнения

Обобщенная задача Коши: разыскивается обобщённая функция  $u(x, t) = u_*(x, t)H(t)$ :

$$u_*'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_* = f(x, t),$$

$$f(x, t) = f_*(x, t)H(t) + u_0(x)\dot{\delta}(t) + u_1(x)\delta(t),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Решение обобщенной задачи Коши для одномерного волнового уравнения существует, единственно и выражается в виде *запаздывающего потенциала*:

$$u = \Psi_1 * f.$$

(поскольку существует свёртка двух функций равных нулю в области  $t < 0$ , таких что при  $t > 0$  одно из них имеет носитель внутри светового конуса).

## Классическая задача Коши: формула Даламбера

Классическая задача Коши: для  $t > 0$  разыскивается гладкая функция  $u(x, t)$ :

$$u_*'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_* = f_*(x, t),$$

$$u_*(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}_*(x, 0) = u_1(x).$$

### Задача

Получить формулу Даламбера

$$u = -\frac{c}{2} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f_*(\xi, \tau) d\xi d\tau - \frac{c}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi) d\xi - \frac{c^2}{2} (u_0(x+ct) + u_0(x-ct)).$$

## Классическая задача Коши: формула Даламбера

Классическая задача Коши: для  $t > 0$  разыскивается гладкая функция  $u(x, t)$ :

$$u_*'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_* = f_*(x, t),$$

$$u_*(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}_*(x, 0) = u_1(x).$$

## Решение

$$\square f = f_* H(t) + u_0(x) \delta(t) + u_1(x) \delta(t) \implies$$

$$f_* H(t) * \Psi_1 =$$

$$= -\frac{c}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} H(\tau) f_*(\xi, \tau) H(t - \tau) H\left(t - \tau - \frac{|x - \xi|}{c}\right) d\tau d\xi = -\frac{c}{2} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f_*(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

$$t - \tau - \frac{|x - \xi|}{c} > 0 \iff |x - \xi| < c(t - \tau) \iff \begin{cases} x > \xi > x - c(t - \tau) \\ x < \xi < x + c(t - \tau) \end{cases}$$

$$\iff_{t-\tau > 0} x - c(t - \tau) < \xi < x + c(t - \tau)$$

## Классическая задача Коши: формула Даламбера

Классическая задача Коши: для  $t > 0$  разыскивается гладкая функция  $u(x, t)$ :

$$u_*'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_* = f_*(x, t),$$

$$u_*(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}_*(x, 0) = u_1(x).$$

## Решение

$$\square f = f_* H(t) + u_0(x) \delta(t) + u_1(x) \delta(t) \implies$$

$$u_1(x) \delta(t) * \Psi_1 =$$

$$= -\frac{c}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} u_1(\xi) \delta(\tau) H\left(t - \tau - \frac{|x - \xi|}{c}\right) d\tau d\xi =$$

$$= -\frac{c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\xi) H\left(t - \frac{|x - \xi|}{c}\right) d\xi = -\frac{c}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi) d\xi$$

$$t - \frac{|x - \xi|}{c} > 0 \iff |x - \xi| < ct \iff \begin{cases} x > \xi > x - ct \\ x < \xi < x + ct \end{cases} \stackrel{t > 0}{\iff} x - ct < \xi < x + ct$$

## Классическая задача Коши: формула Даламбера

Классическая задача Коши: для  $t > 0$  разыскивается гладкая функция  $u(x, t)$ :

$$u_*'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_* = f_*(x, t),$$

$$u_*(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}_*(x, 0) = u_1(x).$$

## Решение

$$\square f = f_* H(t) + u_0(x) \dot{\delta}(t) + u_1(x) \delta(t) \implies$$

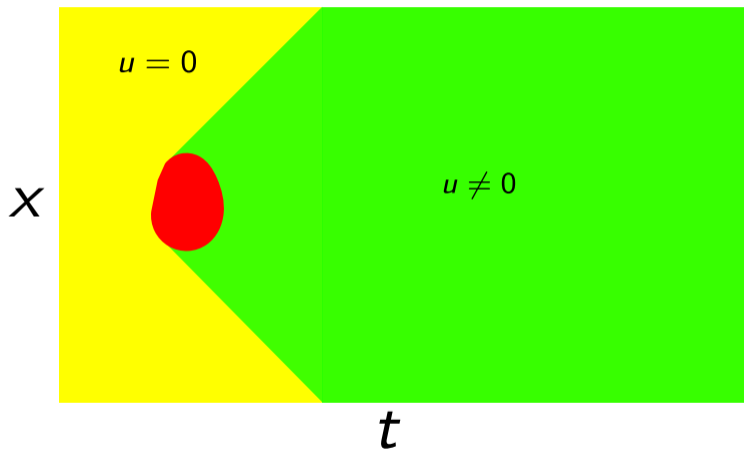
$$u_0(x) \dot{\delta}(t) * \Psi_1 =$$

$$= -\frac{c}{2} \int \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \dot{\delta}(\tau) H\left(t - \tau - \frac{|x - \xi|}{c}\right) d\tau d\xi = -\frac{c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \delta\left(t - \frac{|x - \xi|}{c}\right) d\xi =$$

$$= -\frac{c^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \delta(ct - |x - \xi|) d\xi = -\frac{c^2}{2} (u_0(x - ct) + u_0(x + ct))$$

$$|x - \xi| = ct \iff \begin{cases} x > \xi = x - ct \\ x < \xi = x + ct \end{cases} \quad t > 0 \iff \begin{cases} \xi = x - ct \\ \xi = x + ct \end{cases}$$

# Свойства запаздывающего потенциала: характеристический (световой) конус будущего



## Одномерное волновое уравнение

$$u'' - c^{-2}\ddot{u} = 0$$

- Поперечные колебания струны:  $Tu'' - \rho_0 S\ddot{u} = 0$ .
- Продольные колебания стержня:  $ESu'' - \rho_0 S\ddot{u} = 0$ .

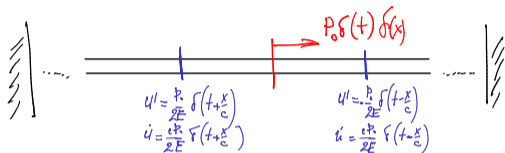
Решение Даламбера:  $u = \overbrace{\Psi_+(x+ct)}^{\text{волна}} + \underbrace{\Psi_-(x-ct)}_{\text{фаза: } \phi_{\pm}}$ ,

$\Psi_{\pm}$  — произвольные функции.

Фундаментальное решение:

$$\Psi_1 = -\frac{c}{2}H(ct - |x|) = -\frac{c}{2}\left(H(x)H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x)H\left(t + \frac{x}{c}\right)\right).$$

# Бесконечный стержень под действием сосредоточенной продольной импульсной нагрузки



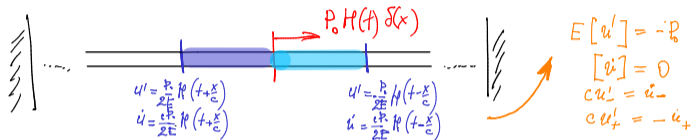
$$ES u'' - \rho_0 \delta \dot{u}' = - \rho_0 P_0 \delta(x) \delta(t) \Rightarrow u'' - \frac{1}{c^2} \dot{u}' = - \frac{P_0}{E} \delta(x) \delta(t)$$

$$\Rightarrow_{u|_{t=0} = 0} u = \frac{\rho_0 c}{2E} \left( H(x) H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x) H\left(t + \frac{x}{c}\right) \right)$$

$$u' = \frac{P_0}{2E} \left( -H(x) \delta\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x) \delta\left(t + \frac{x}{c}\right) \right)$$

$$\dot{u}' = \frac{P_0 c}{2E} \left( H(x) \delta\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(-x) \delta\left(t + \frac{x}{c}\right) \right)$$

# Бесконечный стержень под действием внезапно приложенной сосредоточенной нагрузки



$$E S u'' - \rho S \dot{u}' = -S P_0 \delta(x) H(t) \implies u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = -\frac{P_0}{E} \delta(x) H(t)$$

$$\implies u|_{H=0} = \int_0^t \frac{P_0 c}{2E} (H(x) H(\tau - \frac{x}{c}) + H(-x) H(\tau + \frac{x}{c})) d\tau =$$

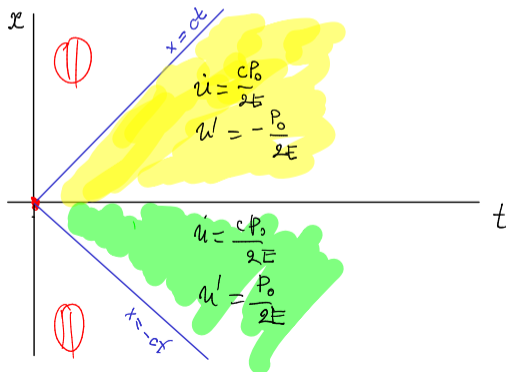
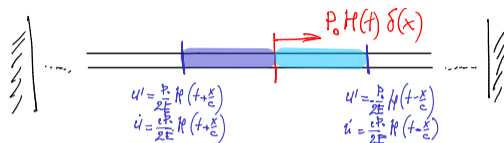
$$= \frac{P_0 c}{2E} (H(x) \Theta(t - \frac{x}{c}) + H(-x) \Theta(t + \frac{x}{c})), \quad \Theta(t) = \int_0^t H(\tau) d\tau$$

$$\ddot{u} = \frac{P_0 c}{2E} (H(x) H(t - \frac{x}{c}) + H(-x) H(t + \frac{x}{c}))$$

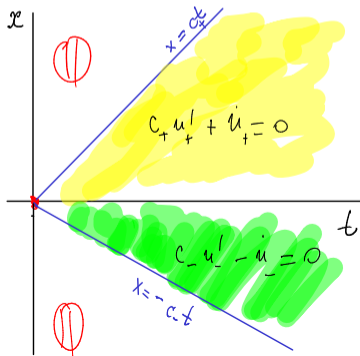
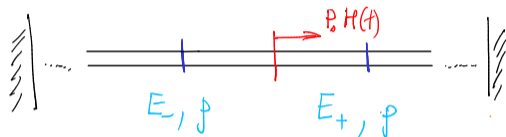
$$u' = \frac{P_0}{2E} \left\{ H(x) \left( \int_0^t H(\tau - \frac{x}{c}) d\tau \right)'_x + H(-x) \left( \int_0^t H(\tau + \frac{x}{c}) d\tau \right)'_x \right\} =$$

$$= \frac{P_0}{2E} (-H(x) H(t - \frac{x}{c}) + H(-x) H(t + \frac{x}{c}))$$

# Бесконечный стержень под действием внезапно приложенной сосредоточенной нагрузки



# Составной стержень



Баланс сил:

$$[Eu'] \equiv \rho [c^2 u'] = -P_0$$

Непрерывность:

$$[u] = 0$$

## Составной стержень

$$\int_0^l (c_+^2 u_+' - c_-^2 u_-' ) = -P_0$$

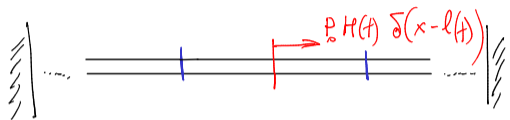
$$u_+ - u_- = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} c_+ u_+' + u_+ = 0 \\ c_- u_-' - u_- = 0 \end{array} \right\} \xRightarrow{\oplus} c_+ u_+' + c_- u_-' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_+^2 u_+' + c_+ c_- u_-' = 0 \Rightarrow c_+ c_- u_-' + c_-^2 u_-' = \frac{P_0}{\int_0^l}$$

$$\Rightarrow u_{\pm}' = \mp \frac{P_0}{\int_0^l c_{\pm} (c_+ + c_-)}$$

## Подвижная нагрузка: условия Гюгонио



$$[u] = 0$$

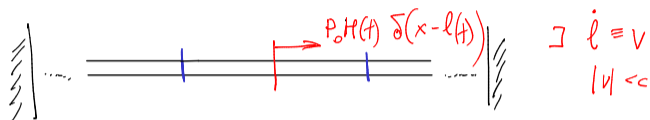
$$-p_0 = E[u'] + \rho l \dot{[u]}$$

 $\Rightarrow$ 

$$[\dot{u}] + l[u'] = 0$$

$$-p_0 = \rho_0 (c^2 - l^2)[u']$$

## Подвижная нагрузка: докритический случай



$$[u] = 0$$

$$-P_0 = E [u'] + \rho l [\dot{u}] \Rightarrow$$

$$[\dot{u}] + l [\dot{w}] = 0$$

$$-P_0 = \rho_0 (c^2 - l'^2) [u']$$

$$c u'_+ + \dot{u}_+ = 0$$

$$c u'_- - \dot{u}_- = 0$$

$$\Rightarrow [\dot{u}] + c u'_+ + c u'_- = 0 \Rightarrow c u'_+ + c u'_- - l [u'] = 0$$

$$\Rightarrow (c - l) u'_+ + (c + l) u'_- = 0 \Rightarrow$$

$$(c - l)^2 u'_+ + (c^2 - l^2) u'_- = 0$$

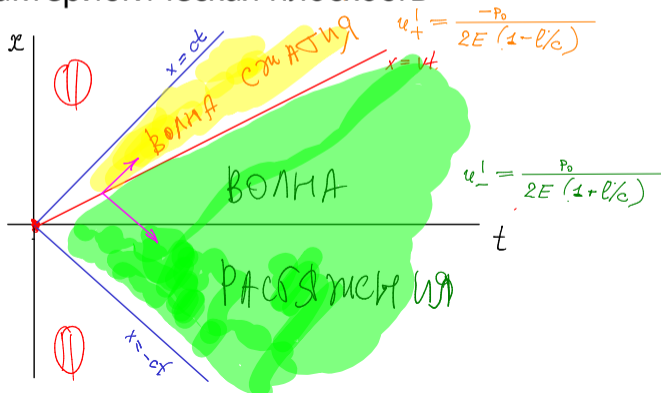
$$-P_0 = \rho_0 (c^2 - l'^2) u'_+ + \rho_0 (c - l)^2 u'_+ \Rightarrow$$

$$u'_\pm = \frac{\mp P_0}{2E (1 \mp l/c)}$$

# Подвижная нагрузка: докритический случай

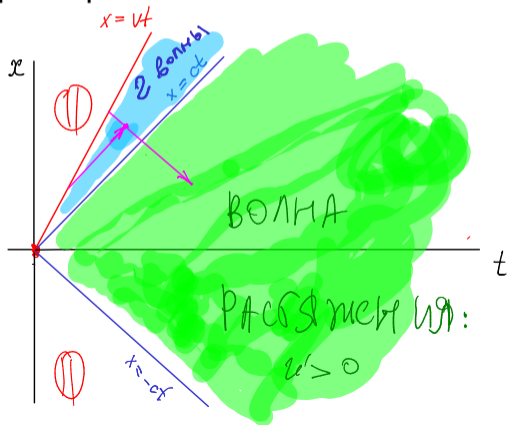


$$\begin{aligned} \exists \dot{l} &\equiv v = \text{const} \\ |v| &< c \end{aligned}$$

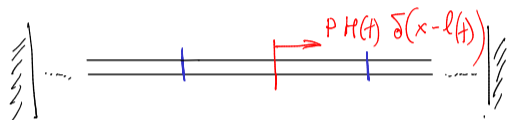


# Подвижная нагрузка: закритический случай

## Характеристическая плоскость



# Подвижная нагрузка: закритический случай



$$[u] = 0$$

$$-P_0 = E [u'] + \rho_0 l [u']$$

В зоне сжатия:

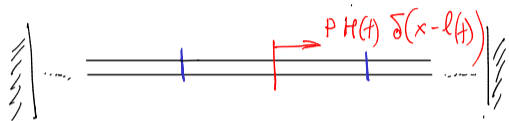
$$u'_- = \frac{-P_0}{E (e^{i^2/c^2} - 1)}$$

$$u_- = \frac{P_0 l}{E (e^{i^2/c^2} - 1)}$$

$$u = u_-(x+ct) + u_+(x-ct)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} u_- + l u'_- &= 0 \\ P_0 &= \rho_0 (c^2 - l^2) u'_- \end{aligned}$$

## Подвижная нагрузка: закритический случай



$$[u] = 0 \quad \Rightarrow \quad u_- + l u'_- = 0$$

$$-P_0 = E [u'] + \rho l [\dot{u}] \quad \Rightarrow \quad P_0 = \rho_0 (c^2 - l^2) u'_-$$

В зоне растяжения:  $u = u_L(x+ct) \rightarrow u' = u'_L, \dot{u} = cu'_L$

$$u'_- = u'_R + u'_L; \quad \dot{u}_- = -cu'_R + cu'_L \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} u'_R + u'_L &= \frac{-P_0}{E(c^2/c^2 - 1)} \\ -cu'_R + cu'_L &= \frac{P_0 l}{cE(c^2/c^2 - 1)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow u'_L = \frac{P_0}{2E(l^2/c^2 - 1)} \left( -1 + \frac{l}{c} \right) = \frac{P_0}{2E(1 + l/c)}$$

## Подвижная нагрузка: решение как свёртка

### Задача

Получить выражения для деформаций  $u'$  в задаче о внезапно возникающей подвижной нагрузке, движущейся по произвольному закону, как свертку фундаментального решения  $\Psi_1$  с функцией нагрузки:

$$u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = -H(t)P(t)\delta(x - \ell(t))$$

## Подвижная нагрузка: решение как свёртка

$$u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = -H(t)P(t)\delta(x - \ell(t))$$

 $\Rightarrow$ 

$$u = \frac{c}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} H(\tau)P(\tau)\delta(\xi - \ell(\tau))H(t - \tau)H(t - \tau - \frac{|x - \xi|}{c}) d\tau d\xi =$$

$$= \frac{c}{2} \int_0^t P(\tau)H(t - \tau - \frac{|x - \ell(\tau)|}{c}) d\tau$$

 $\Rightarrow$ 

$$u' = \frac{c}{2} \int_0^t P(\tau) \frac{\partial}{\partial x} H(t - \tau - \frac{|x - \ell(\tau)|}{c}) d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^t P(\tau)H(x - \ell(\tau))\delta(t - \tau - \frac{x - \ell(\tau)}{c}) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t P(\tau)H(\ell(\tau) - x)\delta(t - \tau + \frac{x - \ell(\tau)}{c}) d\tau$$

## Подвижная нагрузка: решение как свёртка

$$u' = -\frac{1}{2} \int_0^t P(\tau) H(x - \ell(\tau)) \delta\left(t - \tau - \frac{x - \ell(\tau)}{c}\right) d\tau + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t P(\tau) H(\ell(\tau) - x) \delta\left(t - \tau + \frac{x - \ell(\tau)}{c}\right) d\tau = \sum_i u'_i$$

$$\delta(f(t)) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t - t_i), \quad \text{где } f(t_i) = 0.$$

$$u' = \frac{1}{2} \left( - \sum_{t'_i \in \mathcal{J}_+} \frac{P(t'_i)}{\left|1 - \frac{\dot{\ell}(t'_i)}{c}\right|} + \sum_{t'_i \in \mathcal{J}_-} \frac{P(t'_i)}{\left|1 + \frac{\dot{\ell}(t'_i)}{c}\right|} \right)$$

$u'$  представляет собой сумму вкладов от множества точек  $\mathcal{J} = \{t'_i\}$  в промежутке интегрирования таких, что

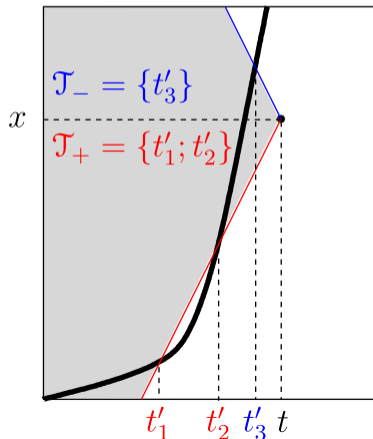
$$t - t'_i - \frac{|x - \ell(t'_i)|}{c} = 0$$

При фиксированных  $x$  и  $t$  необходимо отдельно рассмотреть наборы точек  $\mathcal{J}_+ = \{t'_i : x - \ell(t'_i) > 0\}$  и  $\mathcal{J}_- = \{t'_i : x - \ell(t'_i) < 0\}$ .

# Подвижная нагрузка: решение как свёртка

- При фиксированных  $x$  и  $t$  необходимо отдельно рассмотреть наборы точек  $\mathcal{T}_+ = \{t'_i : x - \ell(t'_i) > 0\}$  и  $\mathcal{T}_- = \{t'_i : x - \ell(t'_i) < 0\}$ .
- Наличие точки  $t'_i$  такой, что  $x - \ell(t'_i) = 0$ , свидетельствует о том, что рассматриваемая точка  $(t; x)$  находится под нагрузкой. В этом случае производная  $u'$  разрывна, и говорить имеет смысл лишь о пределах производной слева и справа.
- При фиксированных  $x$  и  $t$  множество  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_- \cup \mathcal{T}_+$  будет конечным, если принять ограничение:  $\ell(t)$  — кусочно-монотонная функция, такая что  $|\dot{\ell}| = c$  лишь в конечном числе точек.

$$t'_i + \frac{|x - \ell(t'_i)|}{c} = t$$



## Подвижная нагрузка: решение как свёртка

### Задача

Выписать аналогичную формулу для скоростей  $\dot{u}$ .

### Задача

Получить выражения для деформаций в задаче о внезапно возникающей подвижной нагрузке постоянной интенсивности, движущейся с постоянной докритической и закритической скоростью, с помощью полученной выше формулы.

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса**
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения

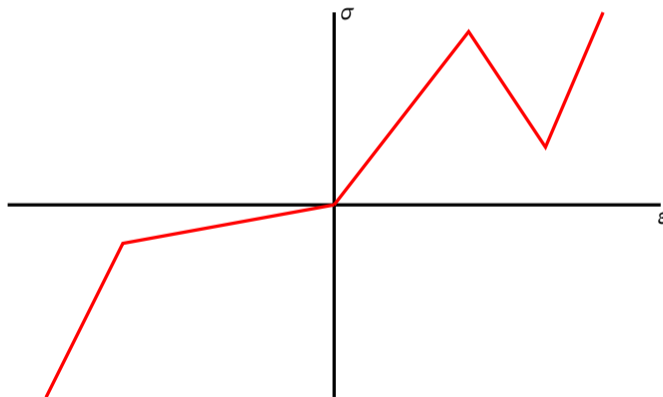
# Пример механической системы, для которой характерно распространение фронтов разрывов деформаций: продольные движения стержня из полилинейного материала

Баланс количества движения:  $T' - \rho_0 S \ddot{u} = f$ .

