2 Начально–краевые задачи для параболических уравнений

2.1 Постановка начально-краевых задач

1. **Линейные параболические уравнения 2-го порядка**

   Мы будем рассмаривать PDE вида

   $$\partial_t u - \operatorname{div}\big(a(x,t)\nabla u\big) + b(x,t)\cdot\nabla u + c(x,t)u \;=\; f(x,t) \quad \text{в} \quad Q_T$$

   Здесь $u : Q_T \to \mathbb{R}$ — неизвестная функция, а функция $f : Q_T \to \mathbb{R}$ и коэффициенты a_{jk}, b_j, $c : Q_T \to \mathbb{R}$ считаются заданными.

2. **Уловия на коэффициенты дифференциального оператора**

   На протяжении всего нашего курса мы всегда будем считать, что следующие условия выполняются по умолчанию:

   - $a(x,t) := (a_{jk}(x,t))$ — симметричная вещественная $n \times n$-матрица, удовлетворяющая условию равномерной эллиптичности:

     $$a_{jk} = a_{kj}, \qquad a_{jk} \in L_\infty(Q_T),$$

   - $b(x,t) := (b_j(x,t))$ — вещественный n–мерный вектор, $c(x,t)$ — скалярная функция:

     $$b_j \in L_\infty(Q_T), \qquad c \in L_\infty(Q_T)$$

   - $\nu_1 > 0$ — мажоранта L_∞–норм коэффициентов:

     $$\|a\|_{L_\infty(Q_T)} \;+\; \|b\|_{L_\infty(Q_T)} \;+\; \|c\|_{L_\infty(Q_T)} \;\le\; \nu_1,$$

3. **Условие равномерной параболичности**

   Мы будем использовать следующие обозначения для дифференциальных операторов:

   $$\mathcal{L}u := -\operatorname{div}(a\nabla u) + b\cdot\nabla u + cu, \qquad \mathcal{M}u := \partial_t u + \mathcal{L}u$$

   На протяжении всего курса мы будем считать выполнненным следующее условие:

   $$\exists\ \nu_0 > 0 : \quad a_{jk}(x,t)\xi_j\xi_k \ge \nu_0|\xi|^2, \qquad \text{п.в.} \quad (x,t)\in Q_T, \quad \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

   При выполнении этого условия дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ при п.в. $t\in(0,T)$ является равномерно эллиптическим в Ω. В этом случае соответствующий ему дифференциальный оператор $\mathcal{M} = \partial_t + \mathcal{L}$ наз. *равномерно параболическим* в Q_T.

4. **Начально-краевые задачи для параболических уравнений**

Чтобы данные задачи определяли решение u однозначно, нам необходимо дополнить уравнение краевыми и начальными условиями. В нашем курсе мы всегда будем рассматривать однородные краевые условия. Начальное данное $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ считается заданной функцией. Мы будем использовать следующую терминологию:

- первая начально-краевая задача

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u + \mathcal{L}u &=& f \quad \text{в} \quad Q_T \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} &=& 0 \\ u|_{t=0} &=& u_0 \end{array} \right.$$

- вторая начально-краевая задача

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u + \mathcal{L}u &=& f \quad \text{в} \quad Q_T \\ (a\nabla u)\cdot\nu|_{\partial\Omega\times(0,T)} &=& 0 \\ u|_{t=0} &=& u_0 \end{array} \right.$$

- третья начально-краевая задача, $\sigma : \partial\Omega\times(0,T) \to \mathbb{R}$ — заданная функция

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u + \mathcal{L}u &=& f \quad \text{в} \quad Q_T \\ \Big((a\nabla u)\cdot\nu + \sigma u\Big)\Big|_{\partial\Omega\times(0,T)} &=& 0 \\ u|_{t=0} &=& u_0 \end{array} \right.$$

5. **Классические решения**

Определение. Пусть a_{ij}, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$, b_i, $c \in C(Q_T)$, $u_0 \in C(\bar{\Omega})$, $f \in C(Q_T)$. *Классическим решением* задачи

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u + \mathcal{L}u &=& f \quad \text{в} \quad Q_T \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} &=& 0 \\ u|_{t=0} &=& u_0 \end{array} \right.$$

наз. функция $u \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$, удовлетворяющая данным соотношениям поточечно.

2.2 Слабые решения

1. **Билинейая форма, соответствующая оператору $\mathcal{L}$**

   Определение. Определим на пространстве $W_2^{1,0}(Q_T)$ билинейную форму

$$\mathcal{L}[u,\eta] \ := \int\limits_{Q_T} \Big(a\nabla u\cdot\nabla\eta + b\cdot\nabla u\,\eta + cu\eta \Big) dxdt, \qquad u,\eta\in W_2^{1,0}(Q_T).$$

2. **Определение обобщенного решения**

   Определение. Пусть $u_0\in L_2(\Omega)$, $f\in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$. *Обобщенным* (или *слабым*) решением задачи

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u \ = \ f \quad \text{в} \quad Q_T \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} \ = \ 0 \\ u|_{t=0} \ = \ u_0 \end{cases} \tag{$*$}$$

   называется функция $u\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$-\int\limits_{Q_T} u\partial_t\eta\; dxdt \ + \ \mathcal{L}[u,\eta] \ = \ \int\limits_{\Omega} u_0(x)\eta(x,0)\; dx \ + \ \int\limits_0^T \langle f(t),\eta(t)\rangle\; dt, \tag{$**$}$$
$$\forall\ \eta\in W_2^{1,1}(Q_T), \quad \text{таких, что} \quad \eta|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0, \quad \eta|_{t=T}=0.$$

3. **Эквивалентные определения обобщенных решений**

   Приведенное выше определение обобщенного решения использует минимум информации о гладкости функции u (краевое условие понимается в смысле теории следов, а начальное условие включено в интегральное тождество, поскольку функции класса $W_2^{1,0}(Q_T)$ не имеют следов на поверхностях $t=$ const). Такое определение удобно для доказательства теорем существования (необходимо проверять минимум условий).

