4 Предварительные сведения

Система уравнений Навье-Стокса описывает поле скоростей вязкой несжимаемой жидкости $u : Q_T \to \mathbb{R}^3$ и давление $p : Q_T \to \mathbb{R}$ в зависимости от начальной скорости $a : \Omega \to \mathbb{R}^3$ и плотности действующей на жидкость объемной силы $f : Q_T \to \mathbb{R}$ (например, силы тяжести):

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u \; - \; \Delta u \; + \; (u \cdot \nabla) u \; + \; \nabla p \; = \; f \\ \operatorname{div} u \; = \; 0 \\ u|_{t=0} \; = \; a, \qquad u|_{\partial\Omega \times (0,T)} \; = \; 0 \end{array} \right. \quad \text{в} \quad Q_T \tag{NS}$$

Для простоты мы предполагаем плотность жидкости и коэффициент вязкости равными единице. Математически уравнения Навье-Стокса представляют из себя систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (отдаленно напоминающую прабаролическую) с квадратичными по u младшими членами.

4.1 Уравнение $\operatorname{div} u = f$

1. **Существование функции с заданной дивергенцией**

   Теорема. Пусть $s \in (1, +\infty)$. Для любого $g \in L_s(\Omega)$, такого что $[g]_\Omega = 0$, существует функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_s(\Omega)$, являющаяся решением задачи

   $$\left\{ \begin{array}{c} \operatorname{div} u = g \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega \end{array} \right.$$

   и удовлетворяющая оценке
   $$\|u\|_{W^1_s(\Omega)} \;\le\; c\, \|g\|_{L_s(\Omega)}$$
   в которой постоянная $c > 0$ зависит только от Ω, n, s. Более того, соответствие $g \mapsto u$ является линейным, от есть оно задается ограниченным линейным оператором

   $$T : \overset{\circ}{L}_s(\Omega) := \{\; g \in L_s(\Omega) : \; [g]_\Omega = 0 \;\} \;\to\; \overset{\circ}{W}{}^1_s(\Omega), \qquad Tg = u, \qquad \|Tg\|_{W^1_s(\Omega)} \le c\, \|g\|_{L_s(\Omega)}$$

2. **Ингредиенты доказательства**

   - Разрешимость задачи Неймана
   - Теорема о следах
   - Продолжение внутрь области
   - Значения ротора на границе

3. **Разрешимость задачи Неймана**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса C^2, $1 < s < +\infty$. Для любой функции $g \in L_s(\Omega)$, такой что $\int\limits_{\Omega} g(x)\ dx = 0$, существует единственная функция $\varphi \in W^2_s(\Omega)$, такая что $\int\limits_{\Omega} \varphi(x)\ dx = 0$ и

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = g \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

При этом справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{W^2_s(\Omega)} \ \le\ C(n,s,\Omega)\ \|g\|_{L_s(\Omega)}$$

4. **Теорема о следах**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса C^2, $1 < s < +\infty$. Тогда для любой $\varphi \in W^2_s(\Omega)$ справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{W_s^{2-\frac{1}{s}}(\partial\Omega)} \ \le\ C(n,s,\Omega)\ \|\varphi\|_{W^2_s(\Omega)}$$

5. **Продолжение внутрь области**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса C^2, $1 < s < +\infty$. Существует ограниченный линейный оператор

$$T:\ W_s^{2-\frac{1}{s}}(\partial\Omega)\ \times\ W_s^{1-\frac{1}{s}}(\partial\Omega) \quad \to \quad W^2_s(\Omega),$$

такой что для любых $a \in W_s^{2-\frac{1}{s}}(\partial\Omega)$, $b \in W_s^{1-\frac{1}{s}}(\partial\Omega)$ функция $w := T(a,b)$ обладает свойствами

1) $w \in W^2_s(\Omega)$
2) $w|_{\partial\Omega} = a, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = b$
3) $\|w\|_{W^2_s(\Omega)} \ \le\ C(n,s,\Omega)\ \Big(\ \|a\|_{W_s^{2-\frac{1}{s}}(\partial\Omega)} + \|b\|_{W_s^{1-\frac{1}{s}}(\partial\Omega)}\ \Big)$

6. **Значения ротора на границе**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область класса C^2, $1 < s < +\infty$. Предположим, что $A \in W^2_s(\Omega;\mathbb{R}^3)$ такова, что

$$A \ =\ 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega.$$

Тогда

$$\operatorname{rot} A \ =\ \nu \times \frac{\partial A}{\partial \nu} \quad \textit{на} \quad \partial\Omega.$$

7. Доказательство основного результата в случае $n = 3$

Пусть $\varphi \in W^2_s(\Omega)$ — решение задачи Неймана

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = g \quad \text{в} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Тогда по Лемме 1

$$\|\varphi\|_{W^2_s(\Omega)} \;\le\; C\;\|g\|_{L_s(\Omega)}$$

Применяя Лемму 2, построим векторное поле $A \in W^2_s(\Omega; \mathbb{R}^3)$, такое что

$$A|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = \nabla\varphi \times \nu\,\Big|_{\partial\Omega}$$

Тогда, с учетом Леммы 3,

$$\|A\|_{W^2_s(\Omega)} \;\le\; C\;\|\nabla\varphi\times\nu\|_{W^{1-\frac{1}{s}}_s(\partial\Omega)} \;\le\; C\;\|\varphi\|_{W^{2-\frac{1}{s}}_s(\partial\Omega)} \;\le\; C\;\|\varphi\|_{W^2_s(\Omega)}$$