Выражение для силы:  $T = S\sigma$ .

Определяющее уравнение для напряжения:  $\sigma = \sigma_i + E_i u'$ ,  $\varepsilon_{i-1} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_i$

Внутренняя энергия:  $W = \int \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$ .



## Условия Гюгонио на разрыве

Неразрывность:

$$[u(\ell(t), t)] = 0 \quad \Longrightarrow \quad [\dot{u} + \ell u'] = 0$$

Баланс количества движения:

$$[\sigma] = -\rho_0 \ell [\dot{u}]$$

## Баланс энергии на разрыве

$$[\dot{u} + \dot{\ell}u'] = 0, \quad (1)$$

$$[\sigma] = -\rho_0 \dot{\ell} [\dot{u}] \quad (2)$$

Вычислим диссипацию энергии на разрыве:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= [\sigma \dot{u}] + \dot{\ell} [E] \stackrel{[\alpha\beta] \equiv \langle \alpha \rangle [\beta] + [\alpha] \langle \beta \rangle}{=} \\ &= \langle \sigma \rangle [\dot{u}] + [\sigma] \langle \dot{u} \rangle + \dot{\ell} [W] + \rho_0 \dot{\ell} [\dot{u}] \langle \dot{u} \rangle = \\ &\stackrel{(1)}{=} -\dot{\ell} \langle \sigma \rangle [u'] + [\sigma] \langle \dot{u} \rangle + \dot{\ell} [W] + \rho_0 \dot{\ell} [\dot{u}] \langle \dot{u} \rangle \stackrel{(2)}{=} -\dot{\ell} (-[W] + \langle \sigma \rangle [u']) = \\ &= -\mathcal{F} \dot{\ell} \geq 0. \end{aligned}$$

$\mathcal{F}S$  — конфигурационная сила.

$$[\alpha] = \alpha(\ell + 0) - \alpha(\ell - 0), \quad \langle \alpha \rangle = (\alpha\ell(\ell + 0) + \alpha(\ell - 0))/2.$$

# Энтропийный критерий Дафермоса

$$\mathcal{D} = -\mathcal{F}\dot{\ell} \geq 0,$$

$$\mathcal{F} = -[W] + \langle \sigma \rangle [u']$$

- Критерий позволяет отбирать термодинамически допустимые решения.
- В статике  $[\sigma] = 0 \implies \langle \sigma \rangle = \sigma \implies \mathcal{F} = [\mathcal{E}]$ . Здесь  $\mathcal{E} = -W + \sigma u'$  — одномерный аналог тензора Эшелби.
- Для термомеханических систем, где определены температура и энтропия, критерий получается рассмотрением УДН на скачке с учетом баланса энергии и условий Гюгонио.



Dafermos C.M.

The entropy rate admissibility criterion for solutions of hyperbolic conservation laws  
[Journal of Differential Equations. 1973. Vol. 14\(2\) P. 202–212.](#)

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье**
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения

# Пространство основных функций $\mathcal{S}$

## Определение

Множество основных функций  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  — все функции класса  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  убывающие при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  вместе со всеми производными быстрее любой степени  $|\mathbf{x}|^{-1}$ .

## Определение

Последовательность функций  $\phi_1, \phi_2, \dots$  из  $\mathcal{S}$  сходится к функции  $\phi \in \mathcal{S}$  ( $\phi_k(\mathbf{x}) \rightarrow \phi(\mathbf{x})$ ), если  $\forall \alpha, \beta$

$$\mathbf{x}^\beta D^\alpha \phi_k(\mathbf{x}) \rightrightarrows \mathbf{x}^\beta D^\alpha \phi(\mathbf{x})$$

Здесь  $\alpha, \beta$  — мультииндексы,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

$$D^\alpha \phi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} \phi(\mathbf{x})}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n},$$

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

## Пространство основных функций $\mathcal{S}$

- $\mathcal{S}$  — линейное пространство.
- Из сходимости в  $\mathcal{D}$  следует сходимость в  $\mathcal{S}$ .
- $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ .
- $\mathcal{S}$  не совпадает с  $\mathcal{D}$  (e.g.  $\exp(-x^2)$ ).
- Операции дифференцирования и линейной неособенной замены переменных непрерывны из  $\mathcal{S}$  в  $\mathcal{S}$ .
- Умножение на произвольную  $a(\mathbf{x}) \in C^\infty$  может вывести за пределы  $\mathcal{S}$  (e.g.  $\exp(x^2)$ ).
- $\exists a(\mathbf{x}) \in C^\infty$  растёт не быстрее полинома:

$$|D^\alpha \phi(\mathbf{x})| \leq C_\alpha (1 + |\mathbf{x}|)^{m_\alpha}.$$

Операция умножения на такую  $a(\mathbf{x})$  непрерывна из  $\mathcal{S}$  в  $\mathcal{S}$ .

# Обобщенные функции медленного роста $\mathcal{S}'$

## Определение

Обобщенной функцией медленного роста называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций  $\mathcal{S}$ .

- Сходимость в  $\mathcal{S}'$  — слабая сходимость последовательности функционалов.
- $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ .

Обобщенные функции медленного роста  $\mathcal{S}'$ : примеры

□  $f(\mathbf{x})$  — локально интегрируемая функция полиномиального роста на бесконечности:  $\exists m$

$$\int |f(\mathbf{x})|(1 + |\mathbf{x}|)^{-m} d\mathbf{x} < \infty.$$

Она определяет регулярную обобщенную функцию медленного роста из  $\mathcal{S}'$ :

$$(f, \phi) = \int f\phi d\mathbf{x}.$$

Обобщенные функции медленного роста  $\mathcal{S}'$ : примеры

Не всякая локально интегрируемая функция, принадлежащая  $\mathcal{S}'$ , имеет полиномиальный рост. Например, функция

$$(\cos(\exp x))' = -\exp x \sin(\exp x)$$

не является функцией полиномиального роста, но тем не менее задает обобщенную функцию медленного роста по формуле

$$((\cos(\exp x))', \phi) = - \int \cos(\exp x) \phi'(x) dx$$

Обобщенные функции медленного роста  $\mathcal{S}'$ : примеры

Если  $f$  — финитная обобщенная функция из  $\mathcal{D}'$ , то она единственным образом продолжается на  $\mathcal{S}$  как элемент из  $\mathcal{S}'$  по формуле

$$(f, \phi) = (f, \eta\phi),$$

где  $\eta \in \mathcal{D}$ ,  $\eta = 1$  в окрестности носителя  $f$ .

Обобщенные функции медленного роста  $\mathcal{S}'$ : примеры

□  $f \in \mathcal{S}'$ .

- $D^\alpha f \in \mathcal{S}'$ .
- $f(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}) \in \mathcal{S}'$  если  $\det A \neq 0$ .
- $af \in \mathcal{S}'$ , если  $a(\mathbf{x}) \in C^\infty$  и растёт не быстрее полинома.
- Естественным образом определяется прямое произведение:  $f \cdot g \in \mathcal{S}'$ .
- Естественным образом определяется свёртка  $f * g$ . Она существует не всегда.

Преобразование Фурье основных функций из  $\mathcal{S}$ 

$\square \phi \in \mathcal{S}$ :

$$F[\phi](\omega) = \int \phi(\mathbf{x}) \exp i(\omega \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

— преобразование Фурье функции  $\phi$ .

## Теорема

Преобразование Фурье взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает  $\mathcal{S}$  на  $\mathcal{S}$ .

$$F^{-1}[\phi(\mathbf{x})](\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \phi(\mathbf{x}) \exp(-i(\omega \cdot \mathbf{x})) d\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\phi(-\mathbf{x})]$$

— обратное преобразование Фурье функции  $\phi$ :

$$\phi = F^{-1}[F[\phi]] = F[F^{-1}[\phi]].$$

Преобразование Фурье обобщенных функций из  $\mathcal{S}'$ 

## Определение

 $\forall f \in \mathcal{S}', \phi \in \mathcal{S} :$ 

$$(F[f], \phi) = (f, F[\phi]),$$
$$F^{-1}[f(\mathbf{x})] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-\mathbf{x})]$$

## Теорема

Преобразование Фурье взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает  $\mathcal{S}'$  на  $\mathcal{S}'$ , причем  $\forall f \in \mathcal{S}'$

$$f = F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]].$$

## Свойства преобразования Фурье

- Дифференцирование ПФ:  $D^\alpha F[f] = F[(i\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$ .
- ПФ производной:  $F[D^\alpha f](\omega) = (-i\omega)^\alpha F[f](\omega)$ .
- ПФ сдвига:  $F[f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)](\omega) = \exp i(\mathbf{x}_0 \cdot \omega) F[f](\omega)$
- Сдвиг ПФ:  $F[f](\omega + \omega_0) = F[\exp i(\omega_0 \cdot \mathbf{x}) f(\mathbf{x})](\omega)$
- ПФ подобия:  $F[f(c\mathbf{x})](\omega) = \frac{1}{|c|^n} F[f](c^{-1}\omega)$ .
- ПФ прямого произведения:  $F[f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})] = F[f] \cdot F[g]$
- ПФ свертки:  $F[f * g] = F[f]F[g]$ , если свёртка существует.

## Преобразование Фурье дельта-функции

$$F[\delta] = 1,$$

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

$$F[1] = (2\pi)^n \delta.$$

Применяя формулу  $D^\alpha F[f] = F[(i\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$  для  $f = 1$ :

$$F[\mathbf{x}^\alpha] =$$

## Преобразование Фурье дельта-функции

$$F[\delta] = 1,$$

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

$$F[1] = (2\pi)^n \delta.$$

Применяя формулу  $D^\alpha F[f] = F[(i\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$  для  $f = 1$ :

$$F[\mathbf{x}^\alpha] = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha F[1] = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta.$$

## Преобразование Фурье дельта-функции

$$F[\delta] = 1,$$

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

$$F[1] = (2\pi)^n \delta.$$

Применяя формулу  $D^\alpha F[f] = F[(i\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$  для  $f = 1$ :

$$F[\mathbf{x}^\alpha] = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha F[1] = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta.$$

Применяя формулу  $F[D^\alpha f](\omega) = (-i\omega)^\alpha F[f](\omega)$  для  $f = \delta$ :

$$F[D^\alpha \delta] =$$

## Преобразование Фурье дельта-функции

$$F[\delta] = 1,$$

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

$$F[1] = (2\pi)^n \delta.$$

Применяя формулу  $D^\alpha F[f] = F[(i\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})]$  для  $f = 1$ :

$$F[\mathbf{x}^\alpha] = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha F[1] = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta.$$

Применяя формулу  $F[D^\alpha f](\omega) = (-i\omega)^\alpha F[f](\omega)$  для  $f = \delta$ :

$$F[D^\alpha \delta] = (-i\omega)^\alpha.$$

## Преобразование Фурье функции Хевисайда

$$F[H(t) \exp(-at)] = \int_0^{\infty} \exp(-at + i\omega t) dt = \frac{i}{\omega + ia}$$

Так как  $H(t) \exp(-at) \rightarrow H(t)$  в  $S'$  при  $a \rightarrow +0$ , в силу непрерывности преобразования Фурье, получаем:

$$F[H] = \frac{i}{\omega + i0} = \pi\delta(\omega) + i \text{VP} \frac{1}{\omega}$$

Последнее равенство справедливо в силу формул Сохоцкого.

# Таблицы преобразований Фурье обобщенных функций



Брычков Ю.А., Прудников А.П.

Интегральные преобразования обобщенных функций

Наука, 1977.

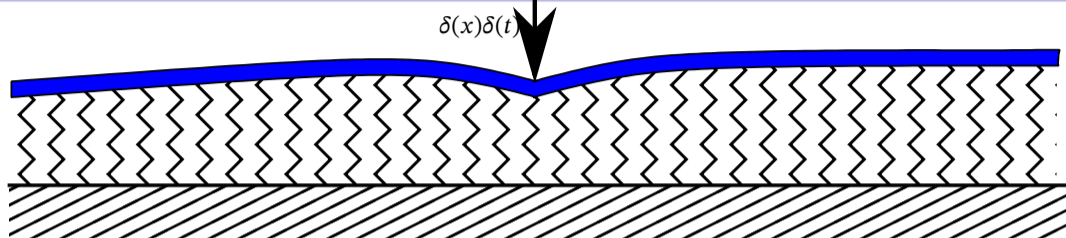
## Задачи

- 1 Вычислить преобразование Фурье функции  $H(R - |x|)$ ,  $R = \text{const}$ .
- 2 При помощи преобразования Фурье по  $x$  найти решение уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2} \dot{u} = \delta(x)\delta(t),$$

удовлетворяющее условию  $u|_{t < 0} \equiv 0$ .

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение**
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения

Фундаментальное решение уравнения Клейна-Гордона в  $\mathbb{R}^1$ 

Применяя ПФ по  $x$  к уравнению

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = \delta(x)\delta(t),$$

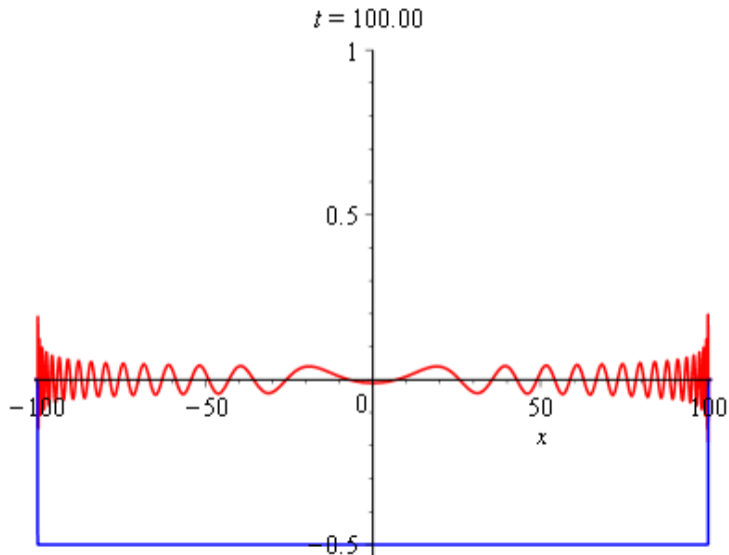
находим:

$$-(\omega^2 + k)u_F - \frac{1}{c^2}\ddot{u}_F = \delta(t) \implies \ddot{u}_F + c^2(\omega^2 + k)u_F = -c^2\delta(t) \implies$$

$$u_F = -c^2 H(t) \frac{\sin c\sqrt{\omega^2 + k}t}{c\sqrt{\omega^2 + k}} \implies u = -\frac{c}{2} H(ct - |x|) J_0(\sqrt{k(c^2 t^2 - x^2)})$$

В частном случае  $k = 0$  получаем фундаментальное решение волнового уравнения.

# Фундаментальные решения волнового уравнения и уравнения Клейна-Гордона в $\mathbb{R}^1$ ( $k = 1, c = 1$ )



## Задача

Вычислить фундаментальное решение телеграфного уравнения (уравнения Клейна-Гордона с диссипацией) в  $\mathbb{R}^1$ :

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = \delta(x)\delta(t),$$

для случая малой диссипации  $k_* = k - c^2\gamma^2 > 0$ .

# Фундаментальное решение телеграфного уравнения (уравнения Клейна-Гордона с диссипацией) в $\mathbb{R}^1$ : случай большой диссипации

Применяя ПФ по  $x$  к уравнению

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = \delta(x)\delta(t),$$

находим ( $k_* = k - c^2\gamma^2 < 0$ ):

$$u = -\frac{c}{2}H(ct - |x|)I_0(\sqrt{|k_*|(c^2t^2 - x^2)})\exp(-c^2\gamma t)$$

## Фундаментальное решение телеграфного уравнения (уравнения Клейна-Гордона с диссипацией) в $\mathbb{R}^1$ : особый случай

Применяя ПФ по  $x$  к уравнению

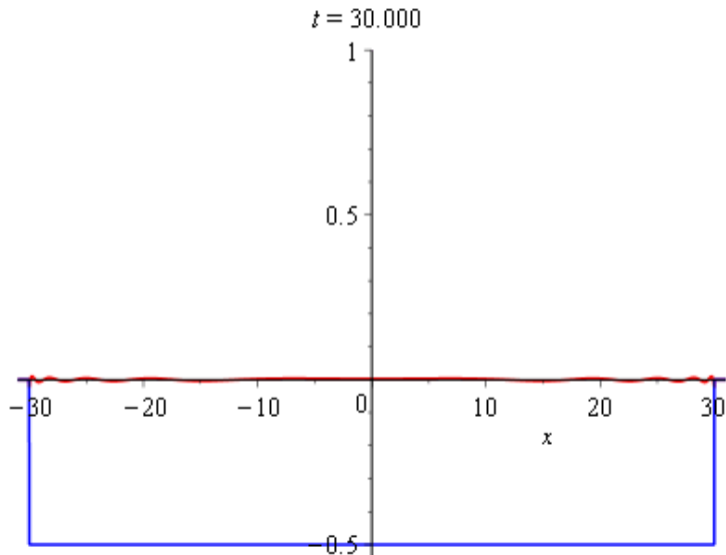
$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = \delta(x)\delta(t),$$

находим ( $k_* = k - c^2\gamma^2 = 0$ ):

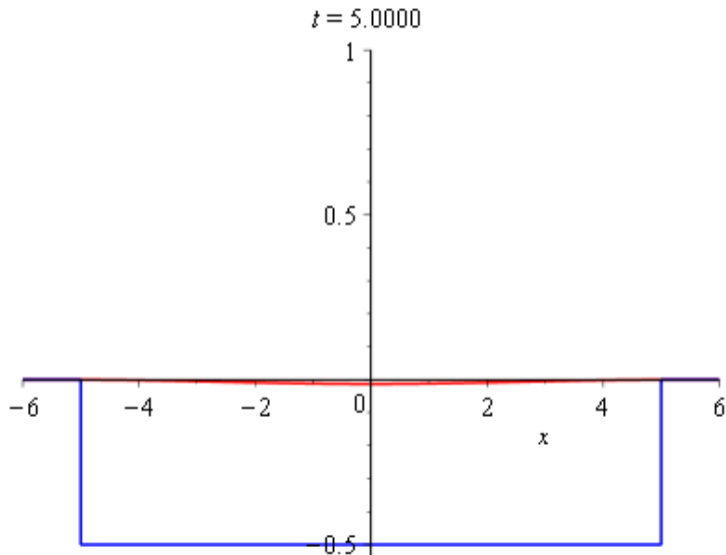
$$u = -\frac{c}{2}H(ct - |x|)\exp(-c^2\gamma t)$$

В данном случае искажения в форму сигнала, вызванные наличием упругого основания, компенсируются искажениями вследствие диссипации.

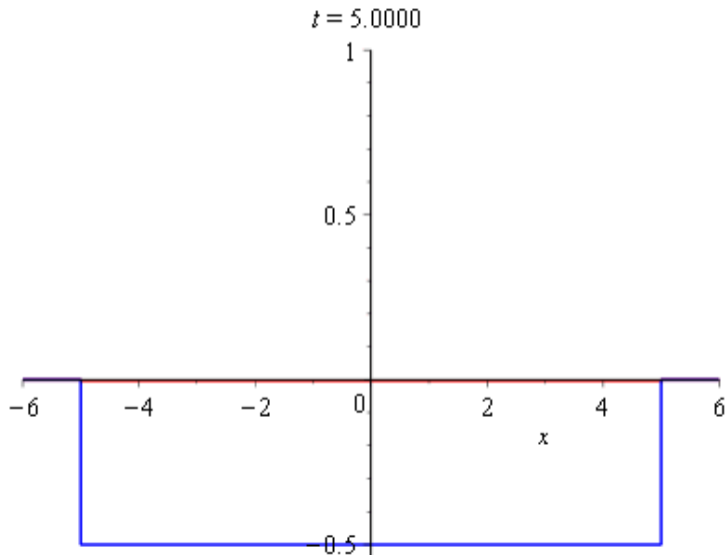
Фундаментальные решения волнового уравнения и телеграфного уравнения в  $\mathbb{R}^1$   
( $k = 1, c = 1, \gamma = 0.1$ ): случай малой диссипации



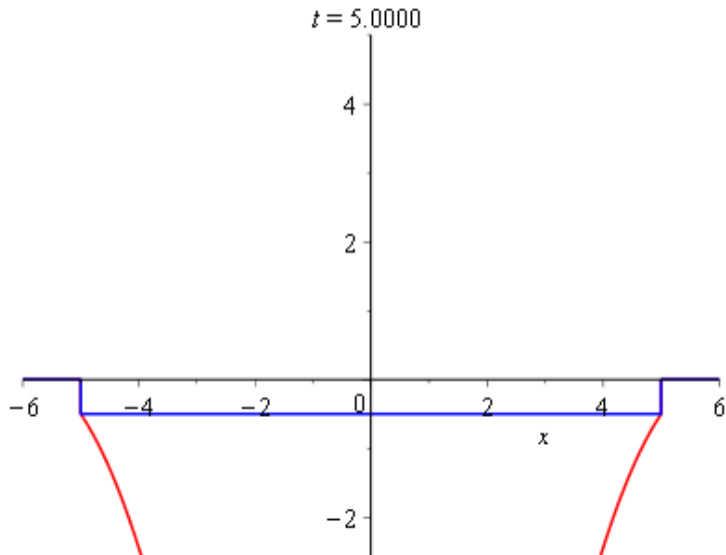
Фундаментальные решения волнового уравнения и телеграфного уравнения в  $\mathbb{R}^1$   
( $k = 1, c = 1, \gamma = 2$ ): случай большой диссипации



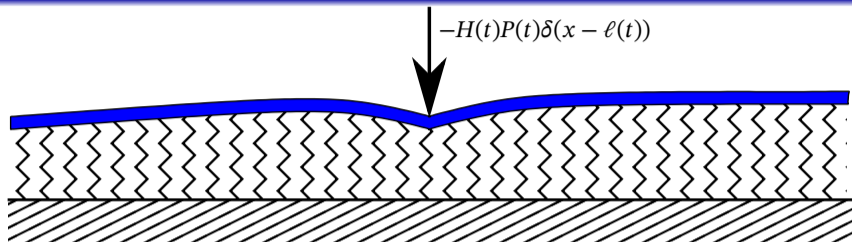
Фундаментальные решения волнового уравнения и телеграфного уравнения в  $\mathbb{R}^1$   
( $k = 1, c = 1, \gamma = 1$ ): особый случай



Фундаментальные решения волнового уравнения и телеграфного уравнения в  $\mathbb{R}^1$   
( $k = -1$ ,  $c = 1$ ,  $\gamma = 0$ ): случай упругого основания отрицательной жесткости



## Подвижная нагрузка на струне на упругом основании



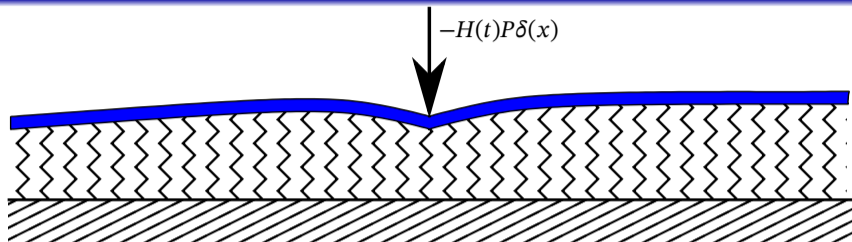
## Задача

Найти движение струны на винклеровском основании, вызванное подвижной нагрузкой  $H(t)P(t)\delta(x - \ell(t))$ , т.е. решение уравнения

$$u'' - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -H(t)P(t)\delta(x - \ell(t)),$$

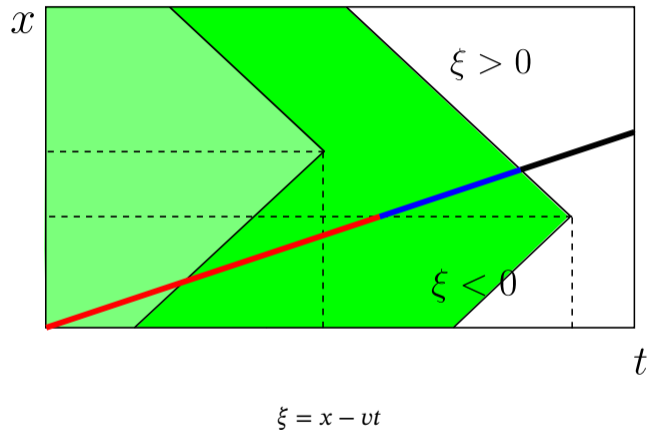
Делаем по аналогии со струной без упругого основания (см. слайд [130](#)).

