3 Свойства решений параболических уравнений

3.1 Параболический принцип максимума

1. **Свойства положительных матриц**

   Теорема. Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — вещественные симметричные матрицы $n \times n$. Обозначим через $A : B$ их скалярное произведение:

   $$A : B \ := \ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}.$$

   Предположим, что обе матрицы A и B неотрицательны, то есть

   $$A\xi \cdot \xi \geq 0, \qquad B\xi \cdot \xi \geq 0, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

   Тогда

   $$A : B \ \geq \ 0$$

   Доказательство.

   1. $B = B^T, \ \ B \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, L = L^T, \quad L \geq 0: \quad L^2 = B$

   2. $A : B = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

   3. $A : B = \operatorname{tr}(AL^2) = \operatorname{tr}(LAL)$.

   4. $LAL \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tr}(LAL) \geq 0$

   □

2. **Значения производных функции в точки ее максимума**

   Теорема. Пусть $a \in C(\bar{Q}_T)$, $b \in C(\bar{Q}_T)$ и предположим, что $u \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ достигает своего максимума в точке $(x_0, t_0) \in Q_T := \Omega \times (0, T]$, то есть

   $$u(x_0, t_0) \ = \ \sup_{(x,t) \in Q_T} u(x, t).$$

   Тогда

   - $\nabla u(x_0, t_0) = 0$
   - $\partial_t u(x_0, t_0) \geq 0$
   - матрица $\nabla^2 u(x_0, t_0)$ отрицательна (т.е. все ее собственные числа $\leq \ 0$)
   - $a(x_0, t_0) : \nabla^2 u(x_0, t_0) \leq 0$
   - $\partial_t u(x_0, t_0) - a(x_0, t_0) : \nabla^2 u(x_0, t_0) + b(x_0, t_0) \cdot \nabla u(x_0, t_0) \ \geq \ 0$

3. **Слабый принцип максимума**

Теорема. Пусть a, ∇a, $b \in C(\bar{Q}_T)$ и $u \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ удовлетворяет неравенству

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a \nabla u) + b \cdot \nabla u \ \le\ 0 \quad \text{в} \quad Q_T$$

Тогда

$$\sup_{Q_T} u \ \le\ \sup_{\partial' Q_T} u$$

Доказательство.

1. Предположим сначала, что выполняется строгое неравенство

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a \nabla u) + b \cdot \nabla u \ <\ 0 \quad \text{в} \quad Q_T$$

Пусть $(x_0, t_0) \in \bar{Q}_T$ — точка максимума функции u, т.е.

$$u(x_0, t_0) \ =\ \sup_{(x,t) \in \bar{Q}_T} u(x, t),$$

и предположим, что $(x_0, t_0) \in Q_T := \Omega \times (0, T]$. Заметим, что

$$\operatorname{div}(a \nabla u) = (a_{jk} u_{,k})_{,j} = a_{jk} u_{,jk} + a_{jk,j} u_{,k} = a : \nabla^2 u + \underbrace{\operatorname{div} a^T}_{= \operatorname{div} a} \cdot \nabla u$$

и поэтому $u \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ удовлетворяет неравенству

$$\partial_t u(x,t) - a(x,t) : \nabla^2 u(x,t) + \tilde{b}(x,t) \cdot \nabla u(x,t) \ <\ 0 \qquad \forall\ (x,t) \in Q_T,$$

где

$$\tilde{b} \ :=\ b + \operatorname{div} a \ \in\ C(\bar{Q}_T).$$

С другой стороны, из предыдущего пункта мы знаем, что в точке $(x_0, t_0) \in Q_T$ выполняется неравенство

$$\partial_t u(x_0, t_0) - a(x_0, t_0) : \nabla^2 u(x_0, t_0) + \tilde{b}(x_0, t_0) \cdot \nabla u(x_0, t_0) \ \ge\ 0$$

Полученное противоречие доказывает, что $(x_0, t_0) \in \partial Q_T$.

2. Предположим теперь, что выполняется нестрогое неравенство

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a \nabla u) + b \cdot \nabla u \ \le\ 0 \quad \text{в} \quad Q_T$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и положим

$$u^\varepsilon(x, t) \ :=\ u(x, t) - \varepsilon t$$

Тогда

$$\partial_t u^\varepsilon - \operatorname{div}(a \nabla u^\varepsilon) + b \cdot \nabla u^\varepsilon \ =\ \underbrace{\partial_t u - \operatorname{div}(a \nabla u) + b \cdot \nabla u}_{\le\, 0} - \varepsilon \ \le\ -\varepsilon\ <\ 0 \quad \text{в} \quad Q_T$$

и из **1** мы получаем

$$\sup_{Q_T} u^\varepsilon \;\le\; \sup_{\partial' Q_T} u^\varepsilon$$

откуда с учетом $t \in (0,T)$ мы получаем

$$\sup_{Q_T} u - \varepsilon T \;\le\; \sup_{Q_T} u^\varepsilon \;\le\; \sup_{\partial' Q_T} u^\varepsilon \;\le\; \sup_{\partial' Q_T} u$$

Устремляя $\varepsilon \to +0$, получаем требуемую оценку. $\square$

4. **Двусторонняя оценка**

Теорема. Пусть a, ∇a, $b \in C(\bar{Q}_T)$ и $u \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ удовлетворяет уравнению.

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) + b \cdot \nabla u \;=\; 0 \quad \text{в} \quad Q_T$$

Тогда имеет место двусторонняя оценка

$$\inf_{\partial' Q_T} u \;\le\; \sup_{Q_T} u \;\le\; \sup_{\partial' Q_T} u$$

Доказательство. Оценка на inf получается из оценки на sup для функции $v := -u$.

5. **Теорема сравнения**

Теорема. Пусть a, ∇a, $b \in C(\bar{Q}_T)$ и пусть u_1, $u_2 \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ — два классических решения уравнения

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) + b \cdot \nabla u \;=\; 0 \quad \text{в} \quad Q_T$$

Тогда

$$u_1 \;\le\; u_2 \quad \text{на} \quad \partial' Q_T \qquad \Longrightarrow \qquad u_1 \;\le\; u_2 \quad \text{в} \quad Q_T$$

Доказательство. Слабый принцип максимума для функции $\bar{u} := u_1 - u_2$.