   Однако оказывается, что всякое обобщенное решение в смысле данного нами определения обладает рядом дополнительных свойств. Поэтому мы можем дать эквивалентное определение обобщенного решения задачи $(*)$. В этом эквивалентном определении собрана "максимальная" информация, которую мы можем получить для обобщенных решений автоматически, без каких либо дополнительных предположений о гладкости данных задачи.

4. **Свойства обобщенных решений**

   Теорема. Пусть $u_0\in L_2(\Omega)$, $f\in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$. Следующие условия эквивалентны:

   1) функция $u\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ является обобщенным решением задачи $(*)$

2) функция $u \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$ удовлетвояет соотношению

$$-\int\limits_0^T (u(t),w)\xi'(t)\,dt + \int\limits_0^T \Big(\big(a(t)\nabla u(t),\nabla w\big) + \big(b(t)\cdot\nabla u(t) + c(t)u(t),w\big)\Big)\xi(t)\,dt \ = $$

$$= \ (u_0,w)\xi(0) \ + \ \int\limits_0^T \langle f(t),w\rangle \xi(t)\,dt,$$

$$\forall\ w\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega), \qquad \forall\, \xi\in W^1_2(0,T): \qquad \xi(T)=0.$$

Напомним, что $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$.

3) функция u принадлежит классу

$$u \ \in \ C([0,T];L_2(\Omega)) \ \cap \ L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)),$$
$$\partial_t u \ \in \ L_2(0,T;W^{-1}_2(\Omega))$$

для любой $w\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ при п.в. $t\in(0,T)$ выполняется тождество

$$\langle \partial_t u(t),w\rangle \ + \int\limits_\Omega \Big(a(t)\nabla u(t)\cdot\nabla w + b(t)\cdot\nabla u(t)\,w + c(t)u(t)w\Big)\,dx \ = \ \langle f(t),w\rangle$$

$u(x,0)=u_0(x)$ п.в. $x\in\Omega$

Доказательство.

1. Докажем 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $w\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и $\xi\in W^1_2(0,T)$, $\xi(T)=0$. Положим

$$\eta(x,t) := w(x)\xi(t).$$

Заметим что $\eta\in W^{1,1}_2(Q_T)$, $\eta|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0$, $\eta|_{t=0}=0$. Подставляя η в соотношение $(**)$, получаем 2).

2. Докажем 2) $\Longrightarrow$ 3). Обозначим $f_0 := f - \mathcal{L}u$. Тогда

$$f_0\in L_2(0,T;W^{-1}_2(\Omega)),$$

и для любого $w\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$

$$\langle f_0(t),w\rangle \ = \ \langle f(t),w\rangle - (a(t)\nabla u(t),\nabla w) - (b(t)\cdot\nabla u(t),w) - (c(t)u(t),w)$$

Нетрудно видеть, что

$$\|f_0\|_{L_2(0,T;W^{-1}_2(\Omega))} \ \le \ \|f\|_{L_2(0,T;W^{-1}_2(\Omega))} + c\,\|u\|_{W^{1,0}_2(Q_T)}$$

Из 2) вытекает соотношение

$$-\int_0^T (u(t),w)\xi'(t)\,dt \;=\; (u_0,w)\xi(0) \;+\; \int_0^T \langle f_0(t),w\rangle\xi(t)\,dt,$$

$$\forall\, w\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\quad \forall\,\xi\in W_2^1(0,T):\quad \xi(T)=0.$$

которое из теоремы §1.3, п.4 означает, что

$$\exists\, \partial_t u = f_0 \;\in\; L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$$

и

$$\forall\, w\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\qquad \langle\partial_t u(t),w\rangle=\langle f_0(t),w\rangle,\qquad \text{п.в.}\quad t\in(0,T),$$

что эквивалентно выполнению интегрального тождества из пункта 3).

Поскольку $u\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ и $\partial_t u\in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$, по теореме из §1.4, п.1 получаем

$$u\in C([0,T];L_2(\Omega))$$

Осталось доказать, что $u(0)=u_0$. Пусть $w\in C_0^\infty(\Omega)$ произвольная и $\xi\in C^\infty([0,T])$ такова, что $\xi(0)=1$ и $\xi(T)=0$. Умножим соотношение

$$\frac{d}{dt}(u(t),w)=\langle f_0(t),w\rangle\qquad \text{п.в.}\qquad t\in(0,T)$$

на $\xi(t)$ и проинтегрируем по $t\in(0,T)$. При помощи интегрирования по частям получаем

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u(t),w)\,\xi(t)\,dt \;=\; (u(T),w)\,\underbrace{\xi(T)}_{=0}-(u(0),w)\,\underbrace{\xi(0)}_{=1}\;-\;\int_0^T (u(t),w)\,\xi'(t)\,dt$$

Следовательно

$$-(u(0),w)-\int_0^T (u(t),w)\xi'(t)\,dt+\mathcal{L}[u,\xi w]\;=\;\int_0^T\langle f(t),w\rangle\xi(t)\,dt$$

С другой строны, полагая в тождестве из 2) $\eta=w\xi$, получаем

$$-(u_0,w)-\int_0^T (u(t),w)\xi'(t)\,dt+\mathcal{L}[u,\xi w]\;=\;\int_0^T\langle f(t),w\rangle\xi(t)\,dt$$

откуда $(u(0)-u_0,w)=0$ для любого $w\in C_0^\infty(\Omega)$. Сделовательно, $u(0)=u_0$ в $L_2(\Omega)$.

3. Докажем 3) $\implies$ 1). Пусть $\eta\in W_2^{1,1}(Q_T)$, $\eta|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0$, $\eta|_{t=T}=0$ — произвольная, и пусть

$$\eta^N(x,t):=\sum_{k=1}^N c_k(t)w_k(x),\quad c_k\in C_0^\infty([0,T)),\quad w_k\in C_0^\infty(\Omega)$$

таковы, что $\eta^N \to \eta$ в $W_2^{1,1}(Q_T)$. Из 3) вытекает, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение

$$\frac{d}{dt}(u(t), w_k) \;=\; \langle \partial_t u(t), w_k \rangle \;=\; \langle f_0(t), w_k \rangle, \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T).$$

Умножим это соотношение на $c_k(t)$, просуммируем по k от 1 до N и проинтегрируем результат по $t \in (0,T)$. С учетом формулы интегрирования по частям

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u(t), w_k) c_k(t)\, dt \;=\; (u(T), w_k)\underbrace{c_k(T)}_{=0} \;-\; (\underbrace{u(0)}_{=u_0}, w_k) c_k(0) \;-\; \int_0^T (u(t), w_k) c_k'(t)\, dt$$

получаем соотношение

$$-\int_{Q_T} u \partial_t \eta^N \, dxdt \;+\; \mathcal{L}[u, \eta^N] \;=\; \int_{\Omega} u_0(x) \eta^N(x,0)\; dx \;+\; \int_0^T \langle f(t), \eta^N(t) \rangle \; dt$$

Так как $\eta^N \to \eta$ в $W_2^{1,1}(Q_T)$, с учетом непрерывности оператора следа $\eta^N|_{t=0} \to \eta|_{t=0}$ в $L_2(\Omega)$, переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем требуемое тождество.