Положим

$$u = \operatorname{rot} A - \nabla\varphi \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Тогда

$$u \in W^1_s(\Omega), \qquad \operatorname{div} u = g \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \qquad \|u\|_{W^1_s(\Omega)} \;\le\; C\;\|g\|_{L_s(\Omega)},$$

и, поскольку в силу Леммы 4

$$(\operatorname{rot} A)|_{\partial\Omega} \;=\; \nu\times\frac{\partial A}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} \;=\; \nu\times(\nabla\varphi\times\nu)|_{\partial\Omega} \;=\; \Big(\nabla\varphi - \nu\,\underbrace{(\nu\cdot\nabla\varphi)}_{=\,0}\Big)\Big|_{\partial\Omega} \;=\; \nabla\varphi|_{\partial\Omega}$$

получаем $u|_{\partial\Omega} = (\operatorname{rot} A)|_{\partial\Omega} - \nabla\varphi|_{\partial\Omega} = 0$. Теорема доказана. $\square$

4.2 Пространства соленоидальных векторных полей

1. **Определения подпространств соленоидальных векторных полей**

   Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $1 \le s < +\infty$, $s' = \frac{s}{s-1}$.

$$J_0^\infty(\Omega) \ := \ \{ \ u \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n) \ | \ \operatorname{div} u = 0 \ \text{ в } \ \Omega \ \}$$

$$\overset{\circ}{J}{}^1_s(\Omega) \ := \ \text{Closure}_{\ W^1_s(\Omega;\mathbb{R}^n)} \ J_0^\infty(\Omega)$$

$$\hat{J}^1_s(\Omega) \ := \ \{ \ u \in \overset{\circ}{W}{}^1_s(\Omega;\mathbb{R}^n) \ | \ \operatorname{div} u = 0 \ \text{ п.в. в } \ \Omega \ \}$$

   Замечание. Очевидно, что $\overset{\circ}{J}{}^1_s(\Omega)$ — подпространство $\hat{J}^1_s(\Omega)$.

2. **Основной результат**

   Теорема. Пусть $s \in (1, +\infty)$ и функционал $l \in W_s^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ обладает свойством

$$l(\eta) \ = \ 0, \qquad \forall \ \eta \in J_0^\infty(\Omega).$$

   Тогда существует единственная функция $p \in L_s(\Omega)$, $[p]_\Omega = 0$, такая что

$$l(\eta) \ = \ \int\limits_\Omega p(x) \operatorname{div} \eta(x) \ dx, \qquad \forall \ \eta \in \overset{\circ}{W}{}^1_{s'}(\Omega),$$

   и при этом справедлива оценка

$$\|p\|_{L_s(\Omega)} \ \le \ c \, \|l\|_{W_s^{-1}(\Omega)}$$

3. **Ингредиенты доказательства основного результата**

   - Теорема о плотности $J_0^\infty(\Omega)$ в $\hat{J}^1_2(\Omega)$
   - Теорема о разрешимости уравнения $\operatorname{div} u = g$
   - $(\overset{\circ}{L}_{s'}(\Omega))^* \simeq \overset{\circ}{L}_s(\Omega)$ при $s \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$

4. **Теорема о плотности для ограниченных областей**

   Теорема. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная липшицева область, $1 < s < +\infty$. Тогда*

$$\overset{\circ}{J}{}^1_s(\Omega) \ = \ \hat{J}^1_s(\Omega).$$

   Доказательство: Это тонкий аналитический факт, доказательство которого мы не включаем в наш курс с целью экономии времени. Его доказательство можно найти, например, в [**?**, Theorem 5.8]. □

   Контрпример (Heywood). Существует неограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, такая что

$$\overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega) \ \subset \ \hat{J}^1_2(\Omega), \qquad \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega) \ \ne \ \hat{J}^1_2(\Omega).$$

5. **Доказательство основного результата**

1. Докажем существование функции p. Пусть $T:\overset{\circ}{L}_{s'}(\Omega)\ \to \overset{\circ}{W}{}^1_{s'}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ — ограниченный оператор из §1. Обозначим $F := l\circ T$, т.е.

$$F:\overset{\circ}{L}_{s'}(\Omega)\to\mathbb{R},\qquad F(g)\ =\ l(Tg),\qquad \forall\ g\in L_{s'}(\Omega).$$

Тогда очевидно, что $F\in(\overset{\circ}{L}_{s'}(\Omega))^*$ (как композиция ограниченных). По теореме Рисса существует $p\in\overset{\circ}{L}_s(\Omega)$, такая, что

$$F(g)\ =\ \int\limits_\Omega p(x)g(x)\ dx,\qquad \forall\ g\in L_{s'}(\Omega).$$

Пусть $\eta\in\overset{\circ}{W}{}^1_{s'}(\Omega)$ — произвольная и $g:=\operatorname{div}\eta$, $g\in\overset{\circ}{L}_{s'}(\Omega)$. Положим $\tilde\eta = Tg$. Тогда

$$\operatorname{div}\tilde\eta\ =\ g\ =\ \operatorname{div}\eta\quad \text{п.в. в}\ \ \Omega\qquad\Longrightarrow\qquad \tilde\eta-\eta\in\hat J^1_{s'}(\Omega)\qquad\Longrightarrow\qquad l(\tilde\eta)=l(\eta).$$

Следовательно,

$$l(\eta)\ =\ l(\tilde\eta)\ =\ l(Tg)\ =\ F(g)\ =\ \int\limits_\Omega p\,g\ dx\ =\ \int\limits_\Omega p\ \operatorname{div}\eta\ dx$$