3.2 Параболическое неравенство Харнака

1. **Неравенство Харнака**

 Теорема. Пусть $u \in C(\bar{Q}_{2R}) \cap C^\infty(Q_{2R})$, причем

$$u \geq 0 \quad \text{в} \quad Q_{2R},$$

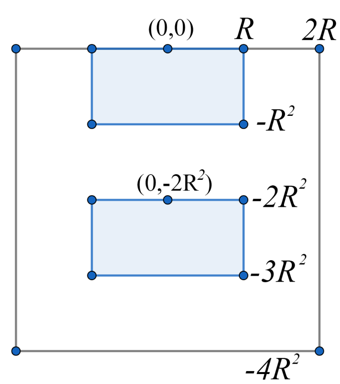
 и u удовлетворяет уравнению

$$\partial_t u - \Delta u \;=\; 0 \qquad \text{в} \quad Q_{2R}$$

 Тогда справедливо неравенство

$$\sup_{B_R\times(-3R^2,-2R^2)} u \;\leq\; c_* \inf_{B_R\times(-R^2,0)} u,$$

 в котором постоянная $c_* > 0$ зависит только от n.



2. **Уравнение для** $\ln u$

 Лемма. Пусть $u \geq \varepsilon > 0$ в Q_{2R} и u удовлетворяет уравнению

$$\partial_t u - \Delta u \;=\; 0$$

 Обозначим

$$v \;:=\; \ln u$$

 Тогда

$$\partial_t v - \Delta v \;=\; |\nabla v|^2$$

3. **Неравенство Харнака в терминах функции** $v = \ln u$

 Если $\forall\,(x_1,t_1) \in B_R \times (-3R^2, -2R^2)$, $\forall\,(x_2,t_2) \in B_R \times (-R^2, 0)$ мы докажем оценку

$$v(x_2,t_2) - v(x_1,t_1) \;\geq\; -\gamma$$

с некторой абсолютной постоянной $\gamma > 0$, то из нее будет вытекать оценка

$$u(x_2, t_2) \;\geq\; e^{-\gamma}\, u(x_1, t_1),$$

которая дает неравенство Харнака.

4. **Формула Ньютона–Лейбница**

По формуле Ньютона-Лейбница мы получим

$$v(x_2, t_2) - v(x_1, t_1) \;=\; \int\limits_0^1 \Big(\nabla v(x_s, t_s) \cdot (x_2 - x_1) + \partial_t v(x_s, t_s)(t_2 - t_1) \Big)\, ds$$

где мы обозначили $x_s := x_1 + s(x_2 - x_1)$ и $t_s := t_1 + s(t_2 - t_1)$, $s \in [0, 1]$.

При x_1, $x_2 \in B_R$ мы имеем $|x_1 - x_2| \leq 2R$ и с учетом $ab \leq \varepsilon a^2 + C_\varepsilon b^2$ оцениваем

$$\nabla v(x_s, t_s) \cdot (x_2 - x_1) \;\geq\; -|\nabla v(x_s, t_s)|^2\, 2R \;\geq\; -\tfrac{1}{2} |\nabla v(x_s, t_s)|^2 (t_2 - t_1) - \frac{2R^2}{t_2 - t_1}$$

Заметим, что

$$t_1 \in [-3R^2, -2R^2], \qquad t_2 \in [-R^2, 0] \qquad \Longrightarrow \qquad t_2 - t_1 \;\geq\; R^2$$

и поэтому

$$-\frac{2R^2}{t_2 - t_1} \;\geq\; -2$$

5. **Что нужно доказать?**

Поскольку

$$v(x_2, t_2) - v(x_1, t_1) \;\geq\; (t_2 - t_1) \int\limits_0^1 \Big(\partial_t v(x_s, t_s) - \frac{1}{2}\, |\nabla v(x_s, t_s)|^2 \Big)\, ds \;-\; 2$$

оценку

$$v(x_2, t_2) - v(x_1, t_1) \;\geq\; -\gamma$$

мы получим, если докажем неравенство

$$\boxed{\partial_t v - \tfrac{1}{2}\, |\nabla v|^2 \;\geq\; -\frac{\mu}{R^2} \qquad \text{в} \qquad B_R \times (-3R^2, 0)}$$

с некоторой абсолютной постоянной $\mu > 0$. Действительно, в этом случае

$$v(x_2, t_2) - v(x_1, t_1) \;\geq\; -\mu\, \frac{t_2 - t_1}{R^2} - 2,$$

что с учетом $t_2 - t_1 \leq 4R^2$ дает требуемое неравенство с постоянной $\gamma = 4\mu + 2$.

6. **Функция w_0**

Из соотношения $\partial_t v - \Delta v = |\nabla v|^2$ мы получаем тождество

$$\partial_t v - \tfrac{1}{2}\,|\nabla v|^2 \ = \ \Delta v + \tfrac{1}{2}\,|\nabla v|^2 \qquad \text{в} \qquad Q_{2R}$$

Обозначим

$$w_0 \ := \ \Delta v + \tfrac{1}{2}\,|\nabla v|^2$$

Наша цель — установить оценку

$$w_0 + const \ \geq \ 0 \qquad \text{в} \qquad B_R \times (-3R^2, 0)$$

7. **Слабый принцип максимума**

Как доказать, что какая-то функция w неотрицательна?

Например, мы знаем слабый принцип максимума:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t w - \Delta w \ \geq \ 0 \quad \text{в} \quad Q_{2R} \\ \quad w|_{\partial' Q_{2R}} \ \geq \ 0 \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad w \ \geq \ 0 \quad \text{в} \quad Q_{2R}$$

8. **Функция w**

Значения функции w_0 на $\partial' Q_{2R}$ мы не контролируем. Ее надо подкорректировать.