5. Гладкие решения являются обобщенными

Теорема. Пусть $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$, $u_0|_{\partial\Omega} = 0$, $f \in C(\bar{Q}_T)$.

1) Пусть $u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ — классическое решение задачи $(*)$. Тогда u — обобщенное решение задачи $(*)$.
2) Пусть u — обобщенное решение задачи $(*)$ и предположим, что $u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$. Тогда u — классическое решение задачи $(*)$.

2.3 Энергетическое неравенство и единственность слабых решений

1. **Лемма Гронуолла**

Теорема. Пусть $a \in L_1(0,T)$ и $f \in L_1(0,T)$ — неотрицатиельные функции, и предположим, что неотрицательная функция $y \in W_1^1(0,T)$ удовлетворяет неравенству

$$y'(t) \ \le \ a(t)y(t) \ + \ f(t), \qquad \text{п.в. } t \in (0,T).$$

Тогда для всех $t \in [0,T]$ справедлива оценка

$$y(t) \ \le \ e^{\int\limits_0^t a(\tau)\ d\tau} \left(y(0) \ + \ \int\limits_0^t f(\tau)\ d\tau \right).$$

Доказательство. Заметим, что

$$t \ \mapsto \ y(t)\, e^{-\int\limits_0^t a(\tau)\, d\tau} \ \in \ W_1^1(0,T),$$

$$\frac{d}{dt}\left(y(t) e^{-\int\limits_0^t a(\tau)\, d\tau} \right) \ = \ y'(t)\, e^{-\int\limits_0^t a(\tau)\, d\tau} \ - \ a(t)\, y(t)\, e^{-\int\limits_0^t a(\tau)\, d\tau} \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T)$$

Поэтому из условия вытекает оценка

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)\, e^{-\int\limits_0^t a(\tau)\, d\tau} \right) \ \le \ f(t)\, e^{-\int\limits_0^t a(\tau)\, d\tau} \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T)$$

интегрируя которую по $t \in (0,t_0)$ мы получаем

$$y(t_0)\, e^{-\int\limits_0^{t_0} a(\tau)\, d\tau} \ \le \ y(0) \ + \ \int\limits_0^{t_0} f(t)\ \underbrace{e^{-\int\limits_0^t a(\tau)\, d\tau}}_{\le 1 \ \text{т.к. } a \ge 0}\ dt$$

2. **Энергетическое неравенство**

Теорема. Существует постоянная $c = c(n, \Omega, T, \nu_0, \nu_1) > 0$, такая что для любых $u_0 \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(0,T; W_2^{-1}(\Omega))$ всякое обобщенное решение u задачи

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t u + \mathcal{L} u \ &= \ f \quad \text{в} \quad Q_T \\ u|_{\partial\Omega \times (0,T)} \ &= \ 0 \\ u|_{t=0} \ &= \ u_0 \end{aligned} \right. \tag{$*$}$$

удовлеторяет оценкам

$$\|u\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \ + \ \|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \ + \ \|\partial_t u\|_{L_2(0,T; W_2^{-1}(\Omega))} \ \le \ c\Big(\ \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \ + \ \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \Big)$$

Доказательство. Пусть u — об. решение задачи $(*)$.

1. Оценка $\|u\|_{L_{2,\infty}(Q_T)}$. По теореме §2.2 п.4 для любой $w \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ выполняется соотношение

$$\langle \partial_t u(t), w\rangle \ + \int\limits_{\Omega} \Big(a(t)\nabla u(t)\cdot \nabla w + b(t)\cdot \nabla u(t)\, w + c(t)u(t)w \Big)\, dx \ = \ \langle f(t), w\rangle,$$

$$\text{п.в.} \quad t\in(0,T).$$

Полагая в этом тождестве $w = u(t) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, с учетом равенства

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ = \ \langle \partial_t u(t), u(t)\rangle, \qquad \text{п.в.} \quad t\in(0,T),$$

получаем соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ + \int\limits_{\Omega} \Big(a(t)\nabla u(t)\cdot \nabla u(t) + b(t)\cdot \nabla u(t)\, u(t) + c(t)|u(t)|^2 \Big)\, dx \ = \ \langle f(t), u(t)\rangle$$

Из условия равномерной эллиптичности матрицы $a(t)$ вытекает оценка

$$\int\limits_{\Omega} a(t)\nabla u(t)\cdot \nabla u(t)\, dx \ \geq \ \nu_0\, \|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Следовательно, мы получаем оценку

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ + \ \nu_0\, \|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ \leq$$

$$\leq \ \nu_1 \Big(\|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)}\|u(t)\|_{L_2(\Omega)} + \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \Big) \ + \ \|f(t)\|_{W^{-1}_2(\Omega)}\|u(t)\|_{W^1_2(\Omega)}$$

Используя неравенство Фридрихса

$$\|u(t)\|_{W^1_2(\Omega)} \ \leq \ c_\Omega\, \|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)}, \qquad u(t)\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega),$$

а также неравенство Юнга $ab \leq \varepsilon a^2 + C_\varepsilon b^2$, получем оценку

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ + \ \frac{\nu_0}{2}\, \|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ \leq \ c(\nu_1,\nu_0)\, \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ + \ c(\Omega,\nu_0)\, \|f(t)\|^2_{W^{-1}_2(\Omega)}$$