## Внезапно приложенная нагрузка постоянной амплитуды



$$\begin{aligned}
 u &= \frac{cP}{2} \int_0^t H(c(t-\tau) - |x|) J_0\left(\sqrt{k(c^2(t-\tau)^2 - x^2)}\right) d\tau = \\
 &= \frac{cP}{2} \int_0^t H(c\tau - |x|) J_0\left(\sqrt{k(c^2\tau^2 - x^2)}\right) d\tau
 \end{aligned}$$

## Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью



## Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью

Рассмотрим случай  $\xi = x - vt < 0$ . Имеем:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{cP}{2} \int_0^t H(c(t-\tau) - |x - v\tau|) J_0\left(\sqrt{k(c^2(t-\tau)^2 - (x - v\tau)^2)}\right) d\tau = \\
 &= \frac{cP}{2} \left( \int_0^{t+\frac{\xi}{v}} H(c(t-\tau) - v(t-\tau) - \xi) \times + \int_{t+\frac{\xi}{v}}^t H(c(t-\tau) + v(t-\tau) + \xi) \times \right) \\
 &\quad \times J_0\left(\sqrt{k(c^2(t-\tau)^2 - (v(t-\tau) + \xi)^2)}\right) d\tau = \\
 &= \frac{cP}{2} \left( \int_{-\frac{\xi}{v}}^t H((c-v)\tau - \xi) \cdot + \int_0^{-\frac{\xi}{v}} H((c+v)\tau + \xi) \cdot \right) J_0\left(\sqrt{k(c^2\tau^2 - (v\tau + \xi)^2)}\right) d\tau = \\
 &\quad = \frac{cP}{2} \int_{\frac{|\xi|}{c+v}}^t J_0\left(\sqrt{k(c^2\tau^2 - (v\tau + \xi)^2)}\right) d\tau.
 \end{aligned}$$

## Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью

Делаем замену ( $\xi = -|\xi|$ ,  $\text{sign } \xi = -1$ )

$$\zeta = c\left(\tau - \frac{|\xi|}{c - v \text{sign } \xi}\right),$$

получим

$$u = \frac{P}{2} \int_0^{c\left(t - \frac{|\xi|}{c - v \text{sign } \xi}\right)} J_0\left(\sqrt{k\zeta((1 - \beta^2)\zeta + 2\xi)}\right) d\zeta,$$

где  $\beta = v/c$ . Пусть  $t \rightarrow \infty$ , а  $\xi$  фиксировано. Тогда верхним пределом интегрирования будет  $+\infty$ , и после вычисления интеграла получим

$$u = \frac{Pe^{-\sqrt{k_0}|\xi|}}{2\sqrt{k(1 - \beta^2)}},$$

$$k_0 = \left| \frac{k}{1 - \beta^2} \right|.$$

## Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью

Для  $\xi > 0$  имеем  $x > vt > v\tau \forall \tau \leq t \implies H(v\tau - x) = 0$ . Поэтому,

$$u = \frac{cP}{2} \int_0^t H((c-v)\tau - \xi) J_0 \left( \sqrt{k(c^2\tau^2 - (v\tau + \xi)^2)} \right) d\tau$$

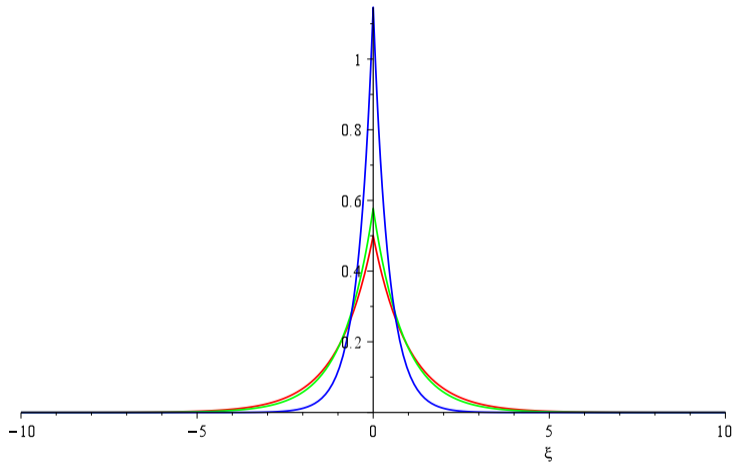
Определяя границы промежутка, где подынтегральная функция отлична от нуля, и применяя ту же замену переменной, приходим вновь к формуле

$$u = \frac{Pe^{-\sqrt{k_0}|\xi|}}{2\sqrt{k(1-\beta^2)}},$$

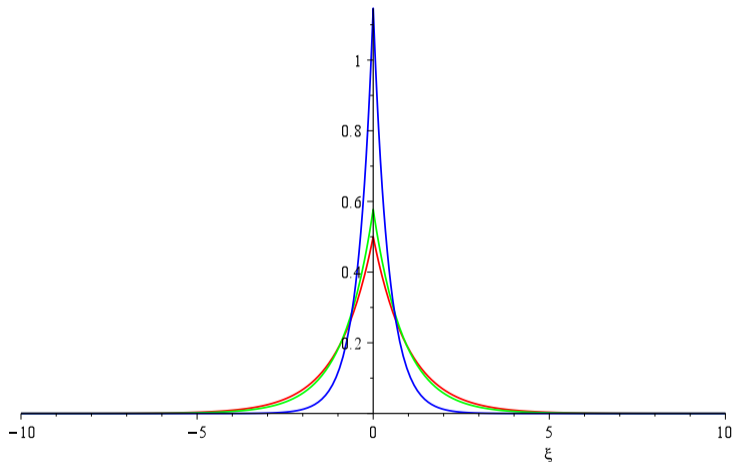
$$k_0 = \left| \frac{k}{1-\beta^2} \right|.$$

Стационарное решение в точке  $\xi$  в подвижной системе координат устанавливается за бесконечное время.

Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью: профиль прогиба  
( $v/c = 0$ ,  $v/c = 0.5$ ,  $v/c = 0.9$ )



Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью: профиль прогиба  
( $v/c = 0$ ,  $v/c = 0.5$ ,  $v/c = 0.9$ )



Контрольный вопрос: а что будет в этой же задаче для волнового уравнения?

## Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью

- При ненулевой скорости нагрузки нестационарное решение несимметрично относительно нагрузки в движущейся с ней СК.
- При  $t \rightarrow \infty$  устанавливается симметричное в подвижной СК стационарное решение.
- Стационарное решение устанавливается за бесконечное время.
- При скорости нагрузки, близкой к критическому значению  $c$ , прогиб под нагрузкой стремится к бесконечности.

## Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью: стационарная задача

## Задача

Показать, что предел нестационарного решения совпадает с решением  $u^*$  стационарной задачи

$$\begin{cases} u^{*''} - \frac{1}{c^2} \ddot{u}^* - ku^* = -P\delta(x - vt), \\ u^* = u^*(x - vt) \equiv u^*(\xi), \\ u^* \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

## Нагрузка, движущаяся с постоянной докритической скоростью: стационарная задача

## Задача

Показать, что предел нестационарного решения совпадает с решением  $u^*$  стационарной задачи

$$\begin{cases} u^{*''} - \frac{1}{c^2} \ddot{u}^* - ku^* = -P\delta(x - vt), \\ u^* = u^*(x - vt) \equiv u^*(\xi), \\ u^* \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

Указания:

- 1 Переписать уравнение движения в новых независимых переменных  $\xi = x - vt$ ,  $\tau = t$ .
- 2 В полученном уравнении пренебречь производными по времени  $\tau$ .
- 3 Найти решение, удовлетворяющее условиям на бесконечности и условиями Гюгонио на (неподвижном) скачке  $\xi = 0$ .

## Нагрузка, движущаяся с критической скоростью

$$\xi > 0: u = 0.$$

$$\xi < 0:$$

$$u = \frac{cP}{2} H\left(t - \frac{|\xi|}{2c}\right) \int_{\frac{|\xi|}{2c}}^t J_0\left(\sqrt{k(2c|\xi|\tau - \xi^2)}\right) d\tau.$$

Сделав замену

$$\zeta = \sqrt{\tau - \frac{|\xi|}{2c}},$$

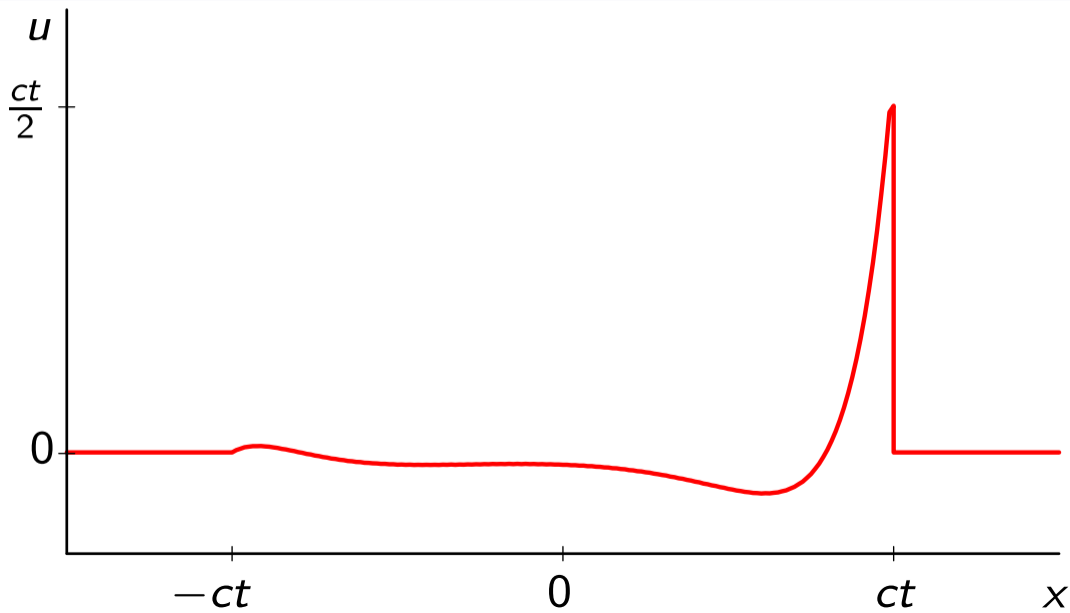
приводим интеграл к табличному:

$$\begin{aligned} u &= cPH\left(t - \frac{|\xi|}{2c}\right) \int_0^{\sqrt{t - \frac{|\xi|}{2c}}} \zeta J_0\left(\sqrt{2kc|\xi|\zeta}\right) d\zeta = \\ &= P\sqrt{\frac{ct - \frac{|\xi|}{2}}{2k|\xi|}} J_1\left(\sqrt{2k|\xi|(ct - \frac{|\xi|}{2})}\right) H\left(t - \frac{|\xi|}{2c}\right) \end{aligned}$$

При  $\xi \rightarrow -0$ :

$$u = \frac{cPt}{2} + o(1).$$

## Нагрузка, движущаяся с критической скоростью



- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы**
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения

# Необходимые определения

Интеграл Фурье:

$$\mathcal{J}(t) = \int_a^b f(\omega) e^{i\varphi(\omega)t} d\omega, \quad t \rightarrow +\infty$$

- $\varphi(\omega)$  — фаза (вещественнозначная функция);
- $\omega_*$  :  $\varphi'(\omega_*) = 0$  — стационарные точки;
- $\omega_*$  :  $\varphi'(\omega_*) \neq 0$ ;  $f, \varphi \in C^\infty(\omega_* - \delta, \omega_* + \delta)$  — обыкновенные точки;
- Точки не являющиеся обыкновенными — критические.
- Вкладом от изолированной критической точки  $\omega_*$  называется интеграл





$$\hat{\mathcal{J}}(t, \omega_*) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \eta(\omega - \omega_*) e^{i\varphi(\omega)t} d\omega,$$

Здесь  $\eta$  — нейтрализатор:  $\eta \in \mathcal{D}$ ,  $\eta \equiv 1$  в некоторой окрестности  $\omega_*$ ,  $\text{supp } \eta$  не содержит других критических точек.

## Лемма Римана-Лебега

Для интегрируемой  $f$ :

$$\mathcal{J}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega = o(1), \quad t \rightarrow +\infty$$

-  Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.  
Лекции по теории функций комплексного переменного.  
М: Наука, 1989.
-  Федорюк М.В.  
Метод перевала.  
М: Наука, 1977.
-  Temme N.M.  
Asymptotic Methods for Integrals  
World Scientific, 2015.
-  Эрдейи А.  
Асимптотические разложения.  
1962.

## Вклад от границ промежутка интегрирования

## Теорема

Пусть  $I = [a, b]$  — конечный отрезок,

$$\varphi'(\omega) \neq 0, \quad x \in I,$$

и  $f(\omega) \in C^{N+1}$ ,  $\varphi(\omega) \in C^{N+2}$ . Тогда при  $t \rightarrow +\infty$

$$\mathcal{J}(t) = \sum_{k=0}^N (it)^{-k-1} M^k \left( \frac{f(\omega)}{\varphi'(\omega)} \right) \Big|_a^b + o(t^{-N-1}).$$

$$M = -\frac{1}{\varphi'(\omega)} \frac{d}{d\omega}$$

Главный член ( $N = 0$ ) асимптотики имеет вид:

$$\mathcal{J}(t) = (it)^{-1} \left( \frac{f(b)}{\varphi'(b)} e^{i\varphi(b)t} - \frac{f(a)}{\varphi'(a)} e^{i\varphi(a)t} \right) + o(t^{-1}).$$

## Вклад от границ промежутка интегрирования

## Доказательство

$$\mathcal{J}(t) = \int_a^b f(\omega) e^{i\varphi(\omega)t} d\omega = \frac{1}{it} \int_a^b \frac{f(\omega)}{\varphi'(\omega)} d(e^{it\varphi(\omega)}) = \frac{1}{it} \frac{f(\omega)}{\varphi'(\omega)} e^{it\varphi(\omega)} \Big|_a^b + \frac{1}{it} \mathcal{J}_1(t)$$

$$\mathcal{J}_1(t) = - \int_a^b e^{i\varphi(\omega)t} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{f(\omega)}{\varphi'(\omega)} \right) d\omega = o(1)$$

## Принцип локализации

### Лемма

Пусть  $\varphi(\omega) \in C^\infty$ ,  $f(\omega) \in \mathcal{D}$ , причем  $\varphi'(\omega) \neq 0$ . Тогда при  $t \rightarrow +\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\varphi(\omega)t} d\omega = O(t^{-\infty}).$$

### Доказательство.

Интеграл фактически берется по конечному отрезку; применяем формулу для вкладов от границ промежутка интегрирования. □

### Принцип локализации

Пусть  $I = [a; b]$  — конечный отрезок, и пусть интеграл  $\mathcal{J}(t)$  имеет конечное число критических точек  $\omega_1, \dots, \omega_k \in I$ . Тогда

$$\mathcal{J}(t) = \sum_{j=1}^k \hat{\mathcal{J}}(t, \omega_j) + O(t^{-\infty}),$$

т.е. интеграл  $\mathcal{J}(t)$  равен сумме вкладов от критических точек с точностью до  $O(t^{-\infty})$ .

## Асимптотика интеграла Френеля

## Пример

Вычислить асимптотику интеграла Френеля  $\Phi(t)$  при  $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 \Phi(t) &\equiv \int_t^\infty e^{i\omega^2} d\omega = \int_t^\infty \frac{1}{2i\omega} d(e^{i\omega^2}) = -\frac{1}{2it} e^{it^2} + \frac{1}{2i} \int_t^\infty \frac{e^{i\omega^2}}{\omega^2} d\omega = \\
 &= -\frac{1}{2it} e^{it^2} + \frac{1}{2i} \frac{1}{2i} \int_t^\infty \frac{d(e^{i\omega^2})}{\omega^3} = -\frac{1}{2it} e^{it^2} - \frac{1}{4} \int_t^\infty \frac{d(e^{i\omega^2})}{\omega^3} = \\
 &= -\frac{1}{2it} e^{it^2} - \frac{1}{4} \left( -\frac{e^{it^2}}{t^3} + 3 \int_t^\infty \frac{e^{i\omega^2}}{\omega^4} d\omega \right) = \\
 &= -\frac{1}{2it} e^{it^2} + O(t^{-3}).
 \end{aligned}$$

## Вклад от стационарной точки: эталонный интеграл

## Лемма

Пусть  $f(\omega) \in C^\infty$ . Тогда при  $t \rightarrow +\infty$ :

$$\Phi(t) = \int_0^a f(\omega) e^{\frac{i\alpha t \omega^2}{2}} d\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{|\alpha|t}} e^{\frac{i\pi \operatorname{sign} \alpha}{4}} f(0) + O(t^{-1}), \quad \alpha \neq 0.$$

## Доказательство.

□  $\alpha > 0$ ,  $f(\omega) = f(0) + \omega \left( \frac{f(\omega) - f(0)}{\omega} \right) = f(0) + \omega g(\omega)$ . Делаем замену переменной  $w = \omega\sqrt{\alpha t}$ :

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= f(0) \int_0^a e^{\frac{i\alpha t \omega^2}{2}} d\omega = \frac{f(0)}{\sqrt{\alpha t}} \int_0^{\sqrt{\alpha t}} e^{\frac{iw^2}{2}} dw = \\ &= \frac{f(0)}{\sqrt{\alpha t}} \left( \int_0^\infty - \int_{\sqrt{\alpha t}}^\infty \right) e^{\frac{iw^2}{2}} dw = \frac{f(0)}{\sqrt{\alpha t}} \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right) \end{aligned}$$

$$|\Phi_1(t)| \leq \left| \frac{1}{i\alpha t} \int_0^a g(\omega) de^{\frac{i\alpha t \omega^2}{2}} \right| \leq \frac{1}{\alpha t} \left( |g(0)| + |g(a)| + \int_0^a |g'(\omega)| d\omega \right) = O(t^{-1})$$



## Вклад от стационарной точки

## Теорема

Пусть  $I = [a, b]$  — конечный отрезок, и выполнены условия:

1.  $f(\omega) \in C^1$ ,  $\varphi(\omega) \in C^1$ .
2. Функция  $\varphi(\omega)$  имеет при  $\omega \in I$  единственную стационарную точку  $\omega_*$ :  $\varphi'(\omega_*) = 0$ .
3.  $\varphi''(\omega_*) \neq 0$  (т.е.  $\omega_*$  — невырожденная стационарная точка).

Тогда при  $t \rightarrow +\infty$  главный член асимптотики имеет вид

$$J(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\varphi''(\omega_*)|t}} f(\omega_*) e^{i\varphi(\omega_*)t + \frac{i\pi}{4} \text{sign } \varphi''(\omega_*)} + O(t^{-1}).$$

## Доказательство.

- Промежуток интегрирования разбивается на два точкой  $\omega_*$ .
- В каждом из интегралов делается замена переменной:  $\omega = \psi(w) : \varphi(\omega) - \varphi(\omega_*) = w^2$ .
- Применяем лемму к каждому из интегралов.