то есть

$$l(\eta)\ =\ \int\limits_\Omega p(x)\operatorname{div}\eta(x)\ dx,\qquad \forall\ \eta\in\overset{\circ}{W}{}^1_{s'}(\Omega)$$

2. Докажем оценку $\|p\|_{L_s(\Omega)}$. По теореме Рисса

$$\|p\|_{L_s(\Omega)}\ =\ \|F\|_{(\overset{\circ}{L}_{s'}(\Omega))^*}\ \le\ \|l\circ T\|_{(\overset{\circ}{L}_{s'}(\Omega))^*}\ \le$$
$$\le\ \|T\|_{L_{s'}(\Omega)\to\overset{\circ}{W}{}^1_{s'}(\Omega)}\,\|l\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{s'}(\Omega)\to\mathbb{R}}\ =\ c(\Omega,s)\,\|l\|_{W^{-1}_s(\Omega)}$$

3. Докажем единственность функции p. Пусть p_1 и $p_2\in\overset{\circ}{L}_s(\Omega)$ таковы, что

$$\int\limits_\Omega (p_1-p_2)\operatorname{div}\eta\,dx = 0,\qquad \forall\ \eta\in\overset{\circ}{W}{}^1_{s'}(\Omega)$$

Обозначим $p:=p_1-p_2\in\overset{\circ}{L}_s(\Omega)$. Тогда $|p|^{s-2}p\in L_{s'}(\Omega)$ и поэтому существует $\eta_*\in\overset{\circ}{W}{}^1_{s'}(\Omega)$ являющаяся решением задачи

$$\left\{\begin{array}{c}\operatorname{div}\eta_* = |p|^{s-2}p-\big[|p|^{s-2}p\big]_\Omega\quad \text{п.в. в}\quad\Omega\\ \eta_*|_{\partial\Omega}=0\end{array}\right.$$

Подставляя в полученное тождество $\eta=\eta_*$, находим

$$0\ =\ \int\limits_\Omega p\operatorname{div}\eta_*\,dx\ =\ \|p\|^s_{L_s(\Omega)}\ -\ \big[|p|^{s-2}p\big]_\Omega\underbrace{\int\limits_\Omega p\,dx}_{=0}\ =\ \|p\|^s_{L_s(\Omega)},$$

т.е. $p_1=p_2$ п.в. в Ω. $\square$

4.3 Разложение Гельмгольца-Вейля

1. **Обозначения**

Пусть $s \in (1, +\infty)$. Обозначим через $\overset{\circ}{J}_s(\Omega)$ и $G_s(\Omega)$ п/пр–ва в $L_s(\Omega) := L_s(\Omega; \mathbb{R}^n)$:

- $\overset{\circ}{J}_s(\Omega) \ := \ \text{Closure}_{\,L_s(\Omega)} \ J_0^\infty(\Omega)$
- $G_s(\Omega) \ := \ \{ \ v \in L_s(\Omega) \mid \exists\, \varphi \in W^1_s(\Omega) : \ v = \nabla \varphi \ \text{ п.в. в } \ \Omega \ \}$

В случае $s = 2$ иногда будем обозначать $\overset{\circ}{J}(\Omega) := \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ и $G(\Omega) := G_2(\Omega)$.

2. **Разложение Гельмгольца–Вейля**

Теорема. Подпространства $\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ и $G_2(\Omega)$ ортогональны в $L_2(\Omega)$ и

$$L_2(\Omega; \mathbb{R}^n) \ = \ \overset{\circ}{J}_2(\Omega) \ \oplus \ G_2(\Omega)$$

то есть

$$\forall\, f \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^n) \quad \exists!\, u \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega), \quad \exists!\, p \in W^1_2(\Omega) : \quad [p]_\Omega = 0,$$
$$f = u + \nabla p, \qquad \int\limits_\Omega u \cdot \nabla p \; dx \ = \ 0$$

3. **Историческое замечание**

Возможность представления произвольного гладкого убывающего на бесконечности векторного поля в виде суммы соленоидального и потенциального векторных полей было отмечено еще в в 19-ом веке Гельмгольцем. Для ограниченных областей Вейль заметил, что при надлежащем выборе краевых условий данное разложение будет ортогональным в $L_2(\Omega)$. О.А. Ладыженская доказала, что множество $J_0^\infty(\Omega)$ плотно в $G_2(\Omega)^\perp$. Этот факт имеет больше значение для всей дальнейшей теории, поэтому данную теорему иногда называют теоремой Ладыженской.

4. **Доказательство разложения Гельмгольца–Вейля**

1. Докажем включение $G(\Omega) \subset (\overset{\circ}{J}_2(\Omega))^\perp$. Пусть $u \in G(\Omega)$, $u = \nabla p$, $p \in W^1_2(\Omega)$ и пусть $v \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ — произвольная. Тогда существуют $v_m \in J_0^\infty(\Omega)$, такие что $v_m \to v$ в $L_2(\Omega)$ и при помощи интегрирования по частям получаем

$$\int\limits_\Omega u \cdot v \, dx \ = \ \lim_{m\to\infty} \int\limits_\Omega u \cdot v_m \, dx \ = \ \lim_{m\to\infty} \int\limits_\Omega \nabla p \cdot v_m \, dx \ = \ -\lim_{m\to\infty} \int\limits_\Omega p \, \underbrace{\operatorname{div} v_m}_{=\,0} \, dx \ = \ 0$$