Обозначим $y(t) := \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$ и $g(t) := \|f(t)\|^2_{W^{-1}_2(\Omega)}$. Тогда $y \in W^1_1(0,T)$ и $g\in L_1(0,T)$. При этом функции $y(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют оценке

$$y'(t) \ \leq \ c(\nu_0,\nu_1)\, y(t) \ + \ c(\Omega,\nu_0)\, g(t), \qquad \text{п.в.} \quad t\in(0,T).$$

По лемме Гронуолла получаем оценку

$$y(t) \ \leq \ e^{c_1 t} \left(y(0) + \int\limits_0^t g(\tau)d\tau \right), \qquad \forall\ t\in(0,T)$$

Расширяя пределы интегрирования в правой части и переходя к супремуму по $t \in (0,T)$ в левой части, получаем

$$\sup_{t\in(0,T)} y(t) \ \le\ e^{c_1 T}\left(y(0) + \int\limits_0^T g(\tau)d\tau \right),$$

что эквивалентно

$$\|u\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \ \le\ c\Big(\ \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \ +\ \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}\ \Big)$$

2. Оценка $\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}$. Для п.в. $t\in(0,T)$ мы знаем оценку

$$\frac{\nu_0}{2}\,\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ \le\ c(\nu_1,\nu_0)\,\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ +\ c(\Omega,\nu_0)\,\|f(t)\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)} \ -\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Интегрируя это неравенство по $t\in(0,T)$, мы получим

$$\frac{\nu_0}{2}\int\limits_0^T \|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt \ \le\ c(\nu_1,\nu_0)\int\limits_0^T \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt \ +\ c(\Omega,\nu_0)\int\limits_0^T \|f(t)\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)}\,dt\ +$$
$$+\ \frac{1}{2}\Big(\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} - \|u(\cdot,T)\|^2_{L_2(\Omega)}\Big),$$

откуда

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)} \ \le\ c(\nu_1,\nu_0)\,\|u\|^2_{L_2(Q_T)} \ +\ c(\Omega,\nu_0)\,\|f\|^2_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \ +\ c\,\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}$$

С учетом неравенства

$$\|u\|_{L_2(Q_T)} \ \le\ T^{1/2}\|u\|_{L_{2,\infty}(Q_T)}$$

мы получаем

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \ \le\ c(\nu_0,\nu_1,T)\,\|u\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \ +\ c\Big(\ \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \ +\ \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}\ \Big)$$

откуда с учетом уже доказанного в **1** вытекает требуемая оценка.

3. Оценка $\|\partial_t u\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}$. Напомним, что

$$\|\partial_t u(t)\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \ :=\ \sup_{w\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega),\ \|w\|_{W_2^1(\Omega)}\le 1} |\langle \partial_t u(t), w\rangle|,$$

Из соотношения

$$\langle \partial_t u(t), w\rangle \ +\int\limits_\Omega \Big(a(t)\nabla u(t)\cdot\nabla w + b(t)\cdot\nabla u(t)\,w + c(t)u(t)w\Big)\,dx \ =\ \langle f(t), w\rangle,$$

$$\text{п.в. }\ t\in(0,T), \qquad \forall\ w\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$$

для п.в. $t \in (0,T)$ вытекает оценка

$$\|\partial_t u(t)\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \ \le \ c(\nu_1) \Big(\|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)} + \|u(t)\|_{L_2(\Omega)} \Big) \ + \ c\, \|f(t)\|_{W_2^{-1}(\Omega)}$$

Это эквивалентно

$$\|\partial_t u(t)\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)} \ \le \ c(\nu_1)\, \|u(t)\|^2_{W_2^1(\Omega)} \ + \ c\, \|f(t)\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)}, \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T)$$

Интегрируя последнее неравенство по $t \in (0,T)$, с учетом $\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} = \|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}$ мы приходим к оценке

$$\|\partial_t u\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \ \le \ c(\nu_1)\, \|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \ + \ c\, \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}$$

Используя оценку $\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}$, полученную в **2**, получаем требуемое неравенство. $\square$

3. **Теорема единственности в энергетическом классе**

Теорема. Пусть u_1 и u_2 — два обобщенных решения задачи $(*)$, соответствующих одному и тому же начальному данному $u_0 \in L_2(\Omega)$ и одной и той же правой части $f \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$. Тогда $u_1 \equiv u_2$ в Q_T.

Доказательство. Функция $u := u_2 - u_1$ является обобщенным решением задачи

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t u + \mathcal{L}u \ &= \ 0 \quad \text{в} \quad Q_T \\ u|_{\partial' Q_T} \ &= \ 0 \end{aligned} \right.$$

Тогда из энергетической оценки вытекает, что $u \equiv 0$ в Q_T. $\square$

2.4 Существование слабых решений

1. **Теорема существования в энергетическом классе**

   Теорема. Для любых $u_0 \in L_2(\Omega)$ и $f \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$, существует единственное обобщенное решение $u \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap W_2^{1,0}(Q_T)$ задачи

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u = f \quad \text{в} \quad Q_T, \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \qquad (*)$$

2. **План доказательства**

   - Построение конечномерных приближений
   - Энергетическая оценка
   - Предельный переход

3. **Галеркинские приближения**

   Теорема. Пусть функции $\{w_k\}_{k=1}^\infty \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и

   - $\{w_k\}_{k=1}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$
   - $\{w_k\}_{k=1}$ образуют ортогональный базис в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ $\big($отн. ск. произв. $(\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)}\big)$

   (Например, в качестве $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ можно взять полную систему собственных функций задачи Дирихле для оператора Лапласа в Ω). Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ существует и притом единственный набор коэффициентов $\{C_k^N\}_{k=1}^N$, $C_k^N \in W_2^1(0,T)$, таких что функция

$$u^N(x,t) \ := \ \sum_{k=1}^N C_k^N(t) w_k(x), \qquad u^N \in W_2^{1,1}(Q_T)$$

   для любого $k = 1, 2, \ldots, N$ удовлетворяет тождеству

$$(\partial_t u^N(t), w_k) + (a(t)\nabla u^N(t), \nabla w_k) + (b(t)\nabla u^N(t), w_k) + (c(t)u^N(t), w_k) \ = \ \langle f(t), w_k\rangle, \qquad (\star)$$