## Лемма Эрдейи

## Теорема

Пусть  $a > 0$ ,  $\alpha \geq 1$ ,  $\beta > 0$ ,  $f(\omega) \in C^\infty$ ,  $f^{(n)}(a) = 0 \forall n$ . Тогда

$$\int_0^a \omega^{\beta-1} f(\omega) e^{it\omega^\alpha} d\omega \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}, \quad t \rightarrow \infty;$$
$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k! \alpha} \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) e^{\frac{i\pi(k+\beta)}{2\alpha}}.$$

## Задача

## Задача

Вычислить асимптотику при  $t \rightarrow +\infty$  функции Бесселя целого порядка  $n \geq 0$

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp i(t \sin \omega - n\omega) d\omega$$

## Вклад от полюса: эталонные интегралы

□  $f(\omega) \in \mathcal{D}$ . Рассмотрим интегралы Фурье

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega - i0} d\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого  $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp i\pi\delta(\omega) + \text{VP} \frac{1}{\omega}$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega \pm i0} d\omega = \mp i\pi f(0) + \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega.$$

## Вклад от полюса: эталонные интегралы

□  $f(\omega) \in \mathcal{D}$ . Рассмотрим интегралы Фурье

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega - i0} d\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого  $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp i\pi\delta(\omega) + \text{VP} \frac{1}{\omega}$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega \pm i0} d\omega = \mp i\pi f(0) + \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega.$$

## Лемма

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega = O(t^{-\infty})$$

## Вклад от полюса: эталонные интегралы

□  $f(\omega) \in \mathcal{D}$ . Рассмотрим интегралы Фурье

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega - i0} d\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого  $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp i\pi\delta(\omega) + \text{VP} \frac{1}{\omega}$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega \pm i0} d\omega = \mp i\pi f(0) + \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega.$$

## Лемма

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega = O(t^{-\infty})$$

## Доказательство.

□  $\eta(\omega) \in \mathcal{D}$  :  $\eta \equiv 1$  при  $|\omega| < \delta$ ,  $f(\omega) = (f(\omega) - \eta(\omega)f(0)) + \eta(\omega)f(0)$ .

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f(\omega) - \eta(\omega)f(0)) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega + f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega = O(t^{-\infty}) + f(0) \left( \int_{\rightarrow \curvearrowright} \frac{\eta(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega \right) = \\ &= O(t^{-\infty}) + f(0) \left( \frac{i}{t} \right)^N \left( \int_{\rightarrow \curvearrowright} \frac{d^N}{d\omega^N} \left( \frac{\eta(\omega)}{\omega} \right) e^{i\omega t} d\omega \right) \frac{|e^{i\omega t}| \leq 1}{\left| \frac{d^N}{d\omega^N} \left( \frac{\eta(\omega)}{\omega} \right) \right| \leq C_N} = O(t^{-\infty}) \end{aligned}$$

Контур  $\rightarrow \curvearrowright$ : 2 луча и полуокружность фиксированного радиуса  $\rho < \delta$ , где  $\eta \equiv 1$ .

□

## Вклад от полюса: эталонные интегралы

□  $f(\omega) \in \mathcal{D}$ . Рассмотрим интегралы Фурье

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega - i0} d\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого  $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp i\pi\delta(\omega) + \text{VP} \frac{1}{\omega}$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega \pm i0} d\omega = \mp i\pi f(0) + \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega.$$

## Лемма

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega = O(t^{-\infty})$$

## Следствие

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega = i\pi f(0) + O(t^{-\infty})$$

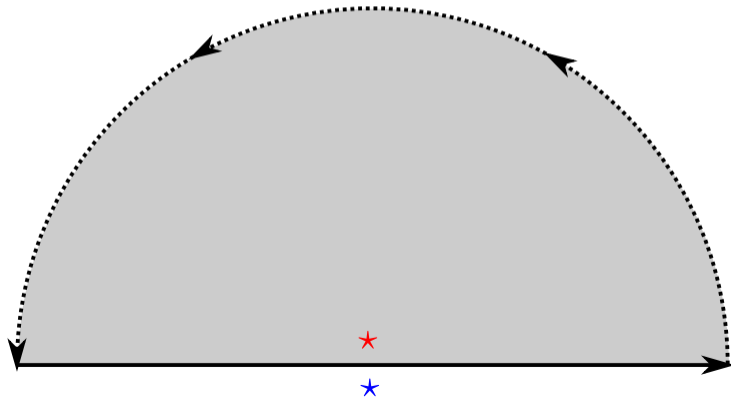
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega - i0} d\omega = 2i\pi f(0) + O(t^{-\infty})$$

## Вклад от полюса: аналогия с вычислением интеграла через сумму вычетов

Для голоморфных и ограниченных в верхней полуплоскости  $f$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega - i0} d\omega = 2i\pi f(0).$$

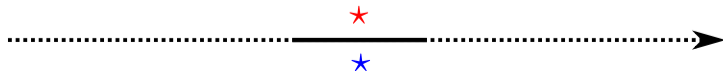


## Вклад от полюса: аналогия с вычислением интеграла через сумму вычетов

Для функций вещественной переменной  $f \in \mathcal{D}$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega + i0} d\omega = O(t^{-\infty}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\omega t}}{\omega - i0} d\omega = 2i\pi f(0) + O(t^{-\infty}).$$



## Вклад от полюса: эталонные интегралы

□  $f(\omega) \in \mathcal{D}$ . Рассмотрим интегралы Фурье

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega + i0} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega - i0} d\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого  $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp i\pi\delta(\omega) + \text{VP} \frac{1}{\omega}$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega \pm i0} d\omega = \mp i\pi f(0) + \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega.$$

## Вклад от полюса: эталонные интегралы

□  $f(\omega) \in \mathcal{D}$ . Рассмотрим интегралы Фурье

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega + i0} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega - i0} d\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого  $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp i\pi\delta(\omega) + \text{VP} \frac{1}{\omega}$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega \pm i0} d\omega = \mp i\pi f(0) + \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega.$$

## Лемма

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega - i0} d\omega = O(t^{-\infty})$$

## Вклад от полюса: эталонные интегралы

□  $f(\omega) \in \mathcal{D}$ . Рассмотрим интегралы Фурье

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega + i0} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega - i0} d\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого  $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp i\pi\delta(\omega) + \text{VP} \frac{1}{\omega}$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega \pm i0} d\omega = \mp i\pi f(0) + \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega.$$

## Лемма

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega - i0} d\omega = O(t^{-\infty})$$

## Доказательство.

Аналогично



## Вклад от полюса: эталонные интегралы

□  $f(\omega) \in \mathcal{D}$ . Рассмотрим интегралы Фурье

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega + i0} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega - i0} d\omega.$$

Применяем формулы Сохоцкого  $\frac{1}{\omega \pm i0} = \mp i\pi\delta(\omega) + \text{VP} \frac{1}{\omega}$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega \pm i0} d\omega = \mp i\pi f(0) + \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega.$$

## Лемма

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega - i0} d\omega = O(t^{-\infty})$$

## Следствие

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega = -i\pi f(0) + O(t^{-\infty})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega + i0} d\omega = -2i\pi f(0) + O(t^{-\infty})$$

## Вклад от полюса: общий случай

## Теорема

Пусть  $f(\omega) \in \mathcal{D}$ ,  $\varphi(\omega) \in C^\infty$ , причем  $\varphi'(\omega) \neq 0$ . Тогда при  $t \rightarrow +\infty$

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\varphi(\omega)t}}{\omega} d\omega = \pi i \alpha f(0) e^{i\varphi(0)t} + O(t^{-\infty}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\varphi(\omega)t}}{\omega + i\alpha 0} d\omega = O(t^{-\infty}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) e^{i\varphi(\omega)t}}{\omega - i\alpha 0} d\omega = 2\pi i \alpha f(0) e^{i\varphi(0)t} + O(t^{-\infty}),$$

где  $\alpha = \text{sign } \varphi'(0)$ .

## Доказательство.

Заменой переменных  $\omega = \psi(w) : \varphi(\omega) - \varphi(0) = w$  сводим интегралы к эталонным. □

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость**
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения

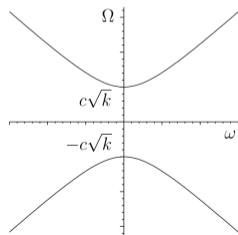
## Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость.

$$u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} - ku = 0$$

$$\int u = u_0(\omega, \Omega) e^{-i\omega x} e^{-i\Omega t} \Rightarrow$$

Дисперсионное соотношение:

$$\Omega^2 - c^2(\omega^2 + k) = 0$$



$$\Omega_{\omega} = c\sqrt{k} \quad \text{— частота отсечки}$$

$$\frac{\Omega}{\omega} \quad \text{— фазовая скорость}$$

$$\frac{d\Omega}{d\omega} = \frac{c\omega}{(\Omega/\omega)} = c \frac{\sqrt{\Omega^2 - \Omega_0^2}}{\Omega} \quad \text{—}$$

— групповая скорость

# Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным ИСТОЧНИКОМ

Рассмотрим задачу ( $\gamma \rightarrow +0$ ,  $\Omega_0 > c\sqrt{k}$ )

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t) \sin \Omega_0 t \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

# Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным ИСТОЧНИКОМ

Рассмотрим задачу ( $\gamma \rightarrow +0$ ,  $\Omega_0 > c\sqrt{k}$ )

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t) \exp i\Omega_0 t \delta(x),$$

$$u|_{t<0} \equiv 0.$$

# Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным ИСТОЧНИКОМ

Рассмотрим задачу ( $\gamma \rightarrow +0$ ,  $\Omega_0 > c\sqrt{k}$ )

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t) \exp i\Omega_0 t \delta(x),$$

$$u|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по  $x$ :

$$\ddot{u}_F + 2c^2\gamma\dot{u}_F + c^2(\omega^2 + k)u_F = c^2PH(t) \exp i\Omega_0 t \implies$$

$$u_F = u_{F*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}t) + C_- \exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}t).$$

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F*} = \frac{c^2P \exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 2\gamma c^2\Omega_0 i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Воспользовавшись НУ найдем  $C_-$ ,  $C_+$ :

# Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным ИСТОЧНИКОМ

Рассмотрим задачу ( $\gamma \rightarrow +0$ ,  $\Omega_0 > c\sqrt{k}$ )

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t) \exp i\Omega_0 t \delta(x),$$

$$u|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по  $x$ :

$$\ddot{u}_F + 2c^2\gamma\dot{u}_F + c^2(\omega^2 + k)u_F = c^2PH(t) \exp i\Omega_0 t \implies$$

$$u_F = u_{F*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + kt}) + C_- \exp(-ic\sqrt{\omega^2 + kt}).$$

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F*} = \frac{c^2 P \exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 0i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Воспользовавшись НУ найдем  $C_-$ ,  $C_+$ :

# Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным ИСТОЧНИКОМ

Рассмотрим задачу ( $\gamma \rightarrow +0$ ,  $\Omega_0 > c\sqrt{k}$ )

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t) \exp i\Omega_0 t \delta(x),$$

$$u|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по  $x$ :

$$\ddot{u}_F + 2c^2\gamma\dot{u} + c^2(\omega^2 + k)u_F = c^2PH(t) \exp i\Omega_0 t \implies$$

$$u_F = u_{F*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}t) + C_- \exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}t).$$

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F*} = \frac{c^2P \exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 0i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Воспользовавшись НУ найдем  $C_-$ ,  $C_+$ :

$$\begin{cases} C_+ + C_- = -u_{F*}|_{t=0} \\ C_+ - C_- = -\frac{\Omega_0}{c\sqrt{\omega^2 + k}} u_{F*}|_{t=0} \end{cases} \implies$$

# Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным ИСТОЧНИКОМ

Рассмотрим задачу ( $\gamma \rightarrow +0$ ,  $\Omega_0 > c\sqrt{k}$ )

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t) \exp i\Omega_0 t \delta(x),$$

$$u|_{t<0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по  $x$ :

$$\ddot{u}_F + 2c^2\gamma\dot{u}_F + c^2(\omega^2 + k)u_F = c^2PH(t) \exp i\Omega_0 t \implies$$

$$u_F = u_{F*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}t) + C_- \exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}t).$$

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F*} = \frac{c^2P \exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 0i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Воспользовавшись НУ найдем  $C_-$ ,  $C_+$ :

$$\begin{cases} C_+ + C_- = -u_{F*}|_{t=0} \\ C_+ - C_- = -\frac{\Omega_0}{c\sqrt{\omega^2 + k}} u_{F*}|_{t=0} \end{cases} \implies C_{\pm} = \frac{-c\sqrt{\omega^2 + k} \mp \Omega_0}{2c\sqrt{\omega^2 + k}} u_{F*}|_{t=0}$$

## Стационарное решение

Фурье-образ стационарного решения:

$$u_{F*} = \frac{c^2 P \exp i\Omega_0 t}{-\Omega_0^2 + 0i + c^2(\omega^2 + k)}$$

Находим корни знаменателя:

$$c^2\omega^2 = \Omega_0^2 - c^2k - 0i \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_{\pm} \equiv \pm\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} \mp 0i$$

Разлагаем дробь на простейшие:

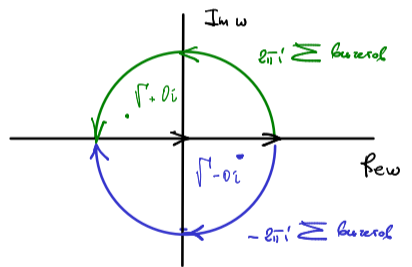
$$u_{F*} = \frac{P \exp i\Omega_0 t}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left( \frac{1}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \frac{1}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i} \right)$$

Применяем обратное преобразование Фурье по  $x$ :

$$u_* = \frac{P \exp i\Omega_0 t}{4\pi\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i\omega x) d\omega}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i\omega x) d\omega}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i} \right)$$

Вычисляем интегралы через вычеты. Для  $x > 0$  учитываем полюс в верхней полуплоскости, для  $x < 0$  — в нижней.

$$u_* = \frac{e^{i\Omega_0 t}}{2\pi} \frac{p}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left( \int \frac{e^{-i\omega x} d\omega}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \int \frac{e^{-i\omega x} d\omega}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i} \right)$$



$x > 0:$   $u_* = \frac{-ip}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} e^{i\Omega_0 t} e^{-i\sqrt{\dots} x}$

$x < 0:$   $u_* = \frac{-ip}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} e^{i\Omega_0 t} e^{i\sqrt{\dots} x}$

В вещественной Im:  $u_* = -\frac{p}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \cos(\Omega_0 t - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} |x|)$

## Асимптотика переходного процесса

$$u_F = u_{F_*} + \tilde{u}_F \equiv u_{F_*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}t) + C_- \exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}t),$$

$$C_{\pm} = \frac{-c\sqrt{\omega^2 + k} \mp \Omega_0}{2c\sqrt{\omega^2 + k}} u_{F_*}|_{t=0},$$

$$u_{F_*}|_{t=0} = \frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left( \frac{1}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \frac{1}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i} \right),$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_F \exp(-i\omega x) d\omega.$$

## Асимптотика переходного процесса

$$u_F = u_{F_*} + \tilde{u}_F \equiv u_{F_*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + k}t) + C_- \exp(-ic\sqrt{\omega^2 + k}t),$$

$$C_{\pm} = \frac{-c\sqrt{\omega^2 + k} \mp \Omega_0}{2c\sqrt{\omega^2 + k}} u_{F_*}|_{t=0},$$

$$u_{F_*}|_{t=0} = \frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left( \frac{1}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} + 0i} - \frac{1}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} - 0i} \right),$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_F \exp(-i\omega Wt) d\omega.$$

Рассматривая при  $t \rightarrow \infty$  **переходный процесс** на фронте, **движущимся от источника с произвольной скоростью  $W$** , видим что основной вклад порядка  $O(1)$  в финальный результат соответствуют тем же полюсам, что были рассмотрены при исследовании стационарного решения. Применяем **теорему о вкладе от полюса** в интеграл Фурье.

Вычисляем  $C_-(\omega_{\pm}) = 0$ ,  $C_+(\omega_{\pm}) = -u_{F_*}|_{t=0}$ ,  $c\sqrt{\omega_{\pm}^2 + k} = \Omega_0$ .

## Асимптотика переходного процесса

$$u_F = u_{F_*} + \tilde{u}_F \equiv u_{F_*} + C_+ \exp(ic\sqrt{\omega^2 + kt}) + o(1),$$

$$C_+ = -u_{F_*}|_{t=0},$$

$$u_{F_*}|_{t=0} = \frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \left( \frac{1}{\omega - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k + 0i}} - \frac{1}{\omega + \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k - 0i}} \right),$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_{F_*} \exp(-i\omega Wt) d\omega.$$

Для **интеграла Фурье** фаза равна:

$$\varphi(\omega) = c\sqrt{\omega^2 + k} - \omega W.$$

Вычисляем  $\varphi'(\omega_{\pm})$  с учетом дисперсионного соотношения  $\Omega^2 = c^2(\omega^2 + k)$ :

$$\varphi'(\omega_{\pm}) = \pm c_g(\Omega_0) - W.$$

В соответствии с **теоремой** имеем:

$|W| < c_g$ : оба вклада в переходный процесс —  $o(1)$ , решение равно стационарному;

$|W| > c_g$ : вклад в переходный процесс равен стационарному решению с обратным знаком, решение равно  $o(1)$ ;

$|W| \simeq c_g$ : стационарная точка совпадает с полюсом, требуется дополнительное исследование.

# Скорость переднего фронта сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным ИСТОЧНИКОМ

## Задача

$$u'' - 2\gamma\dot{u} - \frac{1}{c^2}\ddot{u} - ku = -PH(t) \sin \Omega_0 t \delta(x),$$

$$u|_{t<0} \equiv 0.$$

Асимптотика решения при  $t \rightarrow \infty$ ,  $x = Wt$ ,  $c_g(\Omega_0) - \frac{|x|}{t} \neq 0$

$$u = -\frac{P}{2\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k}} \cos\left(\Omega_0 t - \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{c^2} - k} |x|\right) H\left(c_g(\Omega_0) - \frac{|x|}{t}\right) + O(t^{-1/2})$$

## Групповая скорость

### Основной вывод

На больших временах скорость переднего фронта гармонического сигнала, созданного нестационарным гармоническим точечным источником, равна групповой скорости, соответствующей частоте колебаний источника.

### Важные идеи, использованные при решении задачи

- Асимптотическая оценка интеграла обратного преобразования Фурье.
- Принцип предельного поглощения.
- Рассмотрение решения на подвижном фронте, движущимся от источника с произвольной скоростью.

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)**
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения

## Нестационарное возмущение системы с дисперсией

<https://en.wikipedia.org/wiki/Breather>

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t) \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по  $x$ :

$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \implies$$

## Нестационарное возмущение системы с дисперсией

<https://en.wikipedia.org/wiki/Breather>

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t) \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по  $x$ :

$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \implies u_F = H(t) \frac{\sin \sqrt{\omega^2 + 1} t}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_F \exp(-i\omega x) d\omega \implies$$

## Нестационарное возмущение системы с дисперсией

<https://en.wikipedia.org/wiki/Breather>

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t) \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по  $x$ :

$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \implies u_F = H(t) \frac{\sin \sqrt{\omega^2 + 1} t}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_F \exp(-i\omega x) d\omega \implies u = -\frac{c}{2} H(ct - |x|) J_0(\sqrt{k(c^2 t^2 - x^2)})$$

## Нестационарное возмущение системы с дисперсией

<https://en.wikipedia.org/wiki/Breather>

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t) \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по  $x$ :

$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \implies u_F = H(t) \frac{\sin \sqrt{\omega^2 + 1} t}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_F \exp(-i\omega W t) d\omega \implies$$

## Нестационарное возмущение системы с дисперсией

<https://en.wikipedia.org/wiki/Breather>

In physics, a breather is a nonlinear wave in which energy concentrates in a localized and oscillatory fashion. This contradicts with the expectations derived from the corresponding linear system for infinitesimal amplitudes, which tends towards an even distribution of initially localized energy.

$$u'' - \ddot{u} - u = -\delta(t) \delta(x),$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Применяем преобразование Фурье по  $x$ :

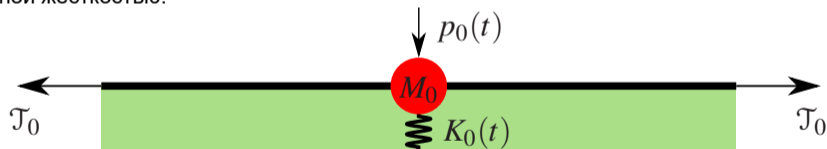
$$\ddot{u}_F + (\omega^2 + 1)u_F = \delta(t) \implies u_F = H(t) \frac{\sin \sqrt{\omega^2 + 1} t}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_F \exp(-i\omega W t) d\omega \implies u = O(t^{-1/2}), \quad t \rightarrow \infty$$

## Необходимое условие локализации в линейных системах

Необходимое условие локализации в линейных системах — наличие пространственной неоднородности.

В механических системах такими неоднородностями могут быть инерционные включения и/или зоны с ослабленной жесткостью.



## Вынужденные колебания струны на упругом основании

$$u'' - \ddot{u} - u = P \exp(-i\Omega t) \delta(x),$$

$$\square u = \hat{u}(x) \exp(-i\Omega t) :$$

$$\hat{u}'' - (1 - \Omega^2)\hat{u} = P \delta(x).$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 - \Omega^2 + 1 = 0.$$

Решение:

$$\hat{u} = -P \frac{\exp(-\sqrt{1 - \Omega^2}|x|)}{2\sqrt{1 - \Omega^2}}, \quad |\Omega| < \Omega_*;$$

$$\hat{u} = P \frac{\exp(i \operatorname{sign} \Omega \sqrt{\Omega^2 - 1}|x|)}{2i \operatorname{sign} \Omega \sqrt{\Omega^2 - 1}}, \quad |\Omega| > \Omega_*.$$

Здесь:  $\Omega_* = 1$  — частота отсечки.

$|\Omega| > \Omega_*$ : Синусоидальные бегущие волны

$|\Omega| < \Omega_*$ : Локализованные решения, удовлетворяющие условиям конечности энергии:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}^2 dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}'^2 dx < \infty.$$

## Локализованные колебания струны на упругом основании

$$\begin{aligned}
 u'' - \ddot{u} - u &= -P(t) \delta(x), \\
 P(t) &= -M\ddot{u}(0, t) - Ku(0, t), \\
 M &\geq 0, \quad K \underset{\leq}{\leq} 0.
 \end{aligned}$$

□  $u = \hat{u}(x) \exp(-i\Omega t)$  :

$$\hat{u}'' - (1 - \Omega^2)\hat{u} = (K - M\Omega^2)\hat{u}(0) \delta(x).$$

Ищем решения с конечной энергией:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}^2 dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}'^2 dx < \infty.$$

Дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 + A^2(\Omega) = 0, \quad A^2(\Omega) = 1 - \Omega^2.$$

Решение:

$$\hat{u} = -(K - M\Omega^2) \hat{u}(0) \frac{\exp(-\sqrt{1 - \Omega^2}|x|)}{2\sqrt{1 - \Omega^2}}, \quad |\Omega| < 1;$$

Частотное уравнение для локализованной моды:

$$2\sqrt{1 - \Omega_0^2} = M\Omega_0^2 - K.$$

## Локализованные колебания струны на упругом основании

Частотное уравнение для локализованной моды:

$$2\sqrt{1 - \Omega_0^2} = M\Omega_0^2 - K.$$

**Задача**

Найти выражения для частоты  $\Omega_0$  локализованной моды и необходимые и достаточные условия существования локализованной моды в частных случаях а)  $K = 0$  б)  $M = 0$ .