2. Докажем включение $(\overset{\circ}{J}_2(\Omega))^\perp \subset G(\Omega)$. Пусть $u \in (\overset{\circ}{J}_2(\Omega))^\perp$, т.е.

$$u \in L_2(\Omega): \qquad \int\limits_\Omega u(x)\cdot\eta(x)\,dx \;=\; 0, \qquad \forall\,\eta\in J_0^\infty(\Omega).$$

Определим функционал $l : \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ по формуле

$$l(\eta) \;=\; \int\limits_\Omega u(x)\cdot\eta(x)\,dx, \qquad \forall\,\eta\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega;\mathbb{R}^n).$$

Из неравенства Гельдера вытекает, что

$$|l(\eta)| \le \|u\|_{L_2(\Omega)}\|\eta\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \forall\,\eta\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \qquad \Longrightarrow \qquad l\in W_2^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^n).$$

кроме того

$$l(\eta) \;=\; 0, \qquad \forall\,\eta\in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega).$$

Следовательно, по теореме из §1.2, существует $p\in L_2(\Omega)$, такая что

$$l(\eta) \;=\; \int\limits_\Omega p(x)\,\mathrm{div}\,\eta(x)\,dx, \qquad \forall\,\eta\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$$

Из тождества

$$\int\limits_\Omega p(x)\,\mathrm{div}\,\eta(x)\,dx \;=\; \int\limits_\Omega u(x)\cdot\eta(x)\,dx, \qquad \forall\,\eta\in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$$

по определению обобщенных производных вытекает, что

$$\exists\;\frac{\partial p}{\partial x_i} \;=\; -u_i\;\in L_2(\Omega), \qquad i=1,2,\dots,n.$$

Следовательно,

$$u=-\nabla p \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \qquad p\in W_2^1(\Omega) \qquad \Longrightarrow \qquad u\in G(\Omega)$$

Теорема доказана. □

5. **Что символизирует нолик в обозначении пространства $\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$?**

Теорема. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная липшицева. Тогда

$$\overset{\circ}{J}_2(\Omega)\cap W_2^1(\Omega) \;=\; \Big\{\; u\in J_2^1(\Omega): \quad u\cdot\nu|_{\partial\Omega}=0 \text{ в смысле теории следов } \Big\}$$

Таким образом, нолик в обозначении $\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ символизирует собой нулевую нормальную компоненту у функций: $\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ состоит из вектор–функций $v\in L_2(\Omega)$, таких что

- v соленоидально в смысле теории распределений
- нормальная компонента v на $\partial\Omega$ равна нулю "в обобщенном смысле"

6. **Проектор Лере**

Определение. Обозначим через P_J оператор ортогонального проектирования на подпространство $\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega;\mathbb{R}^n)$, т.е.

$$f\in L_2(\Omega;\mathbb{R}^n)\quad \exists!\, u\in \overset{\circ}{J}_2(\Omega),\quad \nabla p\in G_2(\Omega):\quad f=u+\nabla p\quad\Longrightarrow\quad P_J f\ :=\ u$$

Ортопроектор $P_J: L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$ называется *проектором Лере*.

7. **Проектор Лере и задача Неймана**

Теорема. Обозначим $P_J^\perp := I - P_J$ оператор ортогонального проектирования на подпространство $G_2(\Omega)$ в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Тогда $\nabla p = P_J^\perp f$ тогда и только тогда, когда $p\in W_2^1(\Omega)$ является обобщенным решением задачи Неймана

$$\left\{\begin{aligned} \Delta p\ &=\ \operatorname{div} f \quad \text{в}\quad \Omega\\ \frac{\partial p}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega}\ &=\ f\cdot\nu|_{\partial\Omega}\end{aligned}\right.$$

Здесь уравнение вместе с краевым условием понимается в смысле выполнения интегрального тождества

$$(\nabla p,\nabla w)_{L_2(\Omega)}\ =\ (f,\nabla w)_{L_2(\Omega)},\qquad \forall\ \eta\in W_2^1(\Omega)$$

8. **Проектор Лере в пространствах $L_s(\Omega)$, $s\in(1,+\infty)$**

Теорема. Пусть $s\in(1,+\infty)$. Тогда

$$L_s(\Omega)\ =\ \overset{\circ}{J}_s(\Omega)\dotplus G_s(\Omega),$$

т.е.

$$\forall\ f\in L_s(\Omega)\qquad \exists!\, u\in\overset{\circ}{J}_s(\Omega),\qquad \exists!\, p\in G_s(\Omega):\qquad f=u+\nabla p,$$

и при этом выполняются неравенства

$$\|u\|_{L_s(\Omega)}\ \le\ c\,\|f\|_{L_s(\Omega)},\qquad \|\nabla p\|_{L_s(\Omega)}\ \le\ c\,\|f\|_{L_s(\Omega)}$$

в которых постоянная $c>0$ зависит только от Ω, n и s.

4.4 Стационарная задача Стокса

1. **Постановка задачи**

Пусть $f:\Omega\to\mathbb{R}$ — заданная функция. Требуется найти функции $u:\Omega\to\mathbb{R}^n$, $p:\Omega\to\mathbb{R}$, такие что

$$\left\{\begin{array}{c} -\Delta u \ + \ \nabla p \ = \ f \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} \ = \ 0 \end{array}\right. \qquad \text{в} \qquad \Omega, \tag{S$_0$}$$

2. **Обобщенные решения задачи Стокса**

Определение. Пусть $f\in J_2^{-1}(\Omega):=(\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega))^*$. Функция $v\in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$ называется *обобщенным решением* задачи (S_0), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_\Omega \nabla u(x):\nabla\eta(x)\,dx \ = \ \langle f,\eta\rangle, \qquad \forall\ \eta\in J_0^\infty(\Omega).$$

Замечание. Определение обобщенного решения задачи Стокса не предполагает, что уравнения в системе (S_0) выполняются в смысле теории обобщенных функций, поскольку пробные функции в интегральном тождестве для обобщенных решений берутся не из $C_0^\infty(\Omega)$, а из более узкого класса $J_0^\infty(\Omega)$.