   а также начальному условию

$$u^N(x,0) \ = \ u_0^N(x) \qquad \text{п.в.} \quad x \in \Omega,$$

   где

$$u_0^N(x) \ := \ \sum_{k=1}^N c_k w_k(x), \qquad c_k := \int_\Omega u_0(x) w_k(x)\, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Так как функции $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, выполнение соотношений $(\star)$ эквивалентно выполнению линенйной системы обыконвенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $C_k^N(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{dC_k^N}{dt}(t) + \sum\limits_{j=1}^{N} A_{jk}(t) C_j^N(t) & = & F_k(t), \qquad t \in (0,T) \\ C_k^N(0) & = & c_k \end{array} \right. \qquad k = 1, 2, \dots, N$$

Коэффициенты $A_{kj}(t)$ и $F_k(t)$ в этой системе выражаются по формулам

$$A_{jk}(t) \ := \ \int\limits_{\Omega} \Big(a(x,t) \nabla w_j(x) \cdot \nabla w_k(x) + b(x,t) \cdot \nabla w_j(x) w_k(x) + c(x,t) w_j(x) w_k(x) \Big) \, dx$$

$$F_k(t) \ := \ \langle f(t), w_k \rangle$$

Из условий ка коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ и правую часть f вытекает, что

$$A_{jk} \in L_\infty(0,T), \qquad F_k \in L_2(0,T).$$

Из курса ODE мы знаем, что всякая линейная система ODE с такими коэффициентами имеет единственное решение $(C_1^N(t), C_2^N(t), \dots, C_N^N(t)$, определенное на всем промежутке $[0,T]$ и обладающее гладкостью

$$C_k^N \in W_2^1(0,T), \qquad k = 1, 2, \dots, N.$$

Следовательно, существует единственная функция

$$u^N(x,t) \ = \ \sum_{j=1}^{N} C_j^N(t) w_j(x), \qquad u^N \in W_2^{1,1}(Q_T),$$

удовлетворяющая соотношениям $(\star)$.

4. **Энергетическая оценка**

Теорема. Существует постоянная $C = C(\Omega, T, n, \nu_0, \nu_1) > 0$, такая что для любого $N \in \mathbb{N}$ галеркинские приближения $u^N \in W_2^{1,1}(Q_T)$ в задаче $(*)$ удовлетворяют оценкам

$$\|u^N\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \ + \ \|u^N\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \ \le \ C \ \Big(\ \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \ + \ \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \ \Big)$$

Доказательство. Умножим каждое из соотношений $(\star)$ на $C_k^N(t)$ и просуммируем полученные соотношения по k от 1 до N. Получим тождество

$$(\partial_t u^N(t), u^N(t)) + (a(t) \nabla u^N(t), \nabla u^N(t)) + (b(t) \nabla u^N(t), u^N(t)) + (c(t) u^N(t), u^N(t)) \ = \ \langle f(t), u^N(t) \rangle,$$

которое выполняется при п.в. $t \in (0,T)$. Заметим, что $u^N \in W_2^1(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ и поэтому функция $t \mapsto \|u^N(t)\|_{L_2(\Omega)}^2$ абсолютно непрерывна на $(0,T)$ и

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^N(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \ = \ (\partial_t u^N(t), u^N(t)) \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T).$$

Используя стандартную технику, получаем оценку

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;+\; \frac{\nu_0}{2}\,\|\nabla u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;\le\; c(\nu_1,\nu_0)\,\|u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;+\; c(\Omega,\nu_0)\,\|f(t)\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)}$$

откуда по лемме Гронуолла получаем оценку

$$\|u^N\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \;\le\; c\Big(\, \|u_0^N\|_{L_2(\Omega)} \;+\; \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}\,\Big)$$

Поскольку функция u_0^N является частичной суммой ряда Фурье функции u_0, справедлива оценка

$$\|u_0^N\|_{L_2(\Omega)} \;\le\; \|u_0\|_{L_2(\Omega)},$$

откуда

$$\|u^N\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \;\le\; c\Big(\, \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \;+\; \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}\,\Big)$$

Выражая

$$\frac{\nu_0}{2}\,\|\nabla u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;\le\; c(\nu_1,\nu_0)\,\|u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;+\; c(\Omega,\nu_0)\,\|f(t)\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)} \;-\; \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

и интегрируя данное неравенство по $t\in(0,T)$, получаем

$$\|\nabla u^N\|^2_{L_2(Q_T)} \;\le\; c(\nu_1,\nu_0)\,\|u^N\|^2_{L_2(Q_T)} \;+\; c(\Omega,\nu_0)\,\|f\|^2_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \;+\; c\,\underbrace{\|u_0^N\|^2_{L_2(\Omega)}}_{\le \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}}$$

С учетом неравенства

$$\|u^N\|_{L_2(Q_T)} \;\le\; T^{1/2}\|u^N\|_{L_{2,\infty}(Q_T)}$$

мы получаем

$$\|u^N\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \;\le\; c(\nu_0,\nu_1,T)\,\|u^N\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \;+\; c\Big(\, \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \;+\; \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}\,\Big)$$

откуда с учетом уже доказанной оценки для $\|u^N\|_{L_{2,\infty}(Q_T)}$ мы получаем требуемое неравенство. $\square$

5. Предельный переход

Теорема. Пусть подпоследовательность $\{u^{N_k}\}\subset W_2^{1,1}(Q_T)$ галеркинских приближений в задаче $(*)$ сходится слабо в $W_2^{1,0}(Q_T)$ к некоторой функции $u\in W_2^{1,0}(Q_T)$, т.е.

$$u^{N_k}\rightharpoonup u \;\text{ в }\; L_2(Q_T), \qquad \nabla u^{N_k}\rightharpoonup \nabla u \;\text{ в }\; L_2(Q_T).$$

Тогда u является обобщенным решением задачи $(*)$.

Доказательство.