## Нестационарное возмущение системы с локализованной модой

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t) \delta(x),$$

$$P(t) = -M\ddot{u}(0, t) - Ku(0, t) + p(t),$$

Применяем преобразование Фурье по  $t$ :

$$u_F'' - A^2(\Omega)u_F = (Ku_F(0, \Omega) - M\Omega^2u_F(0, \Omega) - p_F(\Omega)) \delta(x),$$

Решение:

$$\hat{u} = -((K - M\Omega^2) \hat{u}(0) - p_F(\Omega)) \frac{\exp(-\sqrt{1 - \Omega^2}|x|)}{2\sqrt{1 - \Omega^2}}, \quad |\Omega| < 1;$$

$$u(0, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_F e^{-i\Omega\tau} d\Omega}{2\sqrt{1 - \Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}$$

=

## Нестационарное возмущение системы с локализованной модой

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t) \delta(x),$$

$$P(t) = -M\ddot{u}(0, t) - Ku(0, t) + p(t),$$

Применяем преобразование Фурье по  $t$ :

$$u_F'' - A^2(\Omega)u_F = (Ku_F(0, \Omega) - M\Omega^2 u_F(0, \Omega) - p_F(\Omega)) \delta(x),$$

Решение:

$$\hat{u} = -((K - M\Omega^2) \hat{u}(0) - p_F(\Omega)) \frac{\exp(-\sqrt{1 - \Omega^2}|x|)}{2\sqrt{1 - \Omega^2}}, \quad |\Omega| < 1;$$

$$\begin{aligned} u(0, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_F e^{-i\Omega\tau} d\Omega}{2\sqrt{1 - \Omega^2} - (M\Omega^2 - K)} \\ &= -i \sum_{\bar{\Omega}=\pm\Omega_0-i0} p_f(\bar{\Omega}) \operatorname{Res} \left( \frac{1}{2\sqrt{1 - \Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}, \bar{\Omega} \right) \exp(-i\bar{\Omega}\tau) + o(1) \end{aligned}$$

## Нестационарное возмущение системы с локализованной модой

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t) \delta(x),$$

$$P(t) = -M\ddot{u}(0, t) - Ku(0, t) + p(t),$$

Применяем преобразование Фурье по  $t$ :

$$u_F'' - A^2(\Omega)u_F = (Ku_F(0, \Omega) - M\Omega^2u_F(0, \Omega) - p_F(\Omega)) \delta(x),$$

Решение:

$$\hat{u} = -((K - M\Omega^2)\hat{u}(0) - p_F(\Omega)) \frac{\exp(-\sqrt{1 - \Omega^2}|x|)}{2\sqrt{1 - \Omega^2}}, \quad |\Omega| < 1;$$

$$u(0, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_F e^{-i\Omega\tau} d\Omega}{2\sqrt{1 - \Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}$$

$$= -i \sum_{\bar{\Omega}=\pm\Omega_0-i0} p_f(\bar{\Omega}) \operatorname{Res} \left( \frac{1}{2\sqrt{1 - \Omega^2} - (M\Omega^2 - K)}, \bar{\Omega} \right) \exp(-i\bar{\Omega}\tau) + o(1)$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \Omega_0^2} |p_F(\Omega_0)|}{\Omega_0(1 + M\sqrt{1 - \Omega_0^2})} \sin(\Omega_0 t - \arg p_F(\Omega_0)) + o(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

# Параметрическое возмущение системы с единственной низкочастотной локализованной модой

# Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной жесткостью: метод многих масштабов

$$\ddot{u} + \Omega_0^2(\epsilon t)u = 0, \quad t = O(\epsilon^{-1}).$$

 Найфэ А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

Используем асимптотический анзац (аппроксимацию решения):

$$T = \epsilon t,$$

$$u(t) = W(T) \exp \varphi(t),$$

$$\dot{\varphi} = -i \Omega_0(T),$$

$$W(T) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j W_j(T).$$

Переменные  $\varphi$ ,  $T$  считаем независимыми.

$$(\dot{\cdot}) = -i \Omega_0 \partial_{\varphi} + \epsilon \partial_T,$$

$$(\ddot{\cdot}) = -\Omega_0^2 \partial_{\varphi\varphi}^2 - 2\epsilon i \Omega_0 \partial_{\varphi T}^2 - \epsilon i \Omega_0' \partial_{\varphi} + O(\epsilon^2),$$

Подставляя в уравнение, получаем уравнение первого приближения:

$$2\Omega_0 W_0' + \Omega_0' W_0 = 0.$$

# Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной жесткостью: метод многих масштабов

$$\ddot{u} + \Omega_0^2(\epsilon t)u = 0$$

Уравнение первого приближения:

$$2\Omega_0 W_0' + \Omega_0' W_0 = 0.$$

$$\frac{dW_0}{W_0} = -\frac{d\Omega_0}{2\Omega_0}$$

$$W_0 = C_0 \exp\left(-\int \frac{d\Omega_0}{2\Omega_0}\right) = \frac{C_0}{\sqrt{|\Omega_0|}},$$

Собирая линейную комбинацию двух решений, отвечающих  $\pm\Omega_0$ , находим:

$$u(0, \tau) = \frac{2C_0}{\sqrt{|\Omega_0|}} \sin\left(\int_0^t \Omega_0(T) dT - D_0\right) + O(\epsilon).$$

# Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой: метод многих масштабов

## Задача

Исследовать свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой.

# Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой: метод многих масштабов

## Задача

Исследовать свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой.

$$(M(\epsilon t)\dot{u})' + u = 0.$$

# Свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой: метод многих масштабов

## Задача

Исследовать свободные колебания в системе с одной степенью свободы с переменной массой.

$$(M(\epsilon t)\dot{u})' + u = 0.$$

□  $\Omega_0^2 = 1/M$ . Уравнение первого приближения:

$$2\Omega_0 W_{0T}' + \left( \Omega_{0T}' + \Omega_0 \frac{M_T'}{M} \right) W_0 = 0.$$

$$\frac{dW_0}{W_0} = -\frac{d\Omega_0}{2\Omega_0} - \frac{dM}{2M}$$

$$W_0 = C_0 \exp\left(-\int \left(\frac{d\Omega_0}{2\Omega_0} + \frac{dM}{2M}\right)\right) = \frac{C_0}{\sqrt{|\Omega_0 M|}} = C_0 \sqrt{|\Omega_0|},$$

Собирая линейную комбинацию двух решений, отвечающих  $\pm\Omega_0$ , находим:

$$u(0, \tau) = 2C_0 \sqrt{|\Omega_0|} \sin\left(\int_0^t \Omega_0(T) dT - D_0\right) + O(\epsilon).$$

# Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t) \delta(x),$$

$$P(t) = -M\ddot{u}(0, t) - K(\epsilon t)u(0, t) + p(t),$$

- $\epsilon = o(1)$ ,
- $t = O(\epsilon^{-1})$ ,
- $K(\epsilon t)$  такова, что локализованная мода  $\exists \forall t$ .

Будем предполагать, что

- Частотное уравнение

$$2\sqrt{1 - \Omega_0^2(\epsilon t)} = M\Omega_0^2(\epsilon t) - K(\epsilon t)$$

выполняется  $\forall t$ ;

- Дисперсионное соотношение

$$\omega^2(\epsilon t) - \Omega^2(\epsilon t) + 1 = \omega^2 + A^2(\Omega) = 0$$

при  $x = \pm 0$  выполняется  $\forall t$ .

# Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

Используем асимптотический анзац ( $t > 0, x \leq 0$ ):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= W(X, T) \exp \varphi(x, t), \\ T &= \epsilon t, \quad X = \epsilon x, \\ \varphi' &= i \omega(X, T), \quad \dot{\varphi} = -i \Omega(X, T), \\ W(X, T) &= \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j W_j(X, T), \end{aligned}$$

причем

$$\Omega'_X + \omega'_T = 0.$$

Переменные  $\varphi, T, X$  считаем независимыми.

$$\begin{aligned} (\dot{\cdot}) &= -i \Omega \partial_{\varphi} + \epsilon \partial_T, \\ (\ddot{\cdot}) &= -\Omega^2 \partial_{\varphi}^2 - 2\epsilon i \Omega \partial_{\varphi T}^2 - \epsilon i \Omega'_T \partial_{\varphi} + O(\epsilon^2), \\ (\cdot)' &= i \omega \partial_{\varphi} + \epsilon \partial_X, \\ (\cdot)'' &= -\omega^2 \partial_{\varphi}^2 + 2\epsilon i \omega \partial_{\varphi X}^2 + \epsilon i \omega'_X \partial_{\varphi} + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Условия при  $x = 0$ :

$$\Omega(\pm 0, T) = \Omega_0(T),$$

# Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t) \delta(x),$$

$$P(t) = -M\ddot{u}(0, t) - K(\epsilon t)u(0, t) + p(t),$$

$$\implies [u'] = -M\ddot{u}(0, t) - K(\epsilon t)u(0, t) + p(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

Подставляя в выражение

$$[u'] = -M\ddot{u}(0, t) - K(\epsilon t)u(0, t),$$

представления для решения и дифференциальных операторов, получим:

$$M(2\Omega_0 W_0' + \Omega_0' W_0) = i[W_0' X].$$

# Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

$$u'' - \ddot{u} - u = -P(t)\delta(x), \quad x = \pm 0.$$

Подставляя представления для решения и дифференциальных операторов, получим:

$$2\omega W_{0X}' + \omega_X' W_0 + 2\Omega_0 W_{0T}' + \Omega_{0T}' W_0 = 0.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \omega &= i \operatorname{sign} x A(\Omega_0), \\ \omega_X' &= \omega_\Omega' \Omega_X' = -\omega_\Omega' \omega_T'. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$W_{0X}' = -\frac{2\Omega_0 W_{0T}' + (-\omega_\Omega' \omega_T' + \Omega_{0T}') W_0}{2i \operatorname{sign} x A(\Omega_0, T)},$$

$$[W_{0X}'] = -\frac{\Lambda_2 W_0 + \Lambda_1 W_{0T}'}{iA(\Omega_0)},$$

$$\Lambda_1 \equiv 2\Omega_0,$$

$$\Lambda_2 \equiv A_\Omega'(\Omega_0)A_T'(\Omega_0) + \Omega_{0T}' = \frac{\Omega_0^2 \Omega_{0T}'}{1 - \Omega_0^2} + \Omega_{0T}'.$$

# Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

Приравнивая выражения для  $[W_{0X}']$ , получаем уравнение для  $\bar{W}_0(T) \equiv W_0(0, T)$ :

$$M(2\Omega_0 \bar{W}'_{0T} + \Omega_0' \bar{W}_0) = -\frac{\Lambda_2 \bar{W}_0 + \Lambda_1 \bar{W}'_{0T}}{A(\Omega_0)}$$

или

$$\bar{W}'_{0T} + \left( \frac{\Omega_0'}{2\Omega_0} + \frac{\Omega_0 \Omega_0'}{2(1 - \Omega_0^2)(1 + M\sqrt{1 - \Omega_0^2})} \right) \bar{W}_0 = 0.$$

Общее решение имеет вид:

$$\bar{W}_0 = \frac{C_0}{2} \exp \left( - \int \frac{d\Omega_0}{2\Omega_0} - \int \frac{\Omega_0 d\Omega_0}{2(1 - \Omega_0^2)(1 + M\sqrt{1 - \Omega_0^2})} \right)$$

Вычисляя интегралы, находим:

$$\bar{W}_0 = \frac{C_0}{2} \frac{(1 - \Omega_0^2)^{1/4}}{\Omega_0^{1/2} (1 + M\sqrt{1 - \Omega_0^2})^{1/2}}.$$

# Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами

Комбинируя найденное решение с комплексно-сопряженным, находим

$$u(0, t) \sim C_0 \frac{(1 - \Omega_0^2)^{1/4}}{\Omega_0^{1/2} (1 + M\sqrt{1 - \Omega_0^2})^{1/2}} \sin \left( \int_0^t \Omega_0(T) dT - D_0 \right).$$

Константы  $C_0$  и  $D_0$  должны быть определены приравнением найденного решения при  $T = 0$  к решению задачи в нулевом приближении (при  $\epsilon = 0$ ):

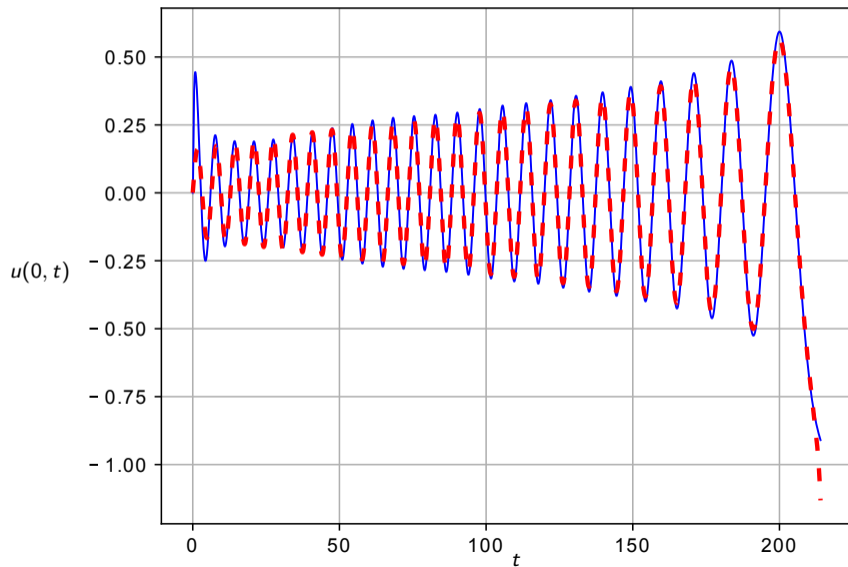
$$u(0, t) = \frac{\sqrt{1 - \Omega_0^2} |p_F(\Omega_0)|}{\Omega_0 (1 + M\sqrt{1 - \Omega_0^2})} \sin(\Omega_0 t - \arg p_F(\Omega_0)) + o(1).$$

Находим:

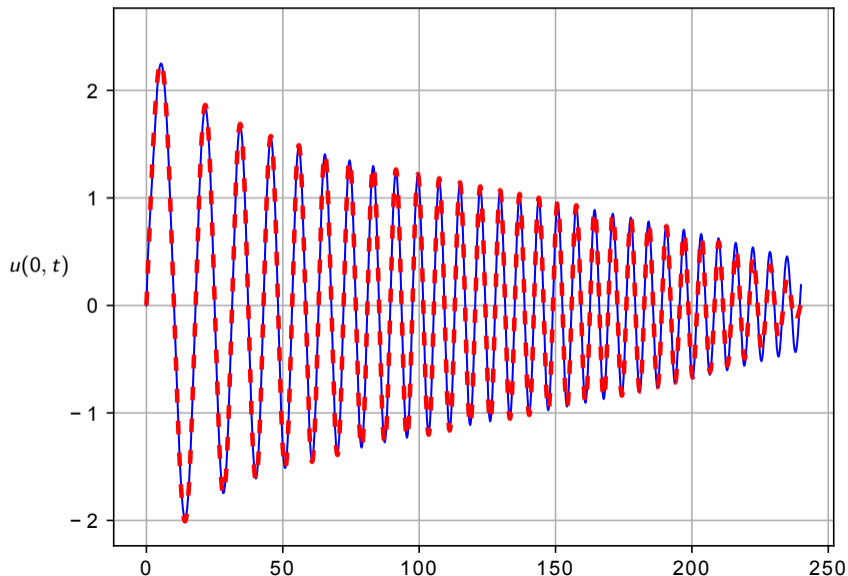
$$C_0 = \frac{(1 - \Omega_0^2(0))^{1/4} |p_F(\Omega_0(0))|}{\Omega_0^{1/2}(0) (1 + M\sqrt{1 - \Omega_0^2(0)})^{1/2}},$$

$$D_0 = \arg p_F(\Omega_0(0)).$$

# Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами: сравнение аналитического и численного решения




# Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами: сравнение аналитического и численного решения




## Нестационарное возмущение системы с локализованной модой и переменными в времени параметрами: ссылки


Впервые подход был предложен С.Н. Гавриловым

-  [С.Н. Гаврилов, Д.А. Индейцев.](#)  
 Об эволюции локализованной моды колебаний в системе “струна на упругом основании — подвижное инерционное включение”  
[Прикладная математика и механика, Т.66. №5, 2002. С. 864–873.](#)

Рассмотренная задача исследована в статье

-  [S.N. Gavrilov, E.V. Shishkina, Yu.A. Mochalova.](#)  
 An infinite-length system possessing a unique trapped mode versus a single degree of freedom system: a comparative study in the case of time-varying parameters.  
[In book: Editors: Altenbach H. et al. Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures, Springer, 2019.](#)

Значительно более общая задача:

-  [S.N. Gavrilov, I.O. Poroshin, E.V. Shishkina, Yu.A. Mochalova.](#)  
 Formal asymptotics for oscillation of a discrete mass-spring-damper system of time-varying properties, embedded into a one-dimensional medium described by the telegraph equation with variable coefficients.  
[Nonlinear Dyn, 112, 20967–21002 \(2024\). С. 864–873.](#)

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)**
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения

# Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$

$$\Delta u = \delta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$$

Применяя преобразование Фурье по  $x_1, x_2, x_3$ , получим

$$-\mathbf{k}^2 u_F(\mathbf{k}) = 1.$$

Функция  $\mathbf{k}^{-2}$  — локально интегрируемая в  $\mathbb{R}^3$ , поэтому

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dk_1 dk_2 dk_3}{\mathbf{k}^2} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-i|\mathbf{k}||\mathbf{r}| \cos \theta) k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi}{k^2} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-ik|\mathbf{r}| \cos \theta) \sin \theta dk d\theta \boxed{\mu = \cos \theta} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 \int_0^{\infty} \exp(-ik|\mathbf{r}|\mu) dk d\mu \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 \int_0^{\infty} \cos(k|\mathbf{r}|\mu) dk d\mu = -\frac{2}{(2\pi)^2 |\mathbf{r}|} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\sin(k|\mathbf{r}|)}{k} dk}_{\text{Интеграл Дирихле} = \frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{r}|} \end{aligned}$$

Интеграл Дирихле  $\int_0^\infty \frac{\sin(k\alpha)}{k} dk$ 

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \oint \frac{\exp(ik\alpha)}{k + i\epsilon} dk = 0^{\alpha > 0} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left( \int_{\text{Re}} + \cancel{\int_{\text{Im}}} \right) \frac{\exp(ik\alpha)}{k + i\epsilon} dk =$$

Формулы Сохоцкого:  $\frac{1}{k \mp i0} = \pm i\pi\delta(k) + \text{VP} \frac{1}{k}$

$$= -i\pi + \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik\alpha)}{k} dk \quad \xrightarrow{\text{Im}}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(k\alpha)}{k} dk = \frac{\pi}{2}$$

Разложение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$ 

$\forall$  гладкого поля  $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi,$$

где

$$\Phi = \nabla \cdot \mathbf{W},$$

$$\Psi = -\nabla \times \mathbf{W},$$

$$\mathbf{W} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{f} * \frac{1}{|\mathbf{r}|}.$$

Здесь  $\Phi$  — скалярный потенциал,  $\Psi$  — векторный потенциал.

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$**
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения

Сферические волны в  $\mathbb{R}^3$ 

$$\Delta u - c^{-2} \ddot{u} = 0$$

$$\square u = u(r, t), \quad r = |\mathbf{r}| \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

Для  $r > 0$ :

$$u_{rr} + \frac{2}{r} u_r - c^{-2} \ddot{u} = 0 \quad \xrightarrow{u=v/r} \quad v_{rr} - c^{-2} \ddot{v} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{1}{r} \phi_-\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} \phi_+\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

Фундаментальное решение волнового уравнения в  $\mathbb{R}^3$ 

$$\Delta u - c^{-2}\ddot{u} = \chi(t)\delta(\mathbf{r}), \quad \chi|_{t < 0} \equiv 0. \quad (3)$$

Начальные условия:  $u|_{t < 0} \equiv 0$ .

$$\square u = u(r, t), \quad r = |\mathbf{r}| \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

Для  $r > 0$ :

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r - c^{-2}\ddot{u} = 0 \quad \xrightarrow{u=v/r} \quad v_{rr} - c^{-2}\ddot{v} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{1}{r}\phi_-\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}\phi_+\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

Фундаментальное решение волнового уравнения в  $\mathbb{R}^3$ 

$$\Delta u - c^{-2}\ddot{u} = \chi(t)\delta(\mathbf{r}), \quad \chi|_{t < 0} \equiv 0. \quad (3)$$

Начальные условия:  $u|_{t < 0} \equiv 0$ .

$$\square u = u(r, t), \quad r = |\mathbf{r}| \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$u = \frac{1}{r}\phi\left(t - \frac{r}{c}\right)$ , где  $\phi$  подлежит определению. Вычислим  $\Delta u$ :

$$\begin{aligned} \Delta \frac{\phi(r, t)}{r} &= \\ &= \phi \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{1}{r} + \cancel{2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \phi \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} + \cancel{\frac{2}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r}} = \phi \Delta \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ &= -4\pi \phi(0, t) \delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad \xrightarrow{(3)} \quad \phi(r, t) = \phi(t - r/c) \quad \phi(0, t) = -\frac{1}{4\pi} \chi(t) \end{aligned}$$

Фундаментальное решение волнового уравнения в  $\mathbb{R}^3$ 

$$\Delta u - c^{-2}\ddot{u} = \chi(t)\delta(\mathbf{r}), \quad \chi|_{t < 0} \equiv 0. \quad (3)$$

Начальные условия:  $u|_{t < 0} \equiv 0$ .

$$\square u = u(r, t), \quad r = |\mathbf{r}| \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$u = -\frac{\chi\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

В частности, если  $\chi(t) = \delta(t)$ :

$$u = u_{(3)} \equiv -\frac{\delta\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

## Отражение сферической волны от центра симметрии

Ранее мы показали, что

$$\left(\Delta - c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \frac{\phi\left(t \pm \frac{r}{c}\right)}{r} = -4\phi\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Таким образом однородному волновому уравнению во всём  $\mathbb{R}^3$  удовлетворяет линейная комбинация

$$\frac{\phi\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r} - \frac{\phi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r},$$

т.е. сходящаяся волна  $r^{-1}\phi\left(t + \frac{r}{c}\right)$  отражается от центра симметрии аналогично волнам в струне с закреплённым концом.

## Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$

Рассмотрим источник единичной плотности в  $\mathbb{R}^3$ , сосредоточенный на оси  $x_3$ :

$$\Delta u_{(2)} - c^{-2} \ddot{u}_{(2)} = \delta(t) \delta(x_1) \delta(x_2) 1(x_3). \quad (4)$$

Начальные условия:  $u_{(2)}|_{t < 0} \equiv 0$ .

Предполагая, что  $u_{(2)} = u_{(2)}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , получаем вместо (4) уравнение в  $\mathbb{R}^2$ :

$$\tilde{\Delta} u_{(2)} - c^{-2} \ddot{u}_{(2)} = \delta(t) \delta(x_1) \delta(x_2).$$

Решение (4) строится как свёртка (метод спуска):

$$u_{(2)} = u_{(3)} \star 1(x_3) \delta(t) \delta(x_1) \delta(x_2) =$$

...

## Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$

Рассмотрим источник единичной плотности в  $\mathbb{R}^3$ , сосредоточенный на оси  $x_3$ :

$$\Delta u_{(2)} - c^{-2} \ddot{u}_{(2)} = \delta(t) \delta(x_1) \delta(x_2) 1(x_3). \quad (4)$$

Начальные условия:  $u_{(2)}|_{t < 0} \equiv 0$ .

Предполагая, что  $u_{(2)} = u_{(2)}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , получаем вместо (4) уравнение в  $\mathbb{R}^2$ :

$$\tilde{\Delta} u_{(2)} - c^{-2} \ddot{u}_{(2)} = \delta(t) \delta(x_1) \delta(x_2).$$

Решение (4) строится как свёртка (метод спуска):

$$\begin{aligned} u_{(2)} &= u_{(3)} \star 1(x_3) \delta(t) \delta(x_1) \delta(x_2) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u^{(3)}(\mathbf{r}, x_3, t) dx_3 = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta\left(t - \frac{\sqrt{\mathbf{r}^2 + x^2}}{c}\right)}{\sqrt{\mathbf{r}^2 + x^2}} dx \end{aligned}$$

$$\delta(f(t)) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t - t_i)$$

Фундаментальное решение волнового уравнения в  $\mathbb{R}^2$ 

$$x_0 = \sqrt{c^2 t^2 - r^2}$$

$$g'_x \Big|_{x=x_0} = \left( t - \frac{\sqrt{r^2+x^2}}{c} \right)' \Big|_{x=x_0} = -\frac{2x}{2c\sqrt{r^2+x^2}} \Big|_{x=x_0} = -\frac{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}}{c^2 t}$$

Решение (4) строится как свёртка (метод спуска):

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{(2)} &= \mathcal{U}_{(3)} \star 1(x_3)\delta(t)\delta(x_1)\delta(x_2) = \\ &= -\frac{H(ct-r)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\delta(g(x))}{\sqrt{r^2+x^2}} dx = -\frac{H(ct-r)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\delta(x-x_0)}{|g'(x_0)|\sqrt{r^2+x_0^2}} dx = \\ &= -\frac{c}{2\pi} \frac{H(ct-r)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \end{aligned}$$

# Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^1$

Совершенно аналогично:

$$\begin{aligned}
 u_{(1)} &= u^{(2)} \star 1(x_2)\delta(t)\delta(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{(2)}(x_1, y, t) dy = \\
 &= -\frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(c^2t^2 - x_1^2 - y^2)}{\sqrt{c^2t^2 - x_1^2 - y^2}} dy = \\
 &= -\frac{cH(ct - |x_1|)}{\pi} \int_0^{\sqrt{c^2t^2 - x_1^2}} \frac{dy}{\sqrt{c^2t^2 - x_1^2 - y^2}} = \\
 &= -\frac{cH(ct - |x_1|)}{\pi} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = -\frac{cH(ct - |x_1|)}{\pi} \arcsin 1 = \\
 &= -\frac{cH(ct - |x_1|)}{2}
 \end{aligned}$$

— уже знакомый нам результат!

Принцип Гюйгенса ( $\mathbb{R}^3$ )

$$u_{(3)} = -\frac{\delta\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r}|}$$

Принцип Гюйгенса: Возмущение от точечного, мгновенно действующего источника  $\delta(\mathbf{r})\delta(t)$  к моменту времени  $t > 0$  будет сосредоточено на сфере радиуса  $ct$  с центром в точке  $\mathbf{r} = 0$ . Это значит, что такое возмущение распространяется в виде сферической волны движущейся со скоростью  $c$ , причем после прохождения этой волны опять тождественно равно нулю.

Принцип Гюйгенса ( $\mathbb{R}^2$ )

$$u_{(2)} = -\frac{c}{2\pi} \frac{H(ct - r)}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}}$$

Принцип Гюйгенса: Возмущение от точечного, мгновенно действующего источника  $\delta(\mathbf{r})\delta(t)$  к моменту времени  $t > 0$  будет сосредоточено на сфере радиуса  $ct$  с центром в точке  $\mathbf{r} = 0$ . Это значит, что такое возмущение распространяется в виде сферической волны движущейся со скоростью  $c$ , причем после прохождения этой волны опять тождественно равно нулю.

Для волнового уравнения в  $\mathbb{R}^2$  принцип Гюйгенса не выполняется, т.к. за фронтом покоя не наступает. Говорят, что имеет место диффузия волн.

Принцип Гюйгенса ( $\mathbb{R}^1$ )

$$u_{(1)} = -\frac{cH(ct - |x_1|)}{2}$$

Принцип Гюйгенса: Возмущение от точечного, мгновенно действующего источника  $\delta(\mathbf{r})\delta(t)$  к моменту времени  $t > 0$  будет сосредоточено на сфере радиуса  $ct$  с центром в точке  $\mathbf{r} = 0$ . Это значит, что такое возмущение распространяется в виде сферической волны движущейся со скоростью  $c$ , причем после прохождения этой волны опять тождественно равно нулю.

Для волнового уравнения в  $\mathbb{R}^1$  принцип Гюйгенса выполняется для производных  $u'$ ,  $\dot{u}$  и не выполняется для  $u$ .

Принцип Гюйгенса ( $\mathbb{R}^n, n > 1$ )

Выполняется для нечётных  $n$ , не выполняется для чётных  $n$ .

## Задачи

- 1 Для  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  задано неоднородное волновое уравнение

$$\Delta u - c^{-2}\ddot{u} = \delta(x_1)\delta(x_2)H(1 - |x_3|)\delta(t).$$

и нулевые начальные условия. На плоскости  $x_3 = 0$  найти выражение для решения задачи.

- 2 Вычислить решение неоднородного волнового уравнения в  $\mathbb{R}^2$

$$\Delta u - c^{-2}\ddot{u} = \delta(x_1)\delta(x_2)H(t),$$

удовлетворяющее нулевым НУ.

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны**
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения



[В.С. Владимиров](#)

Уравнения математической физики.




[М., Наука, ...](#)



[Л.И. Слепян](#)

Нестационарные упругие волны.

[Л., «Судостроение», 1972.](#)

-  [Бабич, В.М., Киселёв А.П.](#)  
Упругие волны. Высокочастотная теория.  
СПб, «БХВ-Петербург», 2014.
-  [Eringen, A.C., Şuhubi E.S.](#)  
Elastodynamics. Vol 2. Linear theory.  
Academic Press, 1975.
-  [Achenbach, J.D.](#)  
Wave propagation in elastic solids.  
North Holland, 1975.

## Уравнения линейной изотропной эластодинамики (Навье, Ламе)

Баланс количества движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{K} - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Баланс кинетического момента:

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T}.$$

Закон Гука для линейно-упругого изотропного материала:

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} = k \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2\mu \operatorname{Dev} \boldsymbol{\varepsilon},$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S$  — тензор малых деформаций,  $\lambda$ ,  $\mu$  — постоянные Ламе ( $\mu > 0$ ,  $3\lambda + 2\mu \equiv 3k > 0$ ).

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = -\rho \mathbf{K}$$

## Плоские волны

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

Ищем решения однородных уравнений ЭД в виде  $\mathbf{u} = \mathbf{A}f(\theta)$ ,  $\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega t$  — **плоские волны**.

$f$  — форма волны (произвольная функция),

$\theta$  — фаза,

$\mathbf{A}$  — векторная амплитуда,

$\mathbf{k}$  — волновой вектор.

Фазовая скорость плоской волны — нормальная скорость движения поверхности постоянной фазы:

$$\mathbf{v} = \frac{\Omega \mathbf{k}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} = \frac{\Omega}{|\mathbf{k}|} \hat{\mathbf{k}}$$

Медленность плоской волны:

$$\mathbf{s} = \frac{|\mathbf{k}|}{\Omega} \hat{\mathbf{k}} = \Omega^{-1} \mathbf{k}$$

## Плоские волны

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

Ищем решения однородных уравнений ЭД в виде  $\mathbf{u} = \mathbf{A}f(\theta)$ ,  $\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega t$  — **плоские волны**.

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} &= \nabla \nabla f \cdot \mathbf{A} = f'' \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}, \\ \Delta \mathbf{u} &= \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla f \mathbf{A} = f'' (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}, \\ \ddot{\mathbf{u}} &= f'' \Omega^2 \mathbf{A} \end{aligned}$$

Получаем **задачу на собственные значения**:

$$\left( (\lambda + \mu) \mathbf{k} \mathbf{k} + \mu (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{I} - \rho \Omega^2 \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

## Плоские P &amp; S волны

$$\left( (\lambda + \mu) \mathbf{k} \mathbf{k} + \mu (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{I} - \rho \Omega^2 \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{A} \parallel \mathbf{k}$  — собственный вектор, если  $(\lambda + 2\mu) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \rho \Omega^2$ . Вычисляя по определению фазовую скорость и медленность, находим

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\Omega}{|\mathbf{k}|} \hat{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \hat{\mathbf{k}} \equiv c_1 \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{s} \equiv \Omega^{-1} \mathbf{k} = c_1^{-1} \hat{\mathbf{k}}.$$

Это плоские **P** (Primary, продольные, растяжения-сжатия, дилатации) волны.

## Плоские P &amp; S волны

$$\left( (\lambda + \mu) \mathbf{k} \mathbf{k} + \mu (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{I} - \rho \Omega^2 \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{A} \parallel \mathbf{k}$  — собственный вектор, если  $(\lambda + 2\mu) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \rho \Omega^2$ . Вычисляя по определению фазовую скорость и медленность, находим

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\Omega}{|\mathbf{k}|} \hat{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \hat{\mathbf{k}} \equiv c_1 \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{s} \equiv \Omega^{-1} \mathbf{k} = c_1^{-1} \hat{\mathbf{k}}.$$

Это плоские **P** (Primary, продольные, растяжения-сжатия, дилатации) волны.

$\mathbf{A} \perp \mathbf{k}$  — собственный вектор, если  $\mu \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \rho \Omega^2$ . Вычисляя по определению фазовую скорость и медленность, находим

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\Omega}{|\mathbf{k}|} \hat{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \hat{\mathbf{k}} \equiv c_2 \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{s} \equiv \Omega^{-1} \mathbf{k} = c_2^{-1} \hat{\mathbf{k}}.$$

Это плоские **S** (Secondary, поперечные, сдвига-вращения, искажения) волны.

# Скалярный потенциал и Р-волны

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

□ поле перемещений потенциально:

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi,$$

$\Phi$  — скалярный потенциал. Подставляя это представление в уравнения эластодинамики, получаем волновое уравнение

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\Delta \Phi - c_1^{-2} \ddot{\Phi}) = \mathbf{0}.$$

## Пример

Плоской Р-волне

$$\mathbf{u} = \mathbf{k} f'(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega t), \quad c_1^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \Omega^2$$

соответствует скалярный потенциал  $\Phi = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega t)$ .

Решения, представляемые посредством скалярного потенциала, являются Р-волнами.

## Векторный потенциал и S-волны

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

□ поле перемещений соленоидально:

$$\mathbf{u} = \nabla \times \Psi,$$

$\Psi$  — векторный потенциал. Подставляя это представление в уравнения эластодинамики, получим волновое уравнение

$$\mu \cancel{\nabla \times} (\Delta \Psi - c_2^{-2} \ddot{\Psi}) = \mathbf{0}.$$

## Пример

Плоской S-волне

$$\mathbf{u} = \mathbf{k} \times \mathbf{m} f'(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega t), \quad c_2^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \Omega^2$$

соответствует векторный потенциал  $\Psi = \mathbf{m} f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega t)$ .

Решения, представляемые посредством векторного потенциала, являются S-волнами.

## Потенциалы: общий случай при наличии внешних сил

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = -\rho \mathbf{K}$$

$$\square \mathbf{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi, \quad \mathbf{K} = \nabla X + \nabla \times \mathbf{Y}:$$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\Delta \Phi - c_1^{-2} \ddot{\Phi}) + \mu \nabla \times (\Delta \Psi - c_2^{-2} \ddot{\Psi}) = -\rho (\nabla X + \nabla \times \mathbf{Y}).$$

$$\Leftarrow \begin{aligned} \Delta \Phi - c_1^{-2} \ddot{\Phi} &= -c_1^{-2} X, \\ \Delta \Psi - c_2^{-2} \ddot{\Psi} &= -c_2^{-2} \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

$$\Phi = -\frac{\delta(t - \frac{r}{c_1})}{4\pi r} * (-c_1^{-2} X),$$

$$\Psi = -\frac{\delta(t - \frac{r}{c_2})}{4\pi r} * (-c_2^{-2} \mathbf{Y}),$$

В общем случае решения уравнений ЭД являются суммой Р и S волн, распространяющихся со скоростями  $c_1$  и  $c_2$  соответственно.

## Уравнения линейной изотропной эластодинамики (Навье, Навье-Коши, Ламе)

Баланс количества движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{K} - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Баланс кинетического момента:

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T}.$$

Закон Гука для линейно-упругого изотропного материала:

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} = k \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2\mu \operatorname{Dev} \boldsymbol{\varepsilon},$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S$  — тензор малых деформаций,  $\lambda$ ,  $\mu$  — постоянные Ламе ( $\mu > 0$ ,  $3\lambda + 2\mu \equiv 3k > 0$ ).

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = -\rho \mathbf{K}$$

## Уравнения линейной изотропной эластодинамики (Навье, Навье-Коши, Ламе)

Баланс количества движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{K} - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Баланс кинетического момента:

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T}.$$

Закон Гука для линейно-упругого изотропного материала:

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} = k \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2\mu \operatorname{Dev} \boldsymbol{\varepsilon},$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S$  — тензор малых деформаций,  $\lambda$ ,  $\mu$  — постоянные Ламе ( $\mu > 0$ ,  $3\lambda + 2\mu \equiv 3k > 0$ ).

$$-\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = -\rho \mathbf{K}$$

## Уравнения линейной изотропной эластодинамики (Навье, Навье-Коши, Ламе)

Баланс количества движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{K} - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Баланс кинетического момента:

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T}.$$

Закон Гука для линейно-упругого изотропного материала:

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} = k \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2\mu \operatorname{Dev} \boldsymbol{\varepsilon},$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S$  — тензор малых деформаций,  $\lambda$ ,  $\mu$  — постоянные Ламе ( $\mu > 0$ ,  $3\lambda + 2\mu \equiv 3k > 0$ ).

$$-c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + c_1^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}$$

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики**
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения

## Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$-c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + c_1^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\chi(t) \delta(\mathbf{r}) \mathbf{n},$$

Начальные условия  $\mathbf{u}|_{t < 0} \equiv 0$ , при этом предполагаем  $\chi|_{t < 0} \equiv 0$ .

$$\square \phi = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\psi} = \nabla \times \mathbf{u}:$$

$$\nabla \cdot : \quad \Delta \phi - c_1^{-2} \ddot{\phi} = -c_1^{-2} \chi(t) \nabla \cdot \mathbf{n} \delta(\mathbf{r})$$

$$\nabla \times : \quad \Delta \boldsymbol{\psi} - c_2^{-2} \ddot{\boldsymbol{\psi}} = -c_2^{-2} \chi(t) \nabla \times \mathbf{n} \delta(\mathbf{r})$$

$\Rightarrow$

$$\phi = c_1^{-2} \nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{4\pi r},$$

$$\boldsymbol{\psi} = c_2^{-2} \nabla \times \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r}$$

## Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} + c_1^2 \nabla \phi + \chi(t) \delta(\mathbf{r}) \mathbf{n}$$

$$\square \phi = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\psi} = \nabla \times \mathbf{u}:$$

$$\Delta \phi - c_1^{-2} \ddot{\phi} = -c_1^{-2} \chi(t) \nabla \cdot \mathbf{n} \delta(\mathbf{r})$$

$$\Delta \boldsymbol{\psi} - c_2^{-2} \ddot{\boldsymbol{\psi}} = -c_2^{-2} \chi(t) \nabla \times \mathbf{n} \delta(\mathbf{r})$$

$$\Rightarrow$$

$$\phi = c_1^{-2} \nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{4\pi r},$$

$$\boldsymbol{\psi} = c_2^{-2} \nabla \times \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r}$$

# Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} + c_1^2 \nabla \phi + \chi(t) \delta(\mathbf{r}) \mathbf{n}$$

$$\square \phi = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\psi} = \nabla \times \mathbf{u}:$$

$$\Delta \phi - c_1^{-2} \ddot{\phi} = -c_1^{-2} \chi(t) \nabla \cdot \mathbf{n} \delta(\mathbf{r})$$

$$\Delta \boldsymbol{\psi} - c_2^{-2} \ddot{\boldsymbol{\psi}} = -c_2^{-2} \chi(t) \nabla \times \mathbf{n} \delta(\mathbf{r})$$

$\Rightarrow$

$$\phi = c_1^{-2} \nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{4\pi r},$$

$$\boldsymbol{\psi} = c_2^{-2} \nabla \times \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r}$$

объемная деформация (дилатация)  
удвоенный вектор малого поворота

## Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} + c_1^2 \nabla \phi + \chi(t) \delta(\mathbf{r}) \mathbf{n}$$

$$\begin{aligned} c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{n}) \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} = (-\Delta \mathbf{n} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{n}) \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} = \\ &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} - \Delta \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} \mathbf{n} = \\ &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} + \chi(t) \delta(\mathbf{r}) \mathbf{n} - \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi c_2^2 r} \mathbf{n} \end{aligned}$$

## Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} + c_1^2 \nabla \phi + \cancel{\chi(t) \delta(\mathbf{r}) \mathbf{n}}$$

$$\begin{aligned} c_2^2 \nabla \times \boldsymbol{\psi} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{n}) \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} = (-\Delta \mathbf{n} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{n}) \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} = \\ &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} - \Delta \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} \mathbf{n} = \\ &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{n} \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi r} + \cancel{\chi(t) \delta(\mathbf{r}) \mathbf{n}} - \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{4\pi c_2^2 r} \mathbf{n} \end{aligned}$$

## Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{n} \cdot \nabla \nabla \left( \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{r} - \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{r} \right) + \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r} \mathbf{n}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\nabla \nabla \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} =$$

## Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{n} \cdot \nabla \nabla \left( \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{r} - \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{r} \right) + \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r} \mathbf{n}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\nabla \nabla \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} = \nabla \left( \left( \nabla \frac{1}{r} \right) \chi - \frac{\dot{\chi}}{cr} \hat{\mathbf{r}} \right) = \nabla \left( -\frac{\chi}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\dot{\chi}}{cr^2} \mathbf{r} \right)$$

## Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{n} \cdot \nabla \nabla \left( \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{r} - \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{r} \right) + \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r} \mathbf{n}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\nabla \nabla \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} = \nabla \left( \left( \nabla \frac{1}{r} \right) \chi - \frac{\dot{\chi}}{cr} \hat{\mathbf{r}} \right) = \nabla \left( -\frac{\chi}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\dot{\chi}}{cr^2} \mathbf{r} \right)$$

$$\stackrel{\nabla \mathbf{r} = \mathbf{I}}{=} \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr^2} \right) (3\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I})$$

## Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{n} \cdot \nabla \nabla \left( \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{r} - \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{r} \right) + \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r} \mathbf{n}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} &= \nabla \left( \left( \nabla \frac{1}{r} \right) \chi - \frac{\dot{\chi}}{cr} \hat{\mathbf{r}} \right) = \nabla \left( -\frac{\dot{\chi}}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\ddot{\chi}}{cr^2} \mathbf{r} \right) \\ &\stackrel{\nabla_{\mathbf{r}=\mathbf{I}}}{=} \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\dot{\chi}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr^2} \right) (3\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\pi\ddot{\mathbf{u}} &= \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r} ((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}) + \\ &\quad + \left( \frac{r\dot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1} - \frac{r\dot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2} + \chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right) - \chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right) \frac{((3\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n})}{r^3} \end{aligned}$$

## Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\rho\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r} ((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}) +$$

$$+ \left( \frac{r\dot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1} - \frac{r\dot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2} + \chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right) - \chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right) \frac{((3\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n})}{r^3}$$

$$\square z = \int_{r/c_1}^{r/c_2} \tau \chi(t - \tau) d\tau \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{z} = \frac{r\dot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1} - \frac{r\dot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2} + \chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right) - \chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)$$

## Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r} ((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}) +$$

$$+ \left( \frac{r\dot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1} - \frac{r\dot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2} + \chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right) - \chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right) \frac{((3\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n})}{r^3}$$

$$\mathbf{z} \Rightarrow \int_{r/a}^{r/b} \tau \chi(t-\tau) d\tau \Rightarrow \ddot{\mathbf{z}} = \int_{r/a}^{r/b} \tau \ddot{\chi}(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_{t-r/a}^{t-r/b} (t-\tau) d\dot{\chi} = \frac{r}{b} \dot{\chi}\left(t - \frac{r}{b}\right) - \frac{r}{a} \dot{\chi}\left(t - \frac{r}{a}\right) -$$

$$+ \int_{t-r/a}^{t-r/b} d\chi = \frac{r}{b} \dot{\chi}\left(t - \frac{r}{b}\right) - \frac{r}{a} \dot{\chi}\left(t - \frac{r}{a}\right) + \chi \Big|_{t-r/a}^{t-r/b}$$

## Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r} ((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}) +$$

$$+ \frac{d^2}{dt^2} \left( \int_{r/c_1}^{r/c_2} \tau \chi(t - \tau) d\tau \right) \frac{((3\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n})}{r^3}$$

## Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$4\pi\mathbf{u} = \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r} ((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}) +$$

$$+ \left( \int_{r/c_1}^{r/c_2} \tau \chi(t - \tau) d\tau \right) \frac{((3\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n})}{r^3}$$

## Фундаментальное решение уравнений эластодинамики

$$-c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + c_1^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\chi(t) \delta(\mathbf{r}) \mathbf{n}$$

Начальные условия:  $\mathbf{u}|_{t < 0} \equiv 0$ .