3. **Существование обобщенного решения стационарной задачи Стокса**

Теорема. Для любой $f\in J_2^{-1}(\Omega)$ существует единственная функция $u\in\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$, являющаяся обобщенным решением задачи (S_0), причем справедливо неравенство

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \ \le \ c\,\|f\|_{J_2^{-1}(\Omega)},$$

в котором постоянная $c>0$ зависит только от Ω и n.

4. **Ассоциированное давление**

Теорема. Пусть $f\ \in\ W_2^{-1}(\Omega)$ и $u\in\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$ — обобщенное решение задачи (S_0). Тогда существует и притом единственная функция $p\in L_2(\Omega)$, $[p]_\Omega=0$, такая что уравнения (S_0) выполняются в $\mathcal{D}'(\Omega)$, т.е.

$$\int\limits_\Omega \nabla u:\nabla\eta\,dx \ = \ \langle f,\eta\rangle \ + \ \int\limits_\Omega p\operatorname{div}\eta\,dx, \qquad \forall\ \eta\in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n).$$

Более того, функция p удовлетворяет оценке

$$\|p\|_{L_2(\Omega)} \ \le \ c\,\|f\|_{W_2^{-1}(\Omega)},$$

в которой постоянная $c>0$ зависит только от n и Ω.

Определение. Функцию $p\in L_2(\Omega)$, $[p]_\Omega=0$, мы будем называть *давлением, ассоциированным* с обобщенным решением $u\in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$.

5. **Сильные решения стационарной задачи Стокса**

Определение. Пусть $f\in L_2(\Omega)$. *Сильным решением* задачи (S_0) мы будем называть функции $u\in W_2^2(\Omega)$ и $p\in W_2^1(\Omega)$, $[p]_\Omega=0$, удовлетворяющие уравнению (S_0) п.в. в Ω, а краевому условию — в смысле теории следов.

6. **Слабые решения стационарной задачи Стокса являются сильными**

Теорема. Пусть $\partial\Omega$ класса C^2 и $f\in L_2(\Omega)$. Пусть $u\in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$ — обобщенные решение задачи (S_0), а $p\in L_2(\Omega)$, $[p]_\Omega=0$ — ассоциированное с ним давление. Тогда u и p являются сильным решением задачи (S_0), причем справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)}\ +\ \|p\|_{W_2^1(\Omega)}\ \le\ c\,\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

в которой постоянная $c>0$ зависит только от Ω и n.

7. **План доказательства**

- Внутренняя оценка вторых производных.
- Оценка касательных производных ∇u и p вблизи плоского участка границы.
- Оценка $u_{\alpha,nn}$ из уравнений.
- Оценка $u_{n,nn}$ из условия соленоидальности и $p_{,n}$ из уравнений.
- Случай искривленной границы.

8. **Внутренняя оценка вторых производных в L_2**

Теорема. Пусть $f\in L_2(\Omega)$ и $u\in W_2^1(\Omega)$ и $p\in L_2(\Omega)$ удовлетворяют системе Стокса:

$$\left\{\begin{aligned} -\Delta u+\nabla p\ &=\ f\\ \operatorname{div} u\ &=\ 0\end{aligned}\right.\qquad \text{в}\qquad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Тогда $u\in W_{2,loc}^2(\Omega)$, $p\in W_{2,loc}^1(\Omega)$ и $\forall\ B_{2R}:=B_{2R}(x_0)\Subset\Omega$ справедлива оценка

$$\|\nabla^2u\|_{L_2(B_R)}+\|\nabla p\|_{L_2(B_R)}\ \le\ c\,\|f\|_{L_2(B_{2R})}+\frac{c}{R}\Big(\ \|\nabla u\|_{L_2(B_{2R})}+\|p\|_{L_2(B_{2R})}\ \Big)$$

Доказательство.

1. Обозначим $v := \frac{1}{h}\Delta_h^k u$ и $q := \frac{1}{h}\Delta_h^k p$. Тогда

$$(\nabla v, \nabla w) \ = \ (f, \tfrac{1}{h}\Delta_{-h}^k w) + (q, \operatorname{div} w), \qquad \forall\, w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B_{\frac{3R}{2}}), \qquad \forall\, |h| < \tfrac{R}{2}.$$

Пусть $\zeta \in C_0^\infty(B_{\frac{3R}{2}})$, $0 \le \zeta \le 1$, $|\nabla\zeta| \le \frac{c}{R}$, $|\nabla^2\zeta| \le \frac{c}{R^2}$, и пусть

$$w \ := \ \zeta^2 v \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla w \ = \ \zeta^2\nabla v + 2\zeta v \otimes \nabla\zeta, \qquad \operatorname{div} w \ = \ 2\zeta v \cdot \nabla\zeta$$

и, следовательно,

$$\|\zeta\nabla v\|^2_{L_2(B_{2R})} \ = \ -2(\zeta\nabla v, v \otimes \nabla\zeta) + 2(\zeta q, v\cdot\nabla\zeta) + (f, \Delta_{-h}^k(\zeta^2 v))$$