1. Пусть $m\in\mathbb{N}$ — произвольное, и пусть $d_1, d_2, \ldots, d_m\in W_2^1(0,T)$ — произвольные функции, удовлетворяющие условию $d_k(T)=0$. Обозначим

$$\eta^m(x,t) \;:=\; \sum_{k=1}^{N} d_k(t)w_k(x).$$

Докажем, что для любого $N \geq m$ выполняется соотношение

$$-\int\limits_{Q_T} u^N \partial_t \eta^m \; dxdt \; + \; \mathcal{L}[u^N, \eta^m] \; = \; \int\limits_{\Omega} u_0^N(x)\eta^m(x,0) \; dx \; + \; \int\limits_0^T \langle f(t), \eta^m(t)\rangle \; dt$$

где

$$u_0^N(x) \; = \; \sum_{k=1}^N c_k w_k(x), \qquad c_k := (u_0, w_k)$$

Действительно, умножим каждое из соотношений $k = 1, \ldots, m$

$$\frac{d}{dt}(u^N(t), w_k) + (a(t)\nabla u^N(t), \nabla w_k) + (b(t)\nabla u^N(t), w_k) + (c(t)u^N(t), w_k) \; = \; \langle f(t), w_k\rangle, \quad (\star)$$

на d_k, проинтегрируем результат по $t \in (0,T)$ и воспользуемся равенством

$$\int\limits_0^T d_k(t) \, \frac{d}{dt}(u^N(t), w_k) \, dt \; = \; (u^N(t), w_k) \underbrace{d_k(T)}_{=0} - (u^N(t), w_k) d_k(0) - \int\limits_0^T (u^N(t), w_k) d_k'(t) \, dt$$

Суммируя полученные тождества по k от 1 до m, получаем требуемое тождество.

2. Устремляя $N \to \infty$ с учетом

$$u^N \rightharpoonup u \;\text{ в }\; L_2(Q_T), \qquad \nabla u^N \rightharpoonup \nabla u \;\text{ в }\; L_2(Q_T), \qquad u_0^N \to u_0 \;\text{ в }\; L_2(\Omega)$$

получаем тождество

$$-\int\limits_{Q_T} u \partial_t \eta^m \; dxdt \; + \; \mathcal{L}[u, \eta^m] \; = \; \int\limits_{\Omega} u_0(x)\eta^m(x,0) \; dx \; + \; \int\limits_0^T \langle f(t), \eta^m(t)\rangle \; dt \qquad (\star\star)$$

3. Для любой функции

$$\eta \in W_2^{1,1}(Q_T), \qquad \eta|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \qquad \eta|_{t=T} = 0$$

существуют $\eta^m(x,t) = \sum\limits_{k=1}^N d_k^m(t) w_k(x)$, $d_k^m \in W_2^1(0,T)$, $d_k^m(T) = 0$, такие что

$$\eta^m \to \eta \;\text{ в }\; L_2(Q_T), \qquad \nabla\eta^m \to \nabla\eta \;\text{ в }\; L_2(Q_T), \qquad \partial_t\eta^m \to \partial_t\eta \;\text{ в }\; L_2(Q_T)$$

Поскольку оператор следа $u \in W_2^{1,1}(Q_T) \mapsto u|_{t=0} \in L_2(\Omega)$ непрерывен как оператор из $W_2^{1,1}(Q_T)$ в $L_2(\Omega)$, заключаем также, что $\eta^m(0) \to \eta(0)$ в $L_2(\Omega)$.

Наконец, поскольку f является непрерывным линейным функционалом на $L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ и $\eta^m \to \eta$ в $L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, мы получаем

$$\int\limits_0^T \langle f(t), \eta^m(t)\rangle \; dt \quad \to \quad \int\limits_0^T \langle f(t), \eta(t)\rangle \; dt$$

Пегеходя к пределу при $m \to \infty$ в соотношении $(\star\star)$, получаем

$$-\int\limits_{Q_T} u\partial_t\eta \; dxdt \; + \; \mathcal{L}[u,\eta] \; = \; \int\limits_{\Omega} u_0(x)\eta(x,0) \; dx \; + \; \int\limits_0^T \langle f(t), \eta(t)\rangle \; dt$$

Следовательно, $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ является обобщенным решением задачи $(*)$. $\square$

2.5 Сильные решения

1. **Определение сильного решения**

   Определение. Пусть $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $f \in L_2(Q_T)$, $\nabla a \in L_\infty(Q_T)$. *Сильным* решением начально–краевой задачи

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u \; = \; f \quad \text{в} \quad Q_T \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} \; = \; 0 \\ u|_{t=0} \; = \; u_0 \end{cases} \qquad (*)$$

   мы будем называть функцию $u \in W^{2,1}_2(Q_T)$, удовлетворяющую уравнению п.в. в Q_T, а начальному и краевому условию — в смысле следов.

   Замечание. Всякое сильное решение является обобщенным.

2. **Теорема существования в классе сильных решений**

   Теорема. Пусть Ω — область класса C^2 и пусть

$$\exists \; \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_l} \in L_\infty(Q_T), \qquad \exists \; \frac{\partial a_{jk}}{\partial t} \in L_\infty(Q_T), \qquad \|\nabla a\|_{L_\infty(Q_T)} + \|\partial_t a\|_{L_\infty(Q_T)} \; \le \; \nu_2.$$

   Тогда для любых $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и $f \in L_2(Q_T)$ существует единственное сильное решение $u \in W^{2,1}_2(Q_T)$ задачи $(*)$, причем имеет место оценка

$$\|u\|_{W^{2,1}_2(Q_T)} \; \le \; c\Big(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W^1_2(\Omega)} \Big),$$

   в которой постоянная $c > 0$ зависит только от n, Ω, T, ν_0, ν_1 и ν_2.

3. **План доказательства коэрцитивной оценки**

   Предположим, что u — гладкая.