Пусть срезающая функция $\zeta \in C^{2,1}(\bar{Q}_{2R})$ такова, что

$$\zeta \equiv 1 \quad \text{на} \quad B_R \times [-3R^2, 0], \qquad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad \text{в} \quad Q_{2R}, \qquad \operatorname{supp} \zeta \subset B_{2R} \times (-4R^2, 0],$$
$$|\nabla \zeta| \leq \frac{c}{R}, \qquad |\partial_t \zeta| + |\nabla^2 \zeta| \leq \frac{c}{R^2}$$

Пусть $\mu > 0$ — постоянная, значение которой мы фиксируем позже. Обозначим

$$w \ := \ \zeta^4 w_0 \ + \ \underbrace{\frac{4\mu}{R^2}\left(1 + \frac{t}{4R^2}\right)}_{\geq\ 0 \ \ t \in (-4R^2, 0)}$$

Тогда

$$w|_{\partial' Q_{2R}} \ \geq \ 0$$

9. **Уравнение для функции w**

Обозначим

$$\mathcal{M}_0 w \ := \ \partial_t w - \Delta w$$

Тогда

$$\mathcal{M}_0 w \ = \ \mathcal{M}_0\Big(\zeta^4 w_0 + \frac{4\mu}{R^2}\big(1 + \frac{t}{4R^2}\big)\Big) = \zeta^4 \mathcal{M}_0 w_0 - 2\nabla\zeta^4 \cdot \nabla w_0 + w_0 \mathcal{M}_0 \zeta^4 + \frac{\mu}{R^4}$$

Обозначим через $\mathcal{M}_v$ дифференциаальный оператор

$$\mathcal{M}_v w_0 \ := \ \mathcal{M}_0 w_0 - 2\nabla v \cdot \nabla w_0 \ = \ \partial_t w_0 - \Delta w_0 - 2\nabla v \cdot \nabla w_0$$

Тогда

$$\mathcal{M}_0 w \ = \ \zeta^4 \mathcal{M}_v w_0 + 2(\zeta^4 \nabla v - \nabla \zeta^4) \cdot \nabla w_0 + w_0 \mathcal{M}_0 \zeta^4 + \frac{\mu}{R^4}$$

10. **Свойства оператора $\mathcal{M}_v$**

Лемма. Пусть v удовлетворяет уравнению

$$\partial_t v - \Delta v \ = \ |\nabla v|^2,$$

Тогда

$$\mathcal{M}_v \Big(\Delta v + \tfrac{1}{2}\, |\nabla v|^2 \Big) \ = \ |\nabla^2 v|^2$$

Доказательство. С учетом тождества

$$\Delta |\nabla v|^2 \ = \ 2\, |\nabla^2 v|^2 + 2\nabla v \cdot \nabla \Delta v$$

получаем

$$\mathcal{M}_v \Delta v \ = \ \partial_t \Delta v - \Delta^2 v - 2\nabla v \cdot \nabla \Delta v \ = \ \Delta \Big(\underbrace{\partial_t v - \Delta v}_{=\ |\nabla v|^2} \Big) - 2\nabla v \cdot \nabla \Delta v \ =$$

$$= \ \underbrace{\Delta |\nabla v|^2}_{=\ 2\,|\nabla^2 v|^2 + 2\nabla v \cdot \nabla \Delta v} - 2\nabla v \cdot \nabla \Delta v \ = \ 2\, |\nabla^2 v|^2 + \underbrace{2\nabla v \cdot \nabla \Delta v - 2\nabla v \cdot \nabla \Delta v}_{=\ 0} \ = \ 2\, |\nabla^2 v|^2$$

Аналогично, с учетом тождеств

$$\partial_t |\nabla v|^2 \ = \ 2\nabla v \cdot \nabla \partial_t v$$
$$\Delta |\nabla v|^2 \ = \ 2\nabla v \cdot \nabla \Delta v + 2|\nabla^2 v|^2$$

получаем

$$\mathcal{M}_v |\nabla v|^2 \ = \ \partial_t |\nabla v|^2 - \Delta |\nabla v|^2 - 2\nabla v \cdot \nabla |\nabla v|^2 \ =$$
$$= \ 2\nabla v \cdot \nabla \Big(\underbrace{\partial_t v - \Delta v}_{=\ |\nabla v|^2} \Big) - 2\nabla v \cdot \nabla |\nabla v|^2 - 2|\nabla^2 v|^2 \ =$$
$$= \ \underbrace{2\nabla v \cdot \nabla |\nabla v|^2 - 2\nabla v \cdot \nabla |\nabla v|^2}_{=\ 0} - 2|\nabla^2 v|^2 \ = \ -2|\nabla^2 v|^2$$

11. **Значение функции $\boldsymbol{\mathcal{M}_0 w}$ в точке минимума $\boldsymbol{z_0}$**

Пусть $z_0 := (x_0, t_0) \in \bar{Q}_{2R}$ — точка минимума функции w, т.е.

$$w(z_0) \ = \ \inf_{z \in Q_2 R} w(z)$$

Тогда если $z_0 \in Q_{2R}$ и при этом $w(z_0) < 0$, то $\zeta(z_0) > 0$ и

$$\nabla w(z_0) \ = \ 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \zeta(z_0)\nabla w_0(z_0) + 4w_0(z_0)\nabla\zeta(z_0) \ = \ 0$$

Тогда в точке z_0 выражение $2(\zeta^4\nabla v - \nabla\zeta^4)\cdot\nabla w_0$ может быть преобразовано к виду

$$2\zeta^2(z_0)\Big(\zeta(z_0)\nabla v(z_0) - 4\nabla\zeta(z_0)\Big)\cdot\underbrace{\zeta(z_0)\nabla w_0(z_0)}_{=\ -4w_0(z_0)\nabla\zeta(z_0)} \ =$$

$$= \ -8\zeta^2(z_0)w_0(z_0)\Big(\zeta(z_0)\nabla v(z_0) - 4\nabla\zeta(z_0)\Big)\cdot\nabla\zeta(z_0)$$

Следовательно, в точке z_0 выполняется соотношение

$$\mathcal{M}_0 w \ = \ \zeta^4|\nabla^2 v|^2 - 8\zeta^2 w_0(\zeta\nabla v - 4\nabla\zeta)\cdot\nabla\zeta + w_0\mathcal{M}_0\zeta^4 + \frac{\mu}{R^4}$$