С учетом

$$\begin{aligned} |(f, \Delta_{-h}^k(\zeta^2 v))| \ &\le \ \|f\|_{L_2(B_{2R})} \left\|\tfrac{1}{h}\Delta_{-h}^k(\zeta^2 v)\right\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} \ \le \ \|f\|_{L_2(B_{2R})} \|(\zeta^2 v)_{,k}\|_{L_2(B_{2R})} \ \le \\ &\le \ \|f\|_{L_2(B_{2R})} \left(\|\zeta v_{,k}\|_{L_2(B_{2R})} + \|\zeta_{,k} v\|_{L_2(B_{2R})}\right) \ \le \\ &\le \ \varepsilon\, \|\zeta\nabla v\|^2_{L_2(B_{2R})} + c_\varepsilon \left(\|f\|^2_{L_2(B_{2R})} + \frac{1}{R^2}\|v\|^2_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} \right) \end{aligned}$$

для любого $\varepsilon > 0$ получаем неравенство

$$\|\zeta\nabla v\|^2_{L_2(B_{2R})} \ \le \ \varepsilon\, \|\zeta q\|^2_{L_2(B_{2R})} \ + \ c_\varepsilon \left(\|f\|^2_{L_2(B_{2R})} + \frac{1}{R^2}\|v\|^2_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} \right)$$

2. Оценим давление. В тождестве

$$(q, \operatorname{div} w) \ = \ -(\nabla v, \nabla w) + (f, \tfrac{1}{h}\Delta_{-h}^k w), \qquad \forall\, w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B_{\frac{3R}{2}}), \qquad \forall\, |h| < \tfrac{R}{2}.$$

положим $w = \zeta\tilde w$, где $\tilde w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B_{\frac{3R}{2}})$ — произвольная. Получим

$$(\zeta q, \operatorname{div}\tilde w) \ = \ -(\zeta q, \tilde w \cdot \nabla\zeta) - (\zeta\nabla v, \nabla\tilde w) - (\nabla v, \tilde w \otimes \nabla\zeta) + (f, \tfrac{1}{h}\Delta_{-h}^k(\zeta\tilde w))$$

Выберем $\tilde w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B_{\frac{3R}{2}})$ так, чтобы она удовлетворяла условиям

$$\left\{ \begin{array}{c} \operatorname{div}\tilde w \ = \ \zeta q - [\zeta q]_{B_{\frac{3R}{2}}} \qquad \text{в} \quad B_{\frac{3R}{2}} \\ \tilde w|_{\partial B_{\frac{3R}{2}}} \ = \ 0 \\ \|\nabla\tilde w\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} \ \le \ c\left\|\zeta q - [\zeta q]_{B_{\frac{3R}{2}}}\right\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} \end{array} \right.$$

Заметим, что

$$\left\|\zeta q - [\zeta q]_{B_{\frac{3R}{2}}}\right\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} \ \le \ \left\|\zeta q\right\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})}$$

Преобразуем слагаемые со слабыми членами:

$$\begin{aligned} \left|(q, \tilde w\cdot\zeta\nabla\zeta)\right| \ &= \ \left|(p, \tfrac{1}{h}\Delta_{-h}^k(\tilde w\cdot\zeta\nabla\zeta))\right| \ \le \ \|p\|_{L_2(B_{2R})}\left\|\tfrac{1}{h}\Delta_{-h}^k(\tilde w\cdot\zeta\nabla\zeta)\right\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} \ \le \\ &\le \ \|p\|_{L_2(B_{2R})}\left\|(\tilde w\cdot\zeta\nabla\zeta)_{,k}\right\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} \ \le \\ &\le \ c\,\|p\|_{L_2(B_{2R})}\Big(\frac{1}{R}\left\|\nabla\tilde w\right\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} + \frac{1}{R^2}\left\|\tilde w\right\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})}\Big) \ \le \ \frac{c}{R}\,\|p\|_{L_2(B_{2R})}\left\|\nabla\tilde w\right\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} \end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались неравенством Фридрихса:

$$\big\|\tilde w\big\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} \ \le \ cR\,\big\|\nabla \tilde w\big\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})}, \qquad \forall\, \tilde w \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(B_{\frac{3R}{2}})$$

Аналогично получаем

$$\big|(\nabla v, \tilde w \otimes \nabla\zeta)\big| \ \le \ \frac{c}{R}\,\|v\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})}\big\|\nabla \tilde w\big\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})}$$

Таким образом, мы получаем оценку

$$\|\zeta q\|^2_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} \ \le \ c\left(\|\zeta\nabla v\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} + \frac{1}{R}\|v\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} + \frac{1}{R}\|p\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})}\right)\underbrace{\big\|\nabla \tilde w\big\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})}}_{\le\ \|\zeta q\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})}}$$

Следовательно,

$$\|\zeta q\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} \ \le \ c_0\,\|\zeta\nabla v\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} + \frac{c}{R}\Big(\|v\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} + \|p\|_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})}\Big)$$

с некоторой постоянной $c_0 > 0$, зависящей только от n. Подставляя эту оценку в неравенство из **1**, получаем

$$\|\zeta\nabla v\|^2_{L_2(B_{2R})} \ \le \ c_0\varepsilon\,\|\zeta\nabla v\|^2_{L_2(B_{2R})} \ + \ c_\varepsilon\,\|f\|^2_{L_2(B_{2R})} + \frac{c_\varepsilon}{R^2}\Big(\|v\|^2_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} + \|p\|^2_{L_2(B_{\frac{3R}{2}}))}\Big)$$