   - Обозначим $f_0 := f - b\cdot\nabla u - cu$. Тогда с учетом энергетической оценки

$$\|f_0\|_{L_2(Q_T)} \; \le \; c\Big(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u\|_{W^{1,0}_2(Q_T)}\Big) \; \le \; c\Big(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W^1_2(\Omega)}\Big)$$

   - Умножим уравнение $\partial_t u + \mathcal{L}u = f$ на $\partial_t u$ и проинтегрируем результат по Ω:

$$\|\partial_t u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + (a(t)\nabla u(t), \partial_t \nabla u(t)) = (f_0(t), \partial_t u(t))$$

   - С учетом симметричности матрицы $a(t)$ преобразуем

$$(a(t)\nabla u(t), \partial_t\nabla u(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(a(t)\nabla u(t), \nabla u(t)) - \left(\frac{\partial a}{\partial t}(t)\nabla u(t), \nabla u(t)\right)$$

- Проинтегрируем по $t \in (0,T)$ соотношение

$$\|\partial_t u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(a(t)\nabla u(t), \nabla u(t)) + \left(\frac{\partial a}{\partial t}(t)\nabla u(t), \nabla u(t)\right) + (f_0(t), \partial_t u(t))$$

Получим

$$\|\partial_t u\|^2_{L_2(Q_T)} = \tfrac{1}{2}(a(0)\nabla u_0, \nabla u_0) \underbrace{-\tfrac{1}{2}(a(T)\nabla u(T), \nabla u(T))}_{\leq 0} +$$

$$+\int\limits_0^T \left(\frac{\partial a}{\partial t}(t)\nabla u(t), \nabla u(t)\right)\,dt + \int\limits_0^T (f_0(t), \partial_t u(t))\,dt$$

- Учитывая условия на коэффициенты, получаем оценку

$$\|\partial_t u\|^2_{L_2(Q_T)} \;\leq\; \frac{\nu_1}{2}\|\nabla u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \nu_2\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)} + \|f_0\|_{L_2(Q_T)}\|\partial_t u\|_{L_2(Q_T)}$$

Применяя неравенство Юнга $ab \leq \varepsilon a^2 + C_\varepsilon b^2$, а также энергетическую оценку и оценку для $\|f_0\|_{L_2(Q_T)}$, получаем

$$\|\partial_t u\|^2_{L_2(Q_T)} \;\leq\; c\left(\|\nabla u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q_T)}\right)$$

- Обозначим $f_1 := f_0 - \partial_t u$. Тогда $f_1 \in L_2(Q_T)$ и

$$\|f_1\|_{L_2(Q_T)} \;\leq\; \|f_0\|_{L_2(Q_T)} + \|\partial_t u\|_{L_2(Q_T)} \;\leq\; c\left(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W^1_2(\Omega)}\right)$$

Для любого $t \in (0,T)$ функция $u(t) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ является обобщенным решением задачи Дирихле для эллиптического уравнения

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\operatorname{div}\big(a(t)\nabla u(t)\big) & = & f_1(t) \quad \text{в} \quad \Omega \\ u(t)|_{\partial\Omega} & = & 0 \end{array}\right.$$

- Поскольку $\partial\Omega \subset C^2$ и для п.в. $t \in (0,T)$ имеет место включение $f_1(t) \in L_2(\Omega)$, из эллиптической теории (см. параграфы "Второе основное неравенство" или "Оценка вторых производных") получаем

$$\|u(t)\|_{W^2_2(\Omega)} \;\leq\; c_\Omega\,\|f_1(t)\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\, t \in (0,T)$$

Возводя эту оценку в квадрат и интегрируя по $t \in (0,T)$, получаем

$$\|u\|_{L_2(0,T;W^2_2(\Omega))} \;\leq\; c\,\|f_1\|_{L_2(Q_T)}$$

- Учитывая оценку для $\|f_1\|_{L_2(Q_T)}$, получаем окончательно

$$\|u\|_{W^{2,1}_2(Q_T)} \;=\; \|u\|_{L_2(0,T;W^2_2(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L_2(Q_T)} \;\leq\; c\left(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W^1_2(\Omega)}\right)$$

4. **Доказательство теоремы существования**

1. Пусть $u \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap W_2^{1,0}(Q_T)$ — обобщенное решение задачи $(*)$. Обозначим

$$f_0 \;:=\; f - b\cdot\nabla u - cu, \qquad f_0 \in L_2(Q_T)$$

С учетом энергетического неравенства

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \;\le\; c\Big(\|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} + \|u_0\|_{L_2(\Omega)}\Big) \;\le\; c\Big(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{L_2(\Omega)}\Big)$$

получаем для f_0 оценку

$$\|f_0\|_{L_2(Q_T)} \;\le\; c\Big(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}\Big)$$

2. Теперь u является обобщенным решением задачи

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) &=& f_0 \qquad \text{в} \quad Q_T \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} &=& 0 \\ u|_{t=0} &=& u_0 \end{array}\right. \tag{$**$}$$

Построим галеркинские приближения для задачи $(**)$:

$$u^N(x,t) \;:=\; \sum_{k=1}^N C_k^N(t) w_k(x), \qquad u^N \in W_2^{1,1}(Q_T)$$

где $C_k^N \in W_2^1(0,T)$ и функции u^N для любого $k = 1, 2, \dots, N$ удовлетворяют тождеству

$$\left\{\begin{array}{l} (\partial_t u^N(t), w_k) + (a(t)\nabla u^N(t), \nabla w_k) \;=\; (f_0(t), w_k), \\ u^N|_{t=0} \;=\; u_0^N, \qquad u_0^N(x) \;:=\; \displaystyle\sum_{k=1}^N (u_0, w_k)\, w_k(x) \end{array}\right.$$

Мы уже знаем, что

$$\|u^N\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \;\le\; c\Big(\|f_0\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{L_2(\Omega)}\Big), \qquad u^N \to v \quad \text{в} \quad L_2(Q_T),$$

где $v \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap W_2^{1,0}(Q_T)$ — некоторое обобщенное решение задачи $(**)$. Таким образом, v и u — два обобщенных решения задачи $(**)$, соответствующие одному и тому же начальному данному и правой части. По теореме единственности для обобщенных решений получаем $v \equiv u$ п.в. в Q_T.