12. Оценка снизу для $\mathcal{M}_0 w(z_0)$

Как и прежде, мы предполагаем, что в точке минимума $z_0 \in Q_{2R}$ функции w выполняется неравенство $w(z_0) < 0$. Тогда, как мы знаем,

$$\mathcal{M}_0 w(z_0) \ = \ \zeta^4(z_0)|\nabla^2 v(z_0)|^2 \ - \ 8\zeta^2(z_0)w_0(z_0)\Big(\zeta(z_0)\nabla v(z_0) - 4\nabla\zeta(z_0)\Big)\cdot\nabla\zeta(z_0) \ +$$
$$+ \ w_0(z_0)\mathcal{M}_0\zeta^4(z_0) \ + \ \frac{\mu}{R^4}$$

откуда с учетом неравенств

$$|\nabla\zeta| \ \le \ \frac{C}{R}, \qquad \mathcal{M}_0\zeta \ \le \ \frac{C}{R^2}\,\zeta^2,$$

вытекает оценка

$$\mathcal{M}_0 w(z_0) \ \ge \ \zeta^4(z_0)|\nabla^2 v(z_0)|^2 - \zeta^2(z_0)w_0(z_0)\Big(\,\zeta(z_0)|\nabla v(z_0)| + \frac{C}{R}\Big)\,\frac{C}{R} - w_0(z_0)\,\frac{C}{R^2}\,\zeta^2(z_0) + \frac{\mu}{R^4}$$

Поскольку $w_0 \ = \ \Delta v + \frac{1}{2}\,|\nabla v|^2$ имеем

$$w(z_0) < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{1}{2}\,|\nabla v(z_0)|^2 \ < \ -\Delta v(z_0) \ \le \ |\nabla^2 v(z_0)|$$

Следовательно,

$$|\nabla v(z_0)| \ \le \ c\,|\nabla^2 v(z_0)|^{\frac{1}{2}}, \qquad w(z_0) \ \le \ c\,|\nabla^2 v(z_0)|$$

и поэтому

$$\mathcal{M}_0 w(z_0) \ \ge \ \zeta^4(z_0)|\nabla^2 v(z_0)|^2 \ - \ \frac{c}{R}\,\zeta^3(z_0)|\nabla^2 v(z_0)|^{\frac{3}{2}} \ - \ \frac{c}{R^2}\,\zeta^2(z_0)\,|\nabla^2 v(z_0)| \ + \ \frac{\mu}{R^4}$$

Используя неравенства $ab \le \varepsilon a^2 + C_\varepsilon b^2$ и $a^{\frac{3}{2}}b \le \varepsilon a^2 + C_\varepsilon b^4$, получаем оценку

$$\mathcal{M}_0 w(z_0) \ \ge \ \zeta^4(z_0)|\nabla^2 v(z_0)|^2 \ + \ \frac{\mu}{R^4} \ - \ \frac{c_*}{R^4}$$

13. **Выбор значения для постоянной $\mu > 0$**

Фиксируем значение $\mu > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\mu \; > \; c_*$$

14. **Принцип максимума для функции w**

Лемма. При указанном выборе значения постоянной $\mu > 0$ выполняется неравенство

$$w(x,t) \; \geq \; 0, \qquad \forall \; (x,t) \in Q_{2R}$$

Доказательство. Пусть $z_0 \in \bar{Q}_{2R}$ — точка минимума функции w:

$$w(z_0) \; = \; \inf_{z \in Q_{2R}} w(z)$$

Докажем, что $w(z_0) \geq 0$. От противного: предположим, что $w(z_0) < 0$. Поскольку $w|_{\partial' Q_{2R}} \geq 0$, заключаем, что $z_0 \in Q_{2R}$. Тогда $\partial_t w(z_0) \leq 0$, $\Delta w(z_0) \geq 0$ и, следовательно,

$$\mathcal{M} w(z_0) \; \leq \; 0.$$

Но с другой стороны

$$\mathcal{M} w(z_0) \; \geq \; \zeta^4(z_0) |\nabla^2 v(z_0)|^2 \; + \; \underbrace{\frac{\mu}{R^4} \; - \; \frac{c}{R^4}}_{>0} \; > 0$$

Полученное противоречие доказывает, что $w(z_0) \geq 0$, то есть $w \geq 0$ в Q_{2R}.

15. **Что мы в итоге получили?**

Неравенство $w(x,t) \geq 0$ при $(x,t) \in Q_{2R}$ с учетом того, что $w = \zeta^4 w_0 + \frac{4\mu}{R^2}\left(1 + \frac{t}{4R^2}\right)$ и $\zeta \equiv 1$ на $B_R \times (-3R^2, 0)$ дает оценку

$$w_0 \; = \; \Delta v + \tfrac{1}{2} |\nabla v|^2 \; \geq \; - \; \frac{4\mu}{R^2}\left(1 + \frac{t}{4R^2}\right) \qquad \text{на} \qquad B_R \times (-3R^2, 0)$$

Отметим, что при $t \in (-3R^2, 0)$ выполняется неравенство $1 + \frac{t}{4R^2} \geq \frac{1}{4}$, получаем

$$\Delta v + \tfrac{1}{2} |\nabla v|^2 \; \geq \; - \; \frac{\mu}{R^2} \qquad \text{на} \qquad B_R \times (-3R^2, 0)$$

что и требовалось доказать, см. пункт **5**.

16. **Избавляется от условия $u \geq \varepsilon > 0$**

Мы доказали неравенство Харнака при дополнительном предположении $u \geq \varepsilon > 0$ в Q_{2R}. Предположим теперь, что $u \geq 0$ в Q_{2R} и обозначим $u^\varepsilon := u + \varepsilon$. Тогда u^ε является решением уравнения $\partial_t u^\varepsilon - \mathcal{L} u^\varepsilon = 0$ в Q_{2R} и, следовательно,

$$\inf_{Q_R(0)} u^\varepsilon \; \geq \; e^{-\gamma} \sup_{Q_R(z_R)} u^\varepsilon, \qquad z_R := (0, -2R^2),$$

откуда

$$\inf_{Q_R(0)} u + \varepsilon \; \geq \; e^{-\gamma} \sup_{Q_R(z_R)} u \; + \; e^{-\gamma} \varepsilon$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to +0$, получаем требуемую оценку. $\square$

3.3 Оценка осцилляции

1. **Определение осцилляции**

   Обозначим
$$M(z_0;R) \ := \ \sup_{Q_R(z_0)} u, \qquad M(z_0;R) \ := \ \inf_{Q_R(z_0)} u,$$
$$\omega(z_0;R) \ := \ M(z_0;R) - m(z_0;R) \ \equiv \ \operatorname*{osc}_{Q_R} u$$

   Точку $z_0 = 0$ в обозначениях будем опускать: $M(R) = M(0,R)$ итд.