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r} ((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}) + \int_{r/c_1}^{r/c_2} \tau \chi(t - \tau) d\tau \frac{((3\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n})}{r^3} \right)$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики:  $\square \chi = \delta$

$$-c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + c_1^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\delta(t) \delta(\mathbf{r}) \mathbf{n}$$

Начальные условия:  $\mathbf{u}|_{t < 0} \equiv 0$ .

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r} ((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}) + \int_{r/c_1}^{r/c_2} \tau \delta(t - \tau) d\tau \frac{((3\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n})}{r^3} \right)$$

Фундаментальное решение уравнений эластодинамики:  $\square \chi = \delta$

$$-c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + c_1^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\delta(t) \delta(\mathbf{r}) \mathbf{n}$$

Начальные условия:  $\mathbf{u}|_{t < 0} \equiv 0$ .

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r} ((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n}) + t(H(t - r/c_1) - H(t - r/c_2)) \frac{((3\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{n})}{r^3} \right)$$

The basic singular solution of elastodynamics

## Тензор Стокса

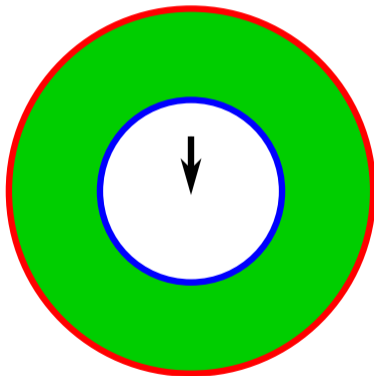
$$-c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + c_1^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\delta(t) \delta(\mathbf{r}) \mathbf{n}$$

Начальные условия:  $\mathbf{u}|_{t < 0} \equiv 0$ .

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r} \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} - \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r} (\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}) + t (H(t - r/c_1) - H(t - r/c_2)) \frac{3\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}}{r^3} \right) \cdot \mathbf{n}$$

## Тензор Стокса: характер волнового поля

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{c_1^2 r} \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{c_2^2 r} (\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}) + t(H(t - r/c_1) - H(t - r/c_2)) \frac{3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}}{r^3} \right) \cdot \mathbf{n}$$



$r = c_1 t$ : дилатация и сдвиг

$r = c_2 t$ : поворот и сдвиг

сдвиг

## Тензор Стокса: характер волнового поля

## Задача

Показать непосредственным вычислением, что дилатация и поворот между фронтами Р и S волн равны нулю:

- $\nabla \cdot \frac{3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}}{r^3} = \mathbf{0},$
- $\nabla \times \frac{3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}}{r^3} = \mathbf{0}.$

## Решение через потенциалы

$$-c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + c_1^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\chi(t) \delta(\mathbf{r}) \mathbf{n},$$

Начальные условия  $\mathbf{u}|_{t < 0} \equiv 0$ , при этом предполагаем  $\chi|_{t < 0} \equiv 0$ .

$$\square \mathbf{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi:$$

$$\Delta \Phi - c_1^{-2} \ddot{\Phi} = c_1^{-2} \chi(t) \nabla \cdot \frac{\mathbf{n}}{4\pi r}$$

$$\Delta \Psi - c_2^{-2} \ddot{\Psi} = -c_2^{-2} \chi(t) \nabla \times \frac{\mathbf{n}}{4\pi r}$$

$$\Rightarrow \square \Phi = \nabla \cdot \varphi \mathbf{n}, \quad \Psi = -\nabla \times \psi \mathbf{n}$$

$$\cancel{\nabla} : \quad \Delta \varphi - c_1^{-2} \ddot{\varphi} = c_1^{-2} \frac{\chi(t)}{4\pi r}, \quad \varphi|_{t < 0} \equiv 0;$$

$$\cancel{\nabla} : \quad \Delta \psi - c_2^{-2} \ddot{\psi} = c_2^{-2} \frac{\chi(t)}{4\pi r}, \quad \psi|_{t < 0} \equiv 0.$$

$$\Rightarrow \square \varphi = \frac{\varphi_0(r)}{4\pi r}, \quad \psi = \frac{\psi_0(r)}{4\pi r} :$$

$$\varphi_0'' - c_1^{-2} \ddot{\varphi}_0 = c_1^{-2} \chi(t), \quad \varphi_0|_{t < 0} \equiv 0;$$

$$\psi_0'' - c_2^{-2} \ddot{\psi}_0 = c_2^{-2} \chi(t), \quad \psi_0|_{t < 0} \equiv 0.$$

## Решение через потенциалы

$$\varphi = \frac{\varphi_0(r)}{4\pi r}, \quad \psi = \frac{\psi_0(r)}{4\pi r} :$$

$$\varphi_0'' - c_1^{-2} \ddot{\varphi}_0 = c_1^{-2} \chi(t), \quad \varphi_0|_{t < 0} \equiv 0;$$

$$\psi_0'' - c_2^{-2} \ddot{\psi}_0 = c_2^{-2} \chi(t), \quad \psi_0|_{t < 0} \equiv 0.$$

$$4\pi\varphi = \frac{1}{r} \left( \int_0^{t-r/c_1} \tau \chi(t-r/c_1-\tau) d\tau - \int_0^t \tau \chi(t-\tau) d\tau \right)$$

$$4\pi\psi = \frac{1}{r} \left( \int_0^{t-r/c_2} \tau \chi(t-r/c_2-\tau) d\tau - \int_0^t \tau \chi(t-\tau) d\tau \right)$$

$$\mathbf{u} = \nabla \nabla \cdot \varphi \mathbf{n} - \nabla \times (\nabla \times \psi \mathbf{n}) = \nabla \nabla \cdot (\varphi - \psi) \mathbf{n} + \Delta \psi \mathbf{n} =$$

$$\nabla \nabla \cdot \frac{\mathbf{n}}{4\pi r} \left( \int_0^{t-r/c_1} \tau \chi(t-r/c_1-\tau) d\tau - \int_0^{t-r/c_2} \tau \chi(t-r/c_2-\tau) d\tau \right) +$$

$$+ \frac{\chi(t-r/c_2) \mathbf{n}}{4\pi c_2^2 r}$$

и далее, упрощая полученное выражение, приходим к прежнему ответу (см. Achenbach).

## Решение через потенциалы

$$\varphi = \frac{\varphi_0(r)}{4\pi r}, \quad \psi = \frac{\psi_0(r)}{4\pi r} :$$

$$\varphi_0'' - c_1^{-2} \ddot{\varphi}_0 = c_1^{-2} \chi(t), \quad \varphi_0|_{t < 0} \equiv 0;$$

$$\psi_0'' - c_2^{-2} \ddot{\psi}_0 = c_2^{-2} \chi(t), \quad \psi_0|_{t < 0} \equiv 0.$$

$$4\pi\varphi = \frac{1}{r} \left( \int_0^{t-r/c_1} \tau \chi(t - r/c_1 - \tau) d\tau - \int_0^t \tau \chi(t - \tau) d\tau \right)$$

$$4\pi\psi = \frac{1}{r} \left( \int_0^{t-r/c_2} \tau \chi(t - r/c_2 - \tau) d\tau - \int_0^t \tau \chi(t - \tau) d\tau \right)$$

## Важный вывод

Для  $\chi(t)$ :  $\chi(t) \neq 0$  при  $t > 0$  потенциалы мгновенно становятся ненулевыми во всём  $\mathbb{R}^3$ , однако вне фронта  $r = c_1 t$  их вклад в перемещения равен нулю.

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$**
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения

Переход от волнового уравнения в  $\mathbb{R}^3$  к уравнению Гельмгольца

Рассмотрим волновое уравнение в гармоническом случае:

$$\Delta u - c^{-2}\ddot{u} = K(\mathbf{r}) \exp(-i\Omega t)$$

Здесь  $\Omega > 0$  — частота.

□  $u(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}; \Omega) \exp(-i\Omega t)$ : переходим к амплитудам.

Получим уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u + \kappa^2 u = K(\mathbf{r}), \quad \kappa \equiv \frac{\Omega}{c},$$

$\kappa$  — волновое число.

Физические смещения:  $\operatorname{Re} u$ .

## Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + \kappa^2 u = \delta(\mathbf{r})$$

Для  $r > 0$ :

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \kappa^2 u = 0 \quad \xrightarrow{u=v/r} \quad v_{rr} + \kappa^2 v = 0 \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{r}(C_+ \exp(i\kappa r) + C_- \exp(-i\kappa r))$$

Как найти  $C_{\pm}$ ?

# Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + \kappa^2 u = \delta(\mathbf{r})$$

Для  $r > 0$ :

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \kappa^2 u = 0 \quad \xrightarrow{u=v/r} \quad v_{rr} + \kappa^2 v = 0 \quad \implies \implies u = \frac{1}{r}(C_+ \exp(i\kappa r) + C_- \exp(-i\kappa r))$$

Вспоминая, что  $u(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}; \Omega) \exp(-i\Omega t)$  выбрасываем член, соответствующий волнам, приходящим с бесконечности:

$$u = \frac{C_+}{r} \exp i\kappa r$$

Как найти  $C_+$ ?

# Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + \kappa^2 u = \delta(\mathbf{r})$$

Для  $r > 0$ :

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \kappa^2 u = 0 \quad \xrightarrow{u=v/r} \quad v_{rr} + \kappa^2 v = 0 \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{r}(C_+ \exp(i\kappa r) + C_- \exp(-i\kappa r))$$

Вспоминая, что  $u(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}; \Omega) \exp(-i\Omega t)$  выбрасываем член, соответствующий волнам, приходящим с бесконечности:

$$u = \frac{C_+}{r} \exp i\kappa r$$

Для определения  $C_+$  подставляем разложение

$$u = \frac{C_+}{r}(1 + i\kappa r + \dots)$$

решения в окрестности нуля в исходное уравнение

# Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + \kappa^2 u = \delta(\mathbf{r})$$

Для  $r > 0$ :

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \kappa^2 u = 0 \quad \xrightarrow{u=v/r} \quad v_{rr} + \kappa^2 v = 0 \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{r}(C_+ \exp(i\kappa r) + C_- \exp(-i\kappa r))$$

Вспоминая, что  $u(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}; \Omega) \exp(-i\Omega t)$  выбрасываем член, соответствующий волнам, приходящим с бесконечности:

$$u = \frac{C_+}{r} \exp i\kappa r$$

Для определения  $C_+$  подставляем разложение

$$u = \frac{C_+}{r}(1 + i\kappa r + \dots)$$

решения в окрестности нуля в исходное уравнение  $\Rightarrow C_+ = -\frac{1}{4\pi}$ .

## Единственность решения и принцип предельного поглощения

$$\Delta u + \kappa^2 u = \delta(\mathbf{r})$$

$$u = -\frac{\exp i\kappa r}{4\pi r}$$

## Единственность решения и принцип предельного поглощения

$$\Delta u + \kappa^2 u = \delta(\mathbf{r})$$

$$u = -\frac{\exp i\kappa r}{4\pi r} + C \exp i\kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$$

Здесь  $\mathbf{n} = \text{const}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ .

Как быть с единственностью?

## Единственность решения и принцип предельного поглощения

$$\Delta u + \kappa^2 u = \delta(\mathbf{r})$$

$$u = -\frac{\exp i\kappa r}{4\pi r} + C \exp i\kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$$

Здесь  $\mathbf{n} = \text{const}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ .

## Принцип предельного поглощения

$\square \kappa = \text{Re } \kappa + i\epsilon$ ,  $\text{Re } \kappa > 0$ ,  $\epsilon > 0 \implies$  растущие при  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  решения должны быть выброшены

Поскольку для уравнения Гельмгольца  $\kappa = \frac{\Omega}{c}$ ,  $\Omega > 0$ , ППП может быть равносильно переформулирован так:

$\square \Omega = \text{Re } \Omega + i\epsilon$ ,  $\text{Re } \Omega > 0$ ,  $\epsilon > 0 \implies$  растущие при  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  решения должны быть выброшены.

## Физическая мотивация принципа предельного поглощения

Вернемся к исходному волнового уравнению...

$$\Delta u - c^{-2}\ddot{u} = K(\mathbf{r}) \exp(-i\Omega t)$$

$$\square u(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}; \Omega) \exp(-i\Omega t), \quad \Omega > 0.$$

Соответствующее уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u + \kappa^2 u = K(\mathbf{r}),$$

$$\kappa \equiv \frac{\Omega}{c}.$$

Выкидывая теперь растущие решения, приходим к ранее формально сформулированному ППП.

## Физическая мотивация принципа предельного поглощения

...и добавим в него малый диссипативный член. Получим телеграфное уравнение ( $\gamma > 0$ )

$$\Delta u - 2\gamma\dot{u} - c^{-2}\ddot{u} = K(\mathbf{r}) \exp(-i\Omega t)$$

$$\square u(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}; \Omega) \exp(-i\Omega t), \quad \Omega > 0.$$

Соответствующее уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u + \kappa^2 u = K(\mathbf{r}),$$

$$\kappa^2 \equiv \frac{\Omega^2}{c^2} + 2i\gamma\Omega.$$

При  $\gamma \rightarrow +0$  имеем  $\operatorname{Re} \kappa > 0$ ,  $\operatorname{Im} \kappa \rightarrow +0$ .

Выкидывая теперь растущие решения, приходим к ранее формально сформулированному ППП.

## Выводы

- Уравнение Гельмгольца представляет собой волновое уравнение в частотной области.
- ППП используется для уравнения Гельмгольца вместо условия  $u|_{t<0} \equiv 0$ , используемого для волнового уравнения, а именно, “отсекает” волны, приходящие из прошлого (с бесконечности).
- Переход от волнового уравнения к уравнению Гельмгольца  $\iff$  переходу от нестационарной к стационарной постановке задачи.
- Технически стационарные задачи существенно проще нестационарных, но надо правильно написать условия излучения (например, ППП).
- Для сред с дисперсией корректное написание условий излучения может быть непустой задачей.
- Если возникают сомнения, как правильно написать условия излучения, нужно от стационарной постановки вернуться к нестационарной.

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае**
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения

## Уравнения эластодинамики в гармоническом случае

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}(\mathbf{r}) \exp(-i\Omega t)$$

$$\square \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}; \Omega) \exp(-i\Omega t)$$

Здесь  $\Omega > 0$  — частота.

## Уравнения эластодинамики в гармоническом случае

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}(\mathbf{r}) \exp(-i\Omega t)$$

□  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}; \Omega) \exp(-i\Omega t)$ : переходим к амплитудам

Здесь  $\Omega > 0$  — частота.

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \Omega^2 \mathbf{u} = -\rho \mathbf{K}$$

Физические смещения:  $\text{Re } \mathbf{u}$

## Гармонические плоские волны

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

Плоские волны общего вида:  $\mathbf{u} = \mathbf{A}f(\theta)$ ,  $\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega t$

$f$  — форма волны (произвольная функция)

$\theta$  — фаза

$\mathbf{A}$  — векторная амплитуда

$\mathbf{k}$  — волновой вектор

## Гармонические плоские волны

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \Omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Гармонические плоские волны:  $\mathbf{u} = \mathbf{A} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(-i\Omega t)$

$f$  — форма волны:  $f(\theta) = \exp i\theta$

$\theta$  — фаза

$\mathbf{A}$  — векторная амплитуда

$\mathbf{k}$  — волновой вектор

$\Omega$  — частота

## Гармонические плоские волны

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \Omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Гармонические плоские волны:  $\mathbf{u} = \mathbf{A} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(-i\Omega t)$

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \nabla f \cdot \mathbf{A} = -\mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \mathbf{A},$$

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla f \mathbf{A} = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}.$$

Подставляя в уравнения эластодинамики, получаем задачу на собственные значения:

$$\left( (\lambda + \mu) \mathbf{k} \mathbf{k} + \mu (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{I} - \rho \Omega^2 \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Дисперсионное уравнение  $\Omega = \Omega(\mathbf{k})$ :

$$\det \left( (\lambda + \mu) \mathbf{k} \mathbf{k} + \mu (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{I} - \rho \Omega^2 \mathbf{I} \right) = 0.$$

## Гармонические плоские P &amp; S волны

$$\left( (\lambda + \mu) \mathbf{k} \mathbf{k} + \mu (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{I} - \rho \Omega^2 \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{A} \parallel \mathbf{k}$  — собственный вектор, если выполнено дисперсионное соотношение  $(\lambda + 2\mu) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \rho \Omega^2$ .  
Вычисляя по определению фазовую скорость и медленность, находим

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\Omega}{|\mathbf{k}|} \hat{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \hat{\mathbf{k}} \equiv c_1 \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{s} \equiv \Omega^{-1} \mathbf{k} = c_1^{-1} \hat{\mathbf{k}}.$$

Это **P** (Primary, продольные, растяжения-сжатия, дилатации) волны.

$\mathbf{A} \perp \mathbf{k}$  — собственный вектор, если выполнено дисперсионное соотношение  $\mu \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \rho \Omega^2$ . Вычисляя по определению фазовую скорость и медленность, находим

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\Omega}{|\mathbf{k}|} \hat{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \hat{\mathbf{k}} \equiv c_2 \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{s} \equiv \Omega^{-1} \mathbf{k} = c_2^{-1} \hat{\mathbf{k}}.$$

Это **S** (Secondary, поперечные, сдвига-вращения, искажения) волны.

# Скалярный потенциал и гармонические Р-волны

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \Omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

□ поле перемещений потенциально:

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi,$$

$\Phi$  — скалярный потенциал. Подставляя это представление в уравнения эластодинамики, получаем уравнение Гельмгольца

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\Delta \Phi + \kappa_1^2 \Phi) = 0,$$

$\kappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}$  — волновое число Р-волны.

## Пример

Плоской гармонической Р-волне

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} \exp(i\Omega \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}), \quad |\mathbf{s}| = c_1^{-1}$$

соответствует скалярный потенциал  $\Phi = (i\Omega)^{-1} \exp(i\Omega \mathbf{s} \cdot \mathbf{r})$ .

## Векторный потенциал и гармонические S-волны

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \Omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

□ поле перемещений соленоидально:

$$\mathbf{u} = \nabla \times \Psi,$$

$\Psi$  — векторный потенциал. Подставляя это представление в уравнения эластодинамики, получим векторное уравнение Гельмгольца

$$\mu \nabla \times (\Delta \Psi + \kappa_2^2 \Psi) = \mathbf{0},$$

$\kappa_2 = \frac{\Omega}{c_2}$  — волновое число S-волны.

## Пример

Плоской гармонической S-волне

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} \times \mathbf{m} \exp(i\Omega \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}), \quad |\mathbf{s}| = c_2^{-1}$$

соответствует векторный потенциал  $\Psi = (i\Omega)^{-1} \mathbf{m} \exp(i\Omega \mathbf{s} \cdot \mathbf{r})$ .

## Потенциалы: общий случай при наличии гармонических внешних сил

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \Omega^2 \mathbf{u} = -\rho \mathbf{K}$$

$$\square \mathbf{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi, \quad \mathbf{K} = \nabla X + \nabla \times \mathbf{Y}:$$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\Delta \Phi + \kappa_1^2 \Phi) + \mu \nabla \times (\Delta \Psi + \kappa_2^2 \Psi) = -\rho (\nabla X + \nabla \times \mathbf{Y}).$$

$$\iff \begin{aligned} \Delta \Phi + \kappa_1^2 \Phi &= -c_1^{-2} X, \\ \Delta \Psi + \kappa_2^2 \Psi &= -c_2^{-2} \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

В общем случае гармонические решения уравнений ЭД являются суммой гармонических P и S волн с волновыми числами  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  соответственно.

## Принцип предельного поглощения в эластодинамике

$\square \kappa_1 = \operatorname{Re} \kappa_1 + i\epsilon, \kappa_2 = \operatorname{Re} \kappa_2 + i\epsilon, \operatorname{Re} \kappa_{1,2} > 0, \epsilon > 0 \implies$  растущие при  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  решения должны быть выброшены.

Или, эквивалентно,  $\square \Omega = \operatorname{Re} \Omega + i\epsilon, \operatorname{Re} \Omega > 0, \epsilon > 0 \implies$  растущие при  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  решения должны быть выброшены.

- 1 Метод характеристик для гиперболических уравнений
- 2 Необходимые сведения из математического анализа
- 3 Начальные сведения об обобщенных функциях
- 4 Прямое произведение и свёртка обобщенных функций
- 5 Фундаментальное решение и обобщенная задача Коши для линейного ODE
- 6 Одномерное волновое уравнение: фундаментальное решение, обобщенная задача Коши, простейшие задачи
- 7 Соотношения на разрывах: условия Гюгонио, энтропийный критерий Дафермоса
- 8 Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье
- 9 Струна на вязко-упругом основании. Уравнение Клейна-Гордона, телеграфное уравнение: фундаментальное решение
- 10 Метод стационарной фазы
- 11 Уравнение Клейна-Гордона: групповая скорость
- 12 Системы со смешанным спектром: понятие о локализованных модах колебаний (trapped modes)
- 13 Уравнения Лапласа (Пуассона)
- 14 Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$
- 15 Уравнения эластодинамики; P и S волны
- 16 Фундаментальное решение уравнений эластодинамики
- 17 Уравнение Гельмгольца в  $\mathbb{R}^3$
- 18 Уравнения эластодинамики в гармоническом случае
- 19 Центр дилатации (расширения) и центр вращения**

## Потенциалы: общий случай при наличии внешних сил

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = -\rho \mathbf{K}$$

$$\square \mathbf{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi, \quad \mathbf{K} = \nabla X + \nabla \times \mathbf{Y}:$$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\Delta \Phi - c_1^{-2} \ddot{\Phi}) + \mu \nabla \times (\Delta \Psi - c_2^{-2} \ddot{\Psi}) = -\rho (\nabla X + \nabla \times \mathbf{Y}).$$

$$\Leftarrow \begin{aligned} \Delta \Phi - c_1^{-2} \ddot{\Phi} &= -c_1^{-2} X, \\ \Delta \Psi - c_2^{-2} \ddot{\Psi} &= -c_2^{-2} \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

В общем случае решения уравнений ЭД являются суммой Р и S волн, распространяющихся со скоростями  $c_1$  и  $c_2$  соответственно.