3. Умножим каждое из тождеств

$$(\partial_t u^N(t), w_k) + (a(t)\nabla u^N(t), \nabla w_k) \;=\; (f_0(t), w_k)$$

на $\frac{dC_k^N}{dt}(t)$ и просуммиуем по k от 1 до N. Получим тождество

$$\big(\partial_t u^N(t), \partial_t u^N\big) + \big(a(t)\nabla u^N(t), \partial_t \nabla u^N\big) \;=\; \big(f_0(t), \partial_t u^N\big)$$

Заметим, что
$$u^N,\ \partial_t u^N \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$$
Второе слагаемое в левой части имеет вид
$$\big(a(t)\nabla u^N(t), \partial_t \nabla u^N\big) \ := \ \int\limits_\Omega a(x,t)\nabla u^N(x,t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\nabla u^N(x,t)\ dx \ = \ \int\limits_\Omega a_{jk}u^N_{,j}\partial_t u^N_{,k}\ dx$$
Заметим, что в силу условия $a_{jk}=a_{kj}$ при п.в. $x\in\Omega$ справедливы тожества
$$\frac{\partial}{\partial t}\big(a\nabla u^N\cdot\nabla u^N\big) \ = \ \partial_t\big(a_{jk}u^N_{,j}u^N_{,k}\big) \ = \ a_{jk}\partial_t u^N_{,j}u^N_{,k} \ + \ a_{jk}u^N_{,j}\partial_t u^N_{,k} \ + \ \frac{\partial a_{jk}}{\partial t}u^N_{,j}u^N_{,k} \ =$$
$$= \ (a_{kj}+a_{jk})u^N_{,j}\partial_t u^N_{,k} \ + \ \frac{\partial a_{jk}}{\partial t}u^N_{,j}u^N_{,k} \ = \ 2\,a_{jk}u^N_{,j}\partial_t u^N_{,k} \ + \ \frac{\partial a_{jk}}{\partial t}u^N_{,j}u^N_{,k} \ =$$
$$= \ 2\,a\nabla u^N\cdot\partial_t\nabla u^N \ + \ \frac{\partial a}{\partial t}\nabla u^N\cdot\nabla u^N$$
Поэтому для u^N при п.в. $t\in(0,T)$ выполняется тождество
$$2\,\|\partial_t u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ + \ \frac{d}{dt}\Big(a(t)\nabla u^N(t),\nabla u^N(t)\Big) \ = \ 2\,\Big(f_0(t),\partial_t u^N(t)\Big) \ + \ \Big(\frac{\partial a}{\partial t}\nabla u^N(t),\nabla u^N(t)\Big)$$
из которого при помощи неравенства Юнга при п.в. $t\in(0,T)$ вытекает оценка
$$\|\partial_t u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ + \ \frac{d}{dt}\Big(a(t)\nabla u^N(t),\nabla u^N(t)\Big) \ \le \ c\,\|f_0(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ + \ c\,\|\nabla u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$
С учетом эллиптичности матрицы a получаем неравенство
$$\|\partial_t u^N\|_{L_2(Q_T)} \ + \ \|\nabla u^N\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \ \le \ c\,\Big(\|f_0\|_{L_2(Q_T)}+\|\nabla u^N\|_{L_2(Q_T)}+\|\nabla u^N_0\|_{L_2(\Omega)}\Big)$$
Принимая во внимание энергетическую оценку для u^N, получаем
$$\|\partial_t u^N\|_{L_2(Q_T)} \ + \ \|\nabla u^N\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \ \le \ c\,\Big(\|f_0\|_{L_2(Q_T)}+\|u^N_0\|_{W^1_2(\Omega)}\Big)$$
Заметим, что если базис $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ состоит из собственных функций задачи Дирихле для оператора Лапласа в области Ω, то $(\nabla w_j,\nabla w_k)=\lambda_j\delta_{jk}$, где λ_j — собственные числа оператора $-\Delta$ с условиями Дирихле в Ω. Поэтому
$$\|\nabla u_0\|^2_{L_2(\Omega)}=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k|c_k|^2,\qquad c_k:=(u_0,w_k)_{L_2(\Omega)}$$
С другой стороны,
$$\|\nabla u^N_0\|^2_{L_2(\Omega)}=\sum_{k=1}^N\lambda_k|c_k|^2 \qquad\Longrightarrow\qquad \|\nabla u^N_0\|^2_{L_2(\Omega)} \ \le \ \|\nabla u_0\|^2_{L_2(\Omega)}$$
Следовательно, $\partial_t u^N$ ограничена в $L_2(Q_T)$, откуда с учетом $v\equiv u$ в Q_T вытекает
$$\partial_t u^N\rightharpoonup\partial_t u \quad \text{в} \quad L_2(Q_T),\qquad \|\partial_t u\|_{L_2(Q_T)} \ \le \ c\,\Big(\|f_0\|_{L_2(Q_T)}+\|u_0\|_{W^1_2(\Omega)}\Big)$$

4. Обозначим $f_1 := f_0 - \partial_t u$. Тогда с учетом оценок $\|f_0\|_{L_2(Q_T)}$ и $\|\partial_t u\|_{L_2(Q_T)}$ получаем

$$\|f_1\|_{L_2(Q_T)} \ \le \ c\left(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}\right)$$

Следовательно, для п.в. $t \in (0,T)$ функция $u(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ является обобщенным решением задачи Дирихле для эллиптического уравнения

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\operatorname{div}(a(t)\nabla u(t)) & = & f_1(t) \quad \text{в} \quad \Omega \\ u(t)|_{\partial\Omega} & = & 0 \end{array}\right.$$

Поскольку Ω — класса C^2 и $a(t) \in W_\infty^1(\Omega)$, $f_1(t) \in L_2(\Omega)$ при п.в. $t \in (0,T)$, из эллиптической теории заключаем, что

$$\text{при п.в. } t \in (0,T) \qquad u(t) \in W_2^2(\Omega), \qquad \|u(t)\|^2_{W_2^2(\Omega)} \ \le \ c\,\|f_1(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

откуда интегрированием этой оценки по $t \in (0,T)$ получаем

$$\|u\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \ \le \ c\,\|f_1\|_{L_2(Q_T)}$$

Следовательно, $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$ и

$$\begin{gathered} \|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \ = \ \|\partial_t u\|_{L_2(Q_T)} \ + \ \|u\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \ \le \\ \le \ c\left(\|f_0\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}\right) \ + \ c\,\|f_1\|_{L_2(Q_T)} \ \le \ c\left(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}\right) \end{gathered}$$

5. Единственность справедлива в более широком классе обобщенных решений.

□