Выбирая $\varepsilon > 0$ таким образом, чтобы выполнялось $c_0\varepsilon < \frac{1}{2}$, получаем

$$\|\zeta\nabla v\|^2_{L_2(B_{2R})} \ \le \ c\,\|f\|^2_{L_2(B_{2R})} + \frac{c}{R^2}\Big(\|v\|^2_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})} + \|p\|^2_{L_2(B_{\frac{3R}{2}})}\Big)$$

3. Пользуясь стандартными свойствами конечных разностей, получаем

$$\|\nabla^2 u\|_{L_2(B_R)} \ \le \ c\,\|f\|_{L_2(B_{2R})} + \frac{c}{R}\Big(\|\nabla u\|_{L_2(B_{2R})} + \|p\|_{L_2(B_{2R})}\Big)$$

а также

$$\|\nabla p\|_{L_2(B_R)} \ \le \ c\,\|f\|_{L_2(B_{2R})} + \frac{c}{R}\Big(\|\nabla u\|_{L_2(B_{2R})} + \|p\|_{L_2(B_{2R})}\Big)$$

9. Гипоэллиптичность стационарной системы Стокса

Стационарная система Стокса обладает свойством автоматического локального сглаживания слабых решений.

Теорема. Пусть $f \in L_2(\Omega)$, $u \in W^1_2(\Omega)$, $p \in L_2(\Omega)$, удовлетворяют

$$\left\{\begin{array}{c} -\Delta u \ + \ \nabla p \ = \ f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{array}\right. \qquad \text{в} \qquad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Тогда если $f \in C^\infty_{loc}(\Omega)$, то $u \in C^\infty_{loc}(\Omega)$.

10. **Оценки вторых производных в L_2 вблизи плоского участка границы**

Теорема. Пусть $f \in L_2(\Omega)$ и $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и $p \in L_2(\Omega)$ удовлетворяют (S_0) в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Пусть в некоторой системе координат $\Omega \cap B_{2R} = B^+_{2R}$ и $\partial\Omega \cap B_{2R} \subset \{x_n = 0\}$, т.е. $u|_{x_n=0} = 0$. Тогда $u \in W^2_2(B^+_R)$, $p \in W^1_2(B^+_R)$ и

$$\|\nabla^2 u\|_{L_2(B^+_R)} + \|\nabla p\|_{L_2(B^+_R)} \ \le\ c\,\|f\|_{L_2(B^+_{2R})} + \frac{c}{R}\left(\|\nabla u\|_{L_2(B^+_{2R})} + \|p\|_{L_2(B^+_{2R})}\right)$$

Доказательство. Всюду далее мы считаем, что греческие индексы α, β итд меняются в пределах от 1 до $n-1$.

1. Заметим, что для любых $w \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(B_{\frac{3R}{2}})$ и $|h| < \frac{R}{2}$ при всех $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$ справедливо включение

$$\tfrac{1}{h}\Delta^\alpha_{\pm h} w \ \in\ \overset{\circ}{W}{}^1_2(B_{2R})$$

Поэтому для всех $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$ аналогично внутреннему случаю при помощи конечных разностей получается оценка

$$\|\nabla u_{,\alpha}\|_{L_2(B^+_R)} + \|p_{,\alpha}\|_{L_2(B^+_R)} \ \le\ c\,\|f\|_{L_2(B^+_{2R})} + \frac{c}{R}\left(\|\nabla u\|_{L_2(B^+_{2R})} + \|p\|_{L_2(B^+_{2R})}\right)$$

После этого нам осталось оценить $n+1$ функцию: $u_{j,nn}$ при $j = 1, 2, \ldots, n$ и $p_{,n}$.

2. Поскольку внутренняя регулярность нами уже доказана, мы уже знаем, что

$$u \in W^2_{2,loc}(\Omega), \qquad p \in W^1_{2,loc}(\Omega)$$

Следовательно, на данно этапе уравнения уже выполняются почти всюду в Ω:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u + \nabla p &=& f \\ \operatorname{div} u &=& 0 \end{array}\right. \qquad \text{п.в. в} \quad \Omega$$

3. При $\alpha = 1, \ldots, n-1$ из уравнения

$$u_{\alpha,nn} \ =\ -u_{\alpha,\beta\beta} + p_{,\alpha} - f_\alpha \qquad \text{п.в. в} \quad B^+_R$$

получаем оценку

$$\|u_{\alpha,nn}\|_{L_2(B^+_R)} \ \le\ \sum_{\beta=1}^{n-1} \|\nabla u_{,\beta}\|_{L_2(B^+_R)} + \|p_{,\alpha}\|_{L_2(B^+_R)} + \|f\|_{L_2(B^+_{2R})}$$

откуда с учетом **1** получаем

$$\|u_{\alpha,nn}\|_{L_2(B^+_R)} \ \le\ c\,\|f\|_{L_2(B^+_{2R})} + \frac{c}{R}\left(\|\nabla u\|_{L_2(B^+_{2R})} + \|p\|_{L_2(B^+_{2R})}\right)$$

4. Дифференцируя условие соленоидальности $\operatorname{div} u = 0$ по x_n, получаем

$$u_{n,nn} \ =\ -u_{\alpha,\alpha n} \qquad \text{п.в. в} \quad B^+_R$$

откуда

$$\|u_{n,nn}\|_{L_2(B_R^+)} \ \le \ \sum_{\beta=1}^{n-1} \|\nabla u_{,\beta}\|_{L_2(B_R^+)}$$