## Центр дилатации

$$-\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = -\rho \chi(t) \nabla \delta(\mathbf{r})$$

Начальные условия:  $\mathbf{u}|_{t < 0} \equiv 0$ .

$$\mathbf{u} = \dots$$

## Центр дилатации

$$-\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = -\rho \chi(t) \nabla \delta(\mathbf{r})$$

Начальные условия:  $\mathbf{u}|_{t < 0} \equiv 0$ .

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi c_1^2} \nabla \left( \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{r} \right)$$

Центр дилатации создает только Р-волны.

Центр дилатации в гармоническом случае:  $\chi(t) = \exp(-i\Omega t)$

$$-\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \Omega^2 \mathbf{u} = -\rho \nabla \delta(\mathbf{r})$$

Начальные условия:  $\mathbf{u}|_{t < 0} \equiv 0$ .

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi c_1^2} \nabla \left( \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right)}{r} \right) = \frac{1}{4\pi c_1^2} \nabla \left( \frac{\exp i(\chi_1 r - \Omega t)}{r} \right), \quad \chi_1 = \frac{\Omega}{c_1}.$$

Центр дилатации создает только Р-волны.

Центр дилатации в гармоническом случае:  $\chi(t) = \exp(-i\Omega t)$

$$-\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \Omega^2 \mathbf{u} = -\rho \nabla \delta(\mathbf{r})$$

ППП:  $\Omega = \text{Re } \Omega + i\tilde{\epsilon}$ ,  $\tilde{\epsilon} > 0 \implies$  растущие решения выбрасываем.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla \Phi, \\ \Delta \Phi + \kappa_1^2 \Phi &= c_1^{-2} \delta(\mathbf{r}), \\ \kappa_1 &= \frac{\Omega}{c_1}, \\ \mathbf{u} &= \frac{1}{4\pi c_1^2} \nabla \left( \frac{\exp i\kappa_1 r}{r} \right) \equiv \frac{1}{4\pi c_1^2} \nabla \tilde{f}_1, \end{aligned}$$

Центр дилатации создает только Р-волны.

Центр вращения (вокруг  $\mathbf{n}$ )

$$-\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = -\rho \chi(t) \nabla \times \delta(\mathbf{r}) \mathbf{n}$$

Начальные условия:  $\mathbf{u}|_{t < 0} \equiv 0$ .

$$\mathbf{u} = \dots$$

Центр вращения (вокруг  $\mathbf{n}$ )

$$-\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = -\rho \chi(t) \nabla \times \delta(\mathbf{r}) \mathbf{n}$$

Начальные условия:  $\mathbf{u}|_{t < 0} \equiv 0$ .

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi c_2^2} \nabla \times \left( \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{r} \right) \mathbf{n}$$

Центр вращения создает только S-волны.

Центр вращения (вокруг  $\mathbf{n}$ ) в гармоническом случае:  $\chi(t) = \exp(-i\Omega t)$

$$-\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \Omega^2 \mathbf{u} = -\rho \nabla \times \delta(\mathbf{r}) \mathbf{n}$$

Начальные условия:  $\mathbf{u}|_{t < 0} \equiv 0$ .

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi c_2^2} \nabla \times \left( \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right)}{r} \right) \mathbf{n} = \frac{1}{4\pi c_2^2} \nabla \times \left( \frac{\exp i(\kappa_2 r - \Omega t)}{r} \right) \mathbf{n}, \quad \kappa_2 = \frac{\Omega}{c_2}.$$

Центр вращения создает только S-волны.

Центр вращения (вокруг  $\mathbf{n}$ ) в гармоническом случае:  $\chi(t) = \exp(-i\Omega t)$

$$-\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \Omega^2 \mathbf{u} = -\rho \nabla \times \delta(\mathbf{r}) \mathbf{n}$$

ППП:  $\Omega = \text{Re } \Omega + i\tilde{\epsilon}$ ,  $\tilde{\epsilon} > 0 \implies$  растущие решения выбрасываем.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla \times \Psi, \\ \Delta \Psi + \kappa_2^2 \Psi &= c_2^{-2} \delta(\mathbf{r}) \mathbf{n}, \\ \kappa_2 &= \frac{\Omega}{c_2}, \\ \mathbf{u} &= \frac{1}{4\pi c_2^2} \nabla \times \left( \frac{\exp i\kappa_2 r}{r} \right) \mathbf{n} \equiv \frac{1}{4\pi c_2^2} \nabla \times \mathbf{f}_2 \mathbf{n}, \end{aligned}$$

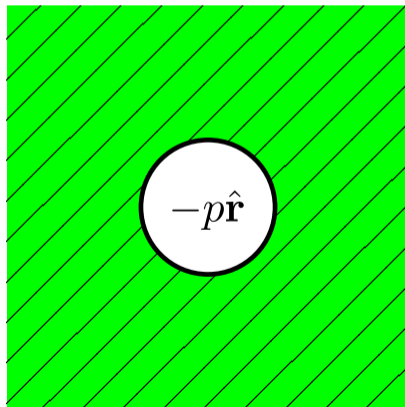
Центр вращения создает только S-волны.

## Сферически-симметричный излучатель

$$-\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \Omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad r > r_0;$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -p \hat{\mathbf{r}}, \quad r = r_0.$$

ППП:  $\Omega = \text{Re } \Omega + i\tilde{\epsilon}$ ,  $\tilde{\epsilon} > 0 \implies$  растущие решения выбрасываем.



## Сферически-симметричный излучатель

$$-\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \Omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad r > r_0;$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -p \hat{\mathbf{r}}, \quad r = r_0.$$

ППП:  $\Omega = \text{Re } \Omega + i\tilde{\epsilon}$ ,  $\tilde{\epsilon} > 0 \implies$  растущие решения выбрасываем.

Ищем решение в виде

$$\mathbf{u} = C \nabla \left( \frac{\exp i\kappa_1 r}{r} \right) \equiv C \nabla \hat{\mathbf{f}}_1, \quad \kappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}.$$

Выражение для вектора напряжений по площадке с нормалью  $\mathbf{n}$ 

$$\mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + \mu\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} + \mu\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}\nabla = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} + \mu\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}).$$

## Сферически-симметричный излучатель

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -p\hat{\mathbf{r}}, \quad r = r_0.$$

$$\mathbf{u} = C\nabla\left(\frac{\exp i\kappa_1 r}{r}\right) \equiv C\nabla\hat{\mathbf{f}}_1, \quad \kappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}.$$

## Сферически-симметричный излучатель

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -p\hat{\mathbf{r}}, \quad r = r_0.$$

$$\mathbf{u} = C\nabla\left(\frac{\exp i\kappa_1 r}{r}\right) \equiv C\nabla f_1, \quad \kappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}.$$

Подставляем в граничное условие:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} + \mu\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = C\hat{\mathbf{r}} \cdot (\lambda\Delta\mathbf{I} + 2\mu\nabla\nabla)f_1 = -p\hat{\mathbf{r}}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c^2r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}),$$

$$\nabla\nabla f_1 =$$

# Сферически-симметричный излучатель

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -p\hat{\mathbf{r}}, \quad r = r_0.$$

$$\mathbf{u} = C\nabla\left(\frac{\exp i\kappa_1 r}{r}\right) \equiv C\nabla f_1, \quad \kappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}.$$

Подставляем в граничное условие:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} + \mu\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = C\hat{\mathbf{r}} \cdot (\lambda\Delta\mathbf{I} + 2\mu\nabla\nabla)f_1 = -p\hat{\mathbf{r}}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{\ddot{\chi}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{c^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\chi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}),$$

$$\nabla\nabla f_1 = \left(-\kappa_1^2\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{i\kappa_1}{r}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I})\right)f_1,$$

$$\chi = \exp\left(-i\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right), \quad -i\Omega = -i\kappa c$$

## Сферически-симметричный излучатель

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -p\hat{\mathbf{r}}, \quad r = r_0.$$

$$\mathbf{u} = C\nabla\left(\frac{\exp i\kappa_1 r}{r}\right) \equiv C\nabla\hat{\mathbf{f}}_1, \quad \kappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}.$$

Подставляем в граничное условие:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} + \mu\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = C\hat{\mathbf{r}} \cdot (\lambda\Delta\mathbf{I} + 2\mu\nabla\nabla)\hat{\mathbf{f}}_1 = -p\hat{\mathbf{r}}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c^2 r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}),$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla\nabla\hat{\mathbf{f}}_1 = \left(-\kappa_1^2 + 2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{i\kappa_1}{r}\right)\right)\hat{\mathbf{f}}_1\hat{\mathbf{r}},$$

# Сферически-симметричный излучатель

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -p\hat{\mathbf{r}}, \quad r = r_0.$$

$$\mathbf{u} = C\nabla\left(\frac{\exp i\kappa_1 r}{r}\right) \equiv C\nabla\hat{\mathbf{f}}_1, \quad \kappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}.$$

Подставляем в граничное условие:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} + \mu\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = C\hat{\mathbf{r}} \cdot (\lambda\Delta\mathbf{I} + 2\mu\nabla\nabla)\hat{\mathbf{f}}_1 = -p\hat{\mathbf{r}}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c^2r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}),$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla\nabla\hat{\mathbf{f}}_1 = \left(-\kappa_1^2 + 2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{i\kappa_1}{r}\right)\right)\hat{\mathbf{f}}_1\hat{\mathbf{r}},$$

$$\Delta\hat{\mathbf{f}}_1 =$$

# Сферически-симметричный излучатель

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -p\hat{\mathbf{r}}, \quad r = r_0.$$

$$\mathbf{u} = C\nabla\left(\frac{\exp i\kappa_1 r}{r}\right) \equiv C\nabla\hat{\mathbf{f}}_1, \quad \kappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}.$$

Подставляем в граничное условие:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} + \mu\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = C\hat{\mathbf{r}} \cdot (\lambda\Delta\mathbf{I} + 2\mu\nabla\nabla)\hat{\mathbf{f}}_1 = -p\hat{\mathbf{r}}$$

$$\nabla\nabla\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{\ddot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c^2r}\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right)(3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}),$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla\nabla\hat{\mathbf{f}}_1 = \left(-\kappa_1^2 + 2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{i\kappa_1}{r}\right)\right)\hat{\mathbf{f}}_1\hat{\mathbf{r}},$$

$$\Delta\hat{\mathbf{f}}_1 = -\kappa_1^2\hat{\mathbf{f}}_1$$

## Сферически-симметричный излучатель

$$\mathbf{u} = C \nabla \left( \frac{\exp i\kappa_1 r}{r} \right) \equiv C \nabla \mathbf{f}_1, \quad \kappa_1 = \frac{\Omega}{c_1}.$$

Подставляем в граничное условие:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = C \hat{\mathbf{r}} \cdot (\lambda \Delta \mathbf{I} + 2\mu \nabla \nabla) \mathbf{f}_1 = -p \hat{\mathbf{r}},$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla \nabla \mathbf{f}_1 = \left( -\kappa_1^2 + 2 \left( \frac{1}{r^2} - \frac{i\kappa_1}{r} \right) \right) \mathbf{f}_1 \hat{\mathbf{r}},$$

$$\Delta \mathbf{f}_1 = -\kappa_1^2 \mathbf{f}_1,$$

$$\frac{C}{r_0^2} \left( -(\lambda + 2\mu) \kappa_1^2 r_0^2 + 4\mu(1 - i\kappa_1 r_0) \right) \mathbf{f}_1 = -p,$$

$$C = \frac{-p r_0^3 \exp(-i\kappa_1 r_0)}{-(\lambda + 2\mu) \kappa_1^2 r_0^2 + 4\mu(1 - i\kappa_1 r_0)}$$

## Центр расширения как предельный случай сферически симметричного излучателя

$$\mathbf{u} = \frac{-pr_0^3 \exp(-ix_1 r_0)}{-(\lambda + 2\mu)x_1^2 r_0^2 + 4\mu(1 - ix_1 r_0)} \nabla \left( \frac{\exp ix_1 r}{r} \right)$$

$$\square x_1 r_0 = \frac{\Omega r_0}{c_1} \rightarrow 0.$$

$$\square pr_0^3 \rightarrow -\frac{4\mu}{4\pi c_1^2} \text{ при } x_1 r_0 = \frac{\Omega r_0}{c_1} \rightarrow 0.$$

Тогда в пределе получим решение, соответствующее центру расширения:

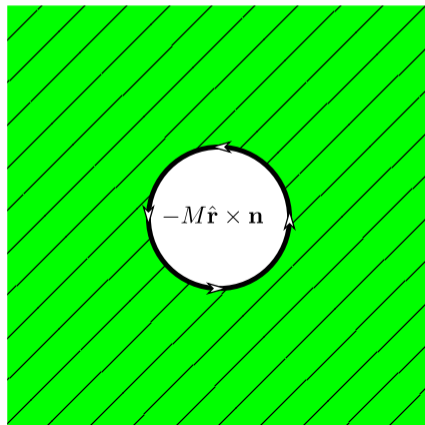
$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi c_1^2} \nabla \left( \frac{\exp ix_1 r}{r} \right)$$

## Вращательный излучатель

$$-\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \Omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad r > r_0;$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -M \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{n}, \quad r = r_0.$$

ППП:  $\Omega = \text{Re } \Omega + i\tilde{\epsilon}$ ,  $\tilde{\epsilon} > 0 \implies$  растущие решения выбрасываем.



## Вращательный излучатель

$$-\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \Omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad r > r_0;$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -M \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{n}, \quad r = r_0.$$

ППП:  $\Omega = \text{Re } \Omega + i\tilde{\epsilon}$ ,  $\tilde{\epsilon} > 0 \implies$  растущие решения выбрасываем.

Ищем решение в виде

$$\mathbf{u} = C \nabla \times \left( \frac{\exp i\kappa_2 r}{r} \right) \mathbf{n} \equiv C \nabla \times \hat{\mathbf{f}}_2 \mathbf{n}, \quad \kappa_2 = \frac{\Omega}{c_2},$$

$$\mathbf{T} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla),$$

$$\nabla \nabla \frac{\chi \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} = \frac{\ddot{\chi} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\chi \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{c r^2} \right) (3\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}),$$

$$\nabla \nabla \hat{\mathbf{f}}_2 = \left( -\kappa_1^2 \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{1}{r^2} - \frac{i\kappa_1}{r} \right) (3\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}) \right) \hat{\mathbf{f}}_2.$$

## Вращательный излучатель

$$-\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \Omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad r > r_0;$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -M \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{n}, \quad r = r_0.$$

ППП:  $\Omega = \text{Re } \Omega + i\tilde{\epsilon}$ ,  $\tilde{\epsilon} > 0 \implies$  растущие решения выбрасываем.

Ищем решение в виде

$$\mathbf{u} = C \nabla \times \left( \frac{\exp i\kappa_2 r}{r} \right) \mathbf{n} \equiv C \nabla \times \hat{\mathbf{f}}_2 \mathbf{n}, \quad \kappa_2 = \frac{\Omega}{c_2},$$

$$\mathbf{T} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla),$$

$$\nabla \nabla \frac{\chi \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} = \frac{\ddot{\chi} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\chi \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} + \frac{\dot{\chi} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{c r^2} \right) (3\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}),$$

$$\nabla \nabla \hat{\mathbf{f}}_2 = \left( -\kappa_1^2 \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{1}{r^2} - \frac{i\kappa_1}{r} \right) (3\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}) \right) \hat{\mathbf{f}}_2.$$

## Задача

Найти константу  $C$ .

## Сосредоточенная сила в гармоническом случае

Переходим к амплитудам:

$$-c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + c_1^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \Omega^2 \mathbf{u} = -\delta(\mathbf{r}) \mathbf{n},$$

ППП:  $\Omega = \text{Re } \Omega + i\tilde{\epsilon}$ ,  $\tilde{\epsilon} > 0 \implies$  растущие решения выбрасываем.

## Сосредоточенная сила в гармоническом случае

Переходим к амплитудам:

$$-c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + c_1^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \Omega^2 \mathbf{u} = -\delta(\mathbf{r}) \mathbf{n},$$

ППП:  $\Omega = \text{Re } \Omega + i\tilde{\epsilon}$ ,  $\tilde{\epsilon} > 0 \implies$  растущие решения выбрасываем.

### Задача

Показать, что поле от сосредоточенной силы выражается формулой

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{n} \cdot \nabla \nabla (\hat{f}_2 - \hat{f}_1) + \kappa_2^2 \hat{f}_2 \mathbf{n}}{4\pi \Omega^2}, \quad \hat{f}_{1,2} = \frac{\exp i\kappa_{1,2} r}{r}$$

### Задача

Показать, что для решения задачи о сосредоточенной силе справедлива асимптотическая оценка

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\hat{f}_1}{c_1^2} \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} - \frac{\hat{f}_2}{c_2^2} (\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{I}) \right) \cdot \mathbf{n} + O(\kappa_1^{-2} r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty.$$

## Поле подвижного источника: потенциалы Лиенара-Вихерта

$$\begin{cases} -\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = -\rho \chi(t) \nabla \delta(\mathbf{r} - \ell(t)) \\ -\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = -\rho \chi(t) \nabla \times \delta(\mathbf{r} - \ell(t)) \mathbf{n} \end{cases}$$

Начальные условия:  $\mathbf{u}|_{t < 0} \equiv 0$ .

Переходя к потенциалам, получим:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi - c_1^{-2} \ddot{\Phi} &= -c_1^{-2} \chi(t) \delta(\mathbf{r} - \ell(t)), \\ \Delta \Psi - c_2^{-2} \ddot{\Psi} &= -c_2^{-2} \chi(t) \delta(\mathbf{r} - \ell(t)) \mathbf{n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{\delta(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c_1})}{4\pi|\mathbf{r}|} * (-c_1^{-2} \chi(t) \delta(\mathbf{r} - \ell(t))), \\ \Psi &= -\frac{\delta(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c_2})}{4\pi|\mathbf{r}|} * (-c_2^{-2} \chi(t) \delta(\mathbf{r} - \ell(t)) \mathbf{n}), \end{aligned}$$

## Поле подвижного источника: потенциалы Лиенара-Вихерта

$$\begin{aligned}
 \Phi &= -\frac{\delta(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c_1})}{4\pi|\mathbf{r}|} * (-c_1^{-2}\chi(t)\delta(\mathbf{r} - \ell(t))) = \\
 &= \frac{1}{4\pi c_1^2} \iiint \chi(\tau)\delta(x - \ell(\tau)) \frac{\delta(t - \tau - \frac{|\mathbf{r}-x|}{c_1})}{|\mathbf{r}-x|} d\tau dx = \\
 &= \frac{1}{4\pi c_1^2} \int_0^t \chi(\tau) \frac{\delta(t - \tau - \frac{|\mathbf{r}-\ell(\tau)|}{c_1})}{|\mathbf{r}-\ell(\tau)|} d\tau =
 \end{aligned}$$

$$\delta(f(\tau)) = \sum_i \frac{1}{|f'(\tau_i)|} \delta(\tau - \tau_i)$$

## Поле подвижного источника: потенциалы Лиенара-Вихерта

$$\begin{aligned}
 \Phi &= -\frac{\delta(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c_1})}{4\pi|\mathbf{r}|} * (-c_1^{-2}\chi(t)\delta(\mathbf{r} - \ell(t))) = \\
 &= \frac{1}{4\pi c_1^2} \iiint \chi(\tau)\delta(x - \ell(\tau)) \frac{\delta(t - \tau - \frac{|\mathbf{r}-x|}{c_1})}{|\mathbf{r}-x|} d\tau dx = \\
 &= \frac{1}{4\pi c_1^2} \int_0^t \chi(\tau) \frac{\delta(t - \tau - \frac{|\mathbf{r}-\ell(\tau)|}{c_1})}{|\mathbf{r}-\ell(\tau)|} d\tau =
 \end{aligned}$$

$$\delta(f(\tau)) = \sum_i \frac{1}{|f'(\tau_i)|} \delta(\tau - \tau_i)$$

$$\square \tau_i + \frac{|\mathbf{r} - \ell(\tau_i)|}{c_1} = t:$$

## Поле подвижного источника: потенциалы Лиенара-Вихерта

$$\begin{aligned}
 \Phi &= -\frac{\delta(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c_1})}{4\pi|\mathbf{r}|} * (-c_1^{-2}\chi(t)\delta(\mathbf{r} - \ell(t))) = \\
 &= \frac{1}{4\pi c_1^2} \iiint \chi(\tau)\delta(x - \ell(\tau)) \frac{\delta(t - \tau - \frac{|\mathbf{r}-x|}{c_1})}{|\mathbf{r}-x|} d\tau dx = \\
 &= \frac{1}{4\pi c_1^2} \int_0^t \chi(\tau) \frac{\delta(t - \tau - \frac{|\mathbf{r}-\ell(\tau)|}{c_1})}{|\mathbf{r}-\ell(\tau)|} d\tau = \frac{1}{4\pi c_1^2} \sum_i \frac{\chi(\tau_i)}{\left| \mathbf{r} - \ell(\tau_i) + \frac{(\mathbf{r}-\ell(\tau_i)) \cdot \dot{\ell}(\tau_i)}{c_1} \right|}
 \end{aligned}$$

$$\delta(f(\tau)) = \sum_i \frac{1}{|f'(\tau_i)|} \delta(\tau - \tau_i)$$

$$\square \tau_i + \frac{|\mathbf{r} - \ell(\tau_i)|}{c_1} = t:$$

$$(|r - \ell(\tau)|)'_{\tau} = \left( \sqrt{(\mathbf{r} - \ell(\tau)) \cdot (\mathbf{r} - \ell(\tau))} \right)'_{\tau} = \frac{1}{2} \frac{2(\mathbf{r} - \ell(\tau)) \cdot \dot{\ell}}{\sqrt{(\mathbf{r} - \ell(\tau)) \cdot (\mathbf{r} - \ell(\tau))}} = \widehat{(\mathbf{r} - \ell(\tau))} \cdot \dot{\ell}$$