2. **Оценка осцилляции**

   Теорема. Пусть $u \in C(\bar{Q}_{2R}) \cap C^\infty(Q_{2R})$ удовлетворяет уравнению
$$\partial_t u - \Delta u \ = \ 0 \qquad \text{в} \quad Q_{2R} \tag{$*$}$$

   Тогда справедливо неравенство
$$\operatorname*{osc}_{Q_R} u \ \le \ \delta \ \operatorname*{osc}_{Q_{2R}} u$$

   в котором $\delta \in (0,1)$, $\delta = 1 - \frac{1}{c_*}$, где $c_* > 1$ — постоянная из неравенства Харнака.

   Доказательство. Функции
$$\begin{cases} v(x,t) \ := \ u(x,t) - m(2R) \\ w(x,t) \ := \ M(2R) - u(x,t) \end{cases}$$

   неотрицательны в Q_{2R} и удовлетворяют уравнению $(*)$. По неравенству Харнака
$$\begin{cases} \sup\limits_{Q_R(z_R)} v \ \le \ c_* \ \inf\limits_{Q_R} v, \\ \sup\limits_{Q_R(z_R)} w \ \le \ c_* \ \inf\limits_{Q_R} w, \end{cases}$$

   где мы обозначили $z_R := (0, -2R^2)$. Эти неравенства эквивалентны соотношениям
$$\begin{cases} \frac{1}{c_*} \big(M(z_R;R) - m(2R) \big) \ \le \ m(R) - m(2R) \\ \frac{1}{c_*} \big(M(2R) - m(z_R;R) \big) \ \le \ M(2R) - M(R) \end{cases}$$

   Складывая эти неравенства, получаем
$$\tfrac{1}{c_*} \omega(2R) \ + \ \tfrac{1}{c_*} \omega(z_R;R) \ \le \ \omega(2R) - \omega(R)$$

   Отбрасывая неотрицательное слагаемое $\frac{1}{c_*} \omega(z_R;R)$, получаем
$$\omega(R) \ \le \ \Big(1 - \tfrac{1}{c_*} \Big) \, \omega(2R).$$

   □

3.4 Теорема Лиувилля

1. **Теорема Лиувилля**

   Теорема. Пусть $\Pi_- := \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0)$, и пусть $u \in C^\infty(\Pi_-)$ — *античное* решение уравнения теплопроводности, т.е. u удовлетворяет уравнению теплопроводности на промежутке времени $(-\infty, 0)$:
   $$\partial_t u - \Delta u \ = \ 0 \qquad \text{в} \qquad \Pi_-.$$
   Предположим дополнительно, что
   $$u \in L_\infty(\Pi_-).$$
   Тогда $u = const$ в Π_-.

   Доказательство. Обозначим
   $$M := \|u\|_{L_\infty(\Pi_-)}, \qquad \omega(R) := \operatorname*{osc}_{Q_R} u$$
   и пусть $R > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ — произвольные. Тогда из оценки осцилляции получаем
   $$\omega(R) \ \le \ \delta\,\omega(2R) \ \le \ \delta^2\,\omega(4R) \ \le \ \dots \ \le \ \delta^N\,\omega(2^N R) \ \le \ \delta^N\,2M$$
   Переходя к пределу при $N \to \infty$ с учетом $\delta < 1$ получаем
   $$\operatorname*{osc}_{Q_R} u \ = \ 0, \qquad \forall\ R > 0,$$
   откуда вытекает, что $u \equiv const$.

2. **Контрпример при $b \neq 0$**

   Как показывает следующий контрпример, в сформулированном нами варианте теоремы Лиувилля дрифт отсутствует по-существу. Дело в том, что при наличии в уравнении дрифта константа в оценке осцилляции зависит от некоторых норм дрифта. При итерациях этой оценки константа будет менятся неконтролируемым образом и мы не сможем провести доказательство. Если мы хотим включить в уравнение дрифт, нам следует установить "правильную" зависимость константы в неравенстве Харнака от некоторых (масштабно-инвариантных) норм дрифта. В конце параграфа мы приведем без доказательства формулировку теоремы Лиувилля для параболического уравнения с дрифтом.

   Приводимый ниже контрпример (J. Spruck) показывает, что для справедливости теоремы Лиувилля, скажем, одного лишь условия $b \in L_\infty(\Pi_-) \cap C^\infty(\Pi_-)$ заведомо недостаточно.

   Теорема. Пусть $n = 1$, и положим
   $$b(x) \ := \ \frac{2x}{1 + x^2}, \qquad u(x) \ := \ \operatorname{arctg} x$$

Тогда $b \in L_\infty(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$, $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ является стационарным решением уравнения

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + b(x)\frac{du}{dx} \;=\; 0 \qquad \text{в} \qquad \mathbb{R},$$

и при этом

$$u \in L_\infty(\mathbb{R}), \qquad u \;\neq\; const$$

3. **Теорема Лиувилля для уравнения с дрифтом**

Теорема. Пусть $b \in L_{s,l}(\Pi_-) \cap C^\infty(\Pi_-)$, где $s \in (n, +\infty]$, $l \in [2, \infty)$,

$$\|b\|_{L_{s,l}(\Pi_-)} \;:=\; \left(\int\limits_{-\infty}^{0} \|b(\cdot,t)\|^l_{L_s(\mathbb{R}^n)}\,dt\right)^{1/l}, \qquad \boxed{\frac{n}{s} + \frac{2}{l} = 1}$$

и пусть $u \in C^\infty(\Pi_-)$ — *античное* решение уравнения

$$\partial_t u - \Delta u + b(x,t)\cdot\nabla u \;=\; 0 \qquad \text{в} \qquad \Pi_-.$$

Предположим дополнительно, что

$$u \in L_\infty(\Pi_-).$$

Тогда $u = const$ в Π_-.

Доказательство: без доказательства. $\square$

3.5 Локальная гладкость слабых решений

1. L_2–**оценка старших производных**

   Теорема. Пусть $f\in L_2(Q_{2R})$, и предположим, что
$$\nabla a \in L_\infty(Q_{2R}), \qquad \|\nabla a\|_{L_\infty(Q_{2R})} \ \le \ \frac{\nu_2}{R}.$$
   Пусть $u\in L_{2,\infty}(Q_{2R})\cap W_2^{1,0}(Q_{2R})$ — слабое решение уравнения
$$\partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) \ = \ f \quad \text{в} \quad Q_{2R},$$
   то есть
$$\int\limits_{Q_{2R}} \Big(-u\partial_t\eta + a\nabla u\cdot\nabla\eta\Big)\, dxdt \ = \int\limits_{Q_{2R}} f\eta\, dxdt, \qquad \forall\, \eta\in C_0^\infty(Q_{2R}).$$
   Тогда $u\in W_2^{2,1}(Q_R)$ и справедлива оценка
$$\|\partial_t u\|_{L_2(Q_R))} \ + \ \|\nabla^2 u\|_{L_2(Q_R)} \ \le \ \frac{c}{R}\, \|\nabla u\|_{L_2(Q_{2R})} \ + \ c\,\|f\|_{L_2(Q_{2R})}$$
   в которой постоянная $c>0$ зависит только от n, ν_0, ν_1 и ν_2.

2. **План доказательства оценки вторых производных**

   Предположим, что a, f, u — гладкие.

   1. Продиффиренцируем уравнение по x_k. Получим
$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Big| \quad \partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) = f \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_t u_{,k} - \operatorname{div}(a\nabla u_{,k}) = \operatorname{div}\Big(\frac{\partial a}{\partial x_k}\nabla u\Big) + f_{,k}$$

   2. Пусть $\zeta\in C_0^\infty(Q_{2R})$ — срезающая функция, такая что
$$\zeta\equiv 1 \quad \text{на} \quad Q_R, \qquad 0\le\zeta\le 1, \qquad |\partial_t\zeta| + |\nabla\zeta|^2 \ \le \ \tfrac{c}{R^2}$$
   Умножим умножим соотношение
$$\partial_t u_{,k} - \operatorname{div}(a\nabla u_{,k}) = \operatorname{div}\Big(\frac{\partial a}{\partial x_k}\nabla u\Big) + f_{,k} \qquad \Big|\ \cdot\zeta^2 u_{,k}, \quad \int\limits_\Omega \dots\ dx$$
   на $w:=\zeta^2 u_{,k}$ и результат принтегрируем по Ω. С учетом формулы интегрирования по частям и соотношения
$$\nabla(\zeta^2 u_{,k}) \ = \ \zeta^2\nabla u_{,k} \ + \ 2\zeta u_{,k}\nabla\zeta$$

получаем тождество (отметим, что по k подразумевается суммирование от 1 до n)

$$\int\limits_{B_{2R}} \Big(\zeta^2 \underbrace{u_{,k}\partial_t u_{,k}}_{=\frac12\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2} + \zeta^2 \underbrace{a\nabla u_{,k}\cdot\nabla u_{,k}}_{\ge \nu_0|\nabla^2 u|^2}\Big)\,dx \;=\; -2\int\limits_{B_{2R}} \zeta a\nabla u_{,k}\cdot u_{,k}\nabla\zeta\,dx\; -$$

$$-\int\limits_{B_{2R}} \frac{\partial a}{\partial x_k}\nabla u\cdot\Big(\zeta^2\nabla u_{,k} + u_{,k}\nabla\zeta^2\Big)\,dx \;+\; \int\limits_{B_{2R}} f_{,k}\zeta^2 u_{,k}\,dx$$

Последнее слагаемое оцениваем как

$$\int\limits_{B_{2R}} f_{,k}\zeta^2 u_{,k}\,dx \;=\; -\int\limits_{B_{2R}} f(\zeta^2 u_{,k})_{,k}\,dx \;=\; -\int\limits_{B_{2R}} f(\zeta^2 u_{,kk} + u_{,k}\zeta^2_{,k})\,dx$$

3. Из полученного тождества стандратными рассуждениями выводится оценка

$$\frac12\frac{d}{dt}\|\zeta\nabla u\|^2_{L_2(B_{2R})} + \frac{\nu_0}{2}\,\|\zeta\nabla^2 u\|^2_{L_2(B_{2R})} \;\le\; \frac{c}{R^2}\,\|\nabla u\|^2_{L_2(B_{2R})} \;+\; c\,\|f\|^2_{L_2(B_{2R})}$$

Интегрируя эту оценку по $t\in(-4R^2,0)$, с учетом $\zeta\equiv 1$ на Q_R получаем

$$\sup_{t\in(-R^2,0)}\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(B_R)} + \|\nabla^2 u\|^2_{L_2(Q_R)} \;\le\; \frac{c}{R^2}\,\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_{2R})} \;+\; c\,\|f\|^2_{L_2(Q_{2R})}$$

4. Оценка $\partial_t u$ получается из уравнения $\partial_t v \;=\; \operatorname{div}(a\nabla u) + f$ в $Q_R \quad\Longrightarrow$

$$\|\partial_t u\|_{L_2(Q_R)} \;\le\; c\Big(\|\operatorname{div}(a\nabla u)\|_{L_2(Q_R)} + \|f\|_{L_2(Q_R)}\Big)$$

с учетом оценки

$$\|\operatorname{div}(a\nabla u)\||_{L_2(Q_R)} \;\le\; c\,\Big(\nu_1\,\|\nabla^2 u\|_{L_2(Q_R)} + \frac{\nu_2}{R}\,\|\nabla u\|_{L_2(Q_R)}\Big)$$

3. Свойства конечных разностей

Теорема. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\Omega'\Subset\Omega$, $d:=\operatorname{dist}\{\bar\Omega',\partial\Omega\}>0$. Для $k=1,\dots,n$, $|h|<d$ и $x\in\Omega'$ обозначим

$$\Delta^k_h u(x) := u(x+he_k) - u(x),$$

где e_k — k-ый орт базиса $\mathbb{R}^n$. Пусть $1\le p<+\infty$ и $u\in L_p(\Omega)$. Тогда

1) для любого $|h|<d$ и любой $\eta\in C^\infty_0(\Omega')$

$$\int\limits_\Omega \tfrac1h\Delta^k_h u\;\eta\,dx \;=\; \int\limits_\Omega u\;\tfrac1h\Delta^k_{-h}\eta\,dx;$$

2) если $1 < p < +\infty$ и существует $M > 0$, такая что

$$\sup_{|h|<d} \left\| \tfrac{1}{h}\Delta_h^k u \right\|_{L_p(\Omega')} \ \leq \ M,$$

то существует обобщенная производная $\frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_p(\Omega')$ и

$$\left\| \tfrac{\partial u}{\partial x_k} \right\|_{L_p(\Omega')} \ \leq \ M$$

3) если $u \in W_p^1(\Omega)$, то для любого $|h| < d$ и любого $k = 1, \dots, n$

$$\left\| \tfrac{1}{h}\Delta_h^k u \right\|_{L_p(\Omega')} \ \leq \ \left\| \tfrac{\partial u}{\partial x_k} \right\|_{L_p(\Omega)}$$

4. **Доказательство гладкости решений**

1. Слабое решение $\forall\, \tilde w \in C_0^\infty(B_{2R})$, $\forall\, \xi \in C_0^\infty(-4R^2, 0)$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{-4R^2}^{0} \Big(-(u(t), \tilde w)\xi'(t) + (a(t)\nabla u(t), \nabla \tilde w)\xi(t) \Big)\, dxdt \ = \ \int\limits_{-4R^2}^{0} (f(t), \tilde w)\xi(t)\; dt$$

Пусть $w \in C_0^\infty(B_{\frac{3R}{2}})$ — произвольная, $k \in \{1, \dots, n\}$ и $|h| < \frac{R}{2}$. Тогда

$$\tilde w \ := \ \tfrac{1}{h}\Delta_{-h}^k w \ \in C_0^\infty(B_{2R})$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{-4R^2}^{0} \Big(-(u(t), \tfrac{1}{h}\Delta_{-h}^k w)\xi'(t) + (a(t)\nabla u(t), \tfrac{1}{h}\Delta_{-h}^k \nabla w)\xi(t) \Big)\; dt \ = \ \int\limits_{-4R^2}^{0} (f(t), \tfrac{1}{h}\Delta_{-h}^k w)\xi(t)\; dt$$

Поскольку $\operatorname{supp} w \subset B_{\frac{3R}{2}}$ и $h < \frac{R}{2}$, мы можем воспользоваться “формулой интегрирования по частям” для конечных разностей:

$$\int\limits_{B_{2R}} u(t)\tfrac{1}{h}\Delta_{-h}^k w\; dx \ = \ \int\limits_{B_{2R}} \tfrac{1}{h}\Delta_h^k u(t)\, w\; dx$$

$$\int\limits_{B_{2R}} a(t)\nabla u(t) \cdot \tfrac{1}{h}\Delta_{-h}^k \nabla w\; dxdt \ = \ \int\limits_{B_{2R}} \tfrac{1}{h}\Delta_h^k\Big(a(t)\nabla u(t)\Big) \cdot \nabla w\; dx$$

$$\int\limits_{B_{2R}} f(t)\tfrac{1}{h}\Delta_{-h}^k w\; dx \ = \ \int\limits_{B_{2R}} \tfrac{1}{h}\Delta_h^k f(t)\, w\; dx$$

Используя соотношение

$$\Delta_h^k\Big(a\nabla u\Big)(x,t) \ = \ a^h(x,t)\Delta_h^k \nabla u(x,t) \ + \ \Big(\Delta_h^k a\Big)(x,t)\nabla u(x,t), \qquad (x,t) \in Q_{\frac{3R}{2}},$$

где
$$a^h(x,t) := a(x+he_k,t),$$
для любых $w\in C_0^\infty(B_{\frac{3R}{2}})$, $\xi\in C_0^\infty(-4R^2,0)$ мы получаем тождество
$$\int\limits_{-4R^2}^{0}\Big(-(v(t),w)\xi'(t)+(a^h(t)\nabla v(t),\nabla w)\xi(t)\Big)\,dt \;=\; \int\limits_{-4R^2}^{0}\Big((g(t),w)+(G(t),\nabla w)\Big)\xi(t)\,dt$$
где мы обозначили
$$v \;:=\; \tfrac{1}{h}\Delta_h^k u, \qquad g \;:=\; \tfrac{1}{h}\Delta_h^k f, \qquad G \;:=\; \tfrac{1}{h}\Delta_h^k a\nabla u$$
Последнее соотношение означает, что v является обобщенным решением уравнения
$$\partial_t v-\operatorname{div}(a^h\nabla v) \;=\; g-\operatorname{div}G \quad \text{в} \quad B_{\frac{3R}{2}}\times(-4R^2,0)$$
Поэтому $\partial_t v\in L_2(-4R^2,0;W_2^{-1}(B_{\frac{3R}{2}}))$ и $\forall\, w\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B_{\frac{3R}{2}})$ выполняется тождество
$$\langle\partial_t v(t),w\rangle+(a^h(t)\nabla v(t),\nabla w) \;=\; (g(t),w)+(G(t),\nabla w), \qquad \text{п.в.} \quad t\in(0,T).$$

2. Пусть $\zeta\in C_0^\infty(B_{\frac{3R}{2}})$ — срезающая функция, такая что
$$\zeta\equiv 1 \quad \text{на} \quad B_R, \qquad 0\le\zeta\le 1, \qquad |\nabla\zeta|\le\tfrac{C}{R}$$
Положим
$$w \;:=\; \zeta^2 v \;\in\; \overset{\circ}{W}{}_2^1(B_{\frac{3R}{2}})$$
С учетом соотношения
$$\nabla w \;=\; \zeta^2\nabla v \;+\; 2\zeta v\nabla\zeta$$
для п.в $t\in(0,T)$ получаем тождество
$$\underbrace{\langle\partial_t v(t),\zeta^2 v(t)\rangle}_{=\;\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\zeta v(t)\|^2_{L_2(B_{2R})}}+\underbrace{(\zeta^2 a^h(t)\nabla v(t),\nabla v(t))}_{\ge\;\nu_0\,\|\zeta\nabla v(t)\|^2_{L_2(B_{2R})}} \;=$$
$$-2(\zeta a^h(t)\nabla v(t),v(t)\nabla\zeta)+(g(t),\zeta^2 v(t))+(G(t),\zeta^2\nabla v(t))+2(\zeta G(t),v(t)\nabla\zeta)$$
Слагаемое, содержащее g при помощи свойства 1) конечных разностей
$$(g(t),\zeta^2 v(t)) \;=\; \int\limits_{B_{\frac{3R}{2}}}\tfrac{1}{h}\Delta_h^k f\zeta^2 v\,dx \;=\; \int\limits_{B_{2R}} f\tfrac{1}{h}\Delta_{-h}^k\big(\zeta^2 v\big)\,dx$$
С учетом свойства 3) конечных разностей оцениваем
$$|(g(t),\zeta^2 v(t))| \;\le\; \|f\|_{L_2(B_{2R})}\Big\|\tfrac{1}{h}\Delta_{-h}^k(\zeta^2 v)\Big\|_{L_2(B_{2R})} \;\le\; \|f\|_{L_2(B_{2R})}\|(\zeta^2 v)_{,k}\|_{L_2(B_{2R})} \;\le$$
$$\le\; \|f\|_{L_2(B_{2R})}\left\|\zeta^2 v_{,k}+v\zeta^2_{,k}\right\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} \;\le$$
$$\le\; \frac{\nu_0}{8}\,\|\zeta\nabla v(t)\|^2_{L_2(B_{2R})}+\frac{c}{R^2}\Big(\|f(t)\|^2_{L_2(B_{2R})}+\|v(t)\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})}\Big)$$

Аналогично,
$$\|G(t)\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} \ \le\ \|\tfrac{1}{h}\Delta_h^k a(t)\|_{L_\infty(B_{\frac{3R}{2}})}\, \|\nabla u(t)\|_{L_2(B_{2R})} \ \le$$
$$\le \|\tfrac{\partial a}{\partial x_k}(t)\|_{L_\infty(B_{2R})}\, \|\nabla u(t)\|_{L_2(B_{2R})} \ \le\ \frac{c}{R}\, \|\nabla u(t)\|_{L_2(B_{2R})},$$

3. Из полученных соотношений стандратными рассуждениями выводится оценка
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\zeta v(t)\|^2_{L_2(B_{2R})} + \frac{\nu_0}{2}\, \|\zeta \nabla v(t)\|^2_{L_2(B_{2R})} \ \le\ \frac{c}{R^2}\Big(\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(B_{2R})} + \|v(t)\|^2_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})}\Big) + c\,\|f\|^2_{L_2(B_{2R})}$$
Умножая это соотношение на срезающую функцию $\zeta \in C^\infty((-\frac{9R^2}{4}, 0])$, такую что
$$\xi \equiv 1 \quad \text{на} \quad [-R^2, 0], \qquad |\xi'(t)| \le \frac{c}{R^2}$$
и интегрируя результат по $t \in (-4R^2, 0)$, получаем
$$\sup_{t\in(-R^2,0)} \|v(t)\|^2_{L_2(B_R)} + \|\nabla v\|^2_{L_2(Q_R)} \ \le\ \frac{c}{R^2}\Big(\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_{2R})} + \|v\|^2_{L_2(Q_{\frac{3R}{2}})}\Big) \ +\ c\,\|f\|^2_{L_2(Q_{2R})}$$
Правая часть этого соотношения оценивается равномерно по $|h| < \frac{R}{2}$:
$$\|v\|_{L_2(Q_{\frac{3R}{2}})} \ :=\ \big\|\tfrac{1}{h}\Delta_h^k u\big\|_{L_2(Q_{\frac{3R}{2}})} \ \le\ \|u_{,k}\|_{L_2(Q_{2R})} \ \le\ \|\nabla u\|_{L_2(Q_{2R})}$$
Таким образом, мы получили оценку
$$\sup_{|h|<\frac{R}{2}} \big\|\tfrac{1}{h}\Delta_h^k \nabla u\big\|_{L_2(Q_R)} \ \le\ \frac{c}{R}\,\|\nabla u\|_{L_2(Q_{2R})} \ +\ c\,\|f\|_{L_2(Q_{2R})}$$
из которой вытекает включение $\nabla u_{,k} \in L_2(Q_R)$, $\forall\ k = 1, \ldots, n$, а также оценка
$$\big\|\nabla^2 u\big\|_{L_2(Q_R)} \ \le\ \frac{c}{R}\,\|\nabla u\|_{L_2(Q_{2R})} \ +\ c\,\|f\|_{L_2(Q_{2R})}$$

4. Соотношение
$$\partial_t u \ =\ \operatorname{div}(a\nabla u) + f \qquad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q_{2R})$$
с учетом включения
$$\operatorname{div}(a\nabla u) + f \ \in\ L_2(Q_R)$$
означает, что функция $u \in L_2(Q_T)$ имеет в Q_R обобщенную производную по Соболеву $\partial_t u \in L_2(Q_R)$, и эта производная равна $\operatorname{div}(a\nabla u) + f$ п.в. в Q_R. Следовательно,
$$\|\partial_t u\|_{L_2(Q_R)} \ \le\ \|\operatorname{div}(a\nabla u)\|_{L_2(Q_R)} + \|f\|_{L_2(Q_R)} \ \le\ c\Big(\|\nabla^2 u\|_{L_2(Q_R)} + \|f\|_{L_2(Q_R)}\Big)$$
и с учетом уже полученной оценки
$$\|\nabla^2 u\|_{L_2(Q_R)} \ \le\ \frac{c}{R}\,\|\nabla u\|_{L_2(Q_{2R})} \ +\ c\,\|f\|_{L_2(Q_{2R})}$$
получаем окончательно
$$\|\partial_t u\|_{L_2(Q_R)} + \|\nabla^2 u\|_{L_2(Q_R)} \ \le\ \frac{c}{R}\,\|\nabla u\|_{L_2(Q_{2R})} \ +\ c\,\|f\|_{L_2(Q_{2R})}$$

□

5. **Локальная гладкость слабых решений**

Теорема. В условиях предыдущей теоремы

$$a \in C^\infty(Q_R), \quad f \in C^\infty(Q_R) \quad \Longrightarrow \quad u \in C^\infty(Q_R).$$

Доказательство. Самостоятельно. $\square$