и, с учетом уже полученных оценок,

$$\|u_{n,nn}\|_{L_2(B_R^+)} \ \le \ c\,\|f\|_{L_2(B_{2R}^+)} + \frac{c}{R}\Big(\|\nabla u\|_{L_2(B_{2R}^+)} + \|p\|_{L_2(B_{2R}^+)}\Big)$$

Таким образом, но данном этапе мы доказали

$$\|\nabla^2 u\|_{L_2(B_R^+)} \ \le \ c\,\|f\|_{L_2(B_{2R}^+)} + \frac{c}{R}\Big(\|\nabla u\|_{L_2(B_{2R}^+)} + \|p\|_{L_2(B_{2R}^+)}\Big)$$

5. Осталось оценить $p_{,n}$. Оцениваем его из последнего оставшегося уравнения

$$p_{,n} \ = \ \Delta u_n + f_n \qquad \text{п.в. в} \quad B_R^+$$

откуда

$$\|p_{,n}\|_{L_2(B_R^+)} \ \le \ \|\nabla^2 u\|_{L_2(B_R^+)} + \|f\|_{L_2(B_R^+)}$$

и, с учетом уже полученных оценок,

$$\|p_{,n}\|_{L_2(B_R^+)} \ \le \ c\,\|f\|_{L_2(B_{2R}^+)} + \frac{c}{R}\Big(\|\nabla u\|_{L_2(B_{2R}^+)} + \|p\|_{L_2(B_{2R}^+)}\Big)$$

11. Оценки вторых производных в L_2 вблизи искривленной границы

Теорема. Пусть $f \in L_2(\Omega)$ и $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и $p \in L_2(\Omega)$ удовлетворяют (S_0) в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Пусть $\partial\Omega \subset C^2$ и обозначим $\Omega_R \equiv \Omega_R(x_0) := \Omega \cap B_R(x_0)$. Тогда и существует $R_0 > 0$, такой что для любых $x_0 \in \partial\Omega$ и $R < R_0$ $u \in W_2^2(\Omega_R)$, $p \in W_2^1(\Omega_R)$ и

$$\|\nabla^2 u\|_{L_2(\Omega_R)} + \|\nabla p\|_{L_2(\Omega_R)} \ \le \ c\,\|f\|_{L_2(\Omega_{2R})} + \frac{c}{R}\Big(\|\nabla u\|_{L_2(\Omega_{2R})} + \|p\|_{L_2(\Omega_{2R})}\Big)$$

Доказательство. “Распрямление” границы. □

4.5 Оператор Стокса

1. **Определение оператора Стокса**

   Определение. *Опреатором Стокса* мы будем называть линейный оператор

$$\tilde{\Delta} : D(\tilde{\Delta}) \subset \overset{\circ}{J}_2(\Omega) \to \overset{\circ}{J}_2(\Omega),$$
$$D(\tilde{\Delta}) \ = \ \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega), \qquad \tilde{\Delta} u \ := \ P_J \Delta u, \qquad \forall\, u \in D(\tilde{\Delta}).$$

   где P_J — это проектор Лере на подпространство $\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$.

2. **Второе основное неравенство для оператора Стокса**

   Теорема. Если $\partial\Omega$ класса C^2, то справедливо неравенство

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \ \le \ c\, \|\tilde{\Delta} u\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\, u \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega),$$

   в котором постоянная $c > 0$, зависит только от Ω и n.

3. **Самосопряженность оператора Стокса**

   Теорема. Пусть $\partial\Omega$ класса C^2. Тогда

   1) оператор $-\tilde{\Delta}$ отвечает квадратичной форме $a[u] := \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}$ на $\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ с областью определения $D_a := \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$, т.е.

$$(-\tilde{\Delta} u, v) \ = \ (\nabla u, \nabla v), \qquad \forall\, u \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega), \qquad \forall\, v \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$$

   2) опреатор $\tilde{\Delta}$ является самосопряженным:

$$D(\tilde{\Delta}^*) = D(\tilde{\Delta}) = \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega), \qquad (\tilde{\Delta} u, v) = (u, \tilde{\Delta} v), \qquad \forall\, u,\, v \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$$

   3) оператор $-\tilde{\Delta}$ положительно определен, т.е.

$$(-\tilde{\Delta} u, u) \ \ge \ 0, \qquad \forall\, u \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega).$$

4. **Спектр оператора Стокса**

   Теорема. Пусть Ω — ограниченная область. Тогда

   1) спектр оператора $-\tilde{\Delta}$ чисто точечный, он состоит из счетного набора вещественных положительных собственных чисел, не имеющих точек накопления, кроме бесконечности, причем соотвествующие им собственные подпространства конечномерны.

2) собственные числа оператора $-\tilde{\Delta}$ можно пронумеровать в порядке возрастания и с учетом их кратности:

$$0 \; < \; \lambda_1 \; \le \; \lambda_2 \; \le \; \ldots \; \le \; \lambda_k \; \le \; \ldots$$

5. Собственные функции оператора Стокса

Теорема. Пусть Ω — ограниченная область. Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ собственные числа оператора $-\tilde{\Delta}$ с учетом кратности, и обозначим через $\varphi_k \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$ собственную функцию оператора $-\tilde{\Delta}$, соответствующую собственному числу λ_k. Тогда φ_k является обобщенным решением задачи Стокса

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta\varphi_k + \nabla\pi_k & = & \lambda_k\,\varphi_k \\ \operatorname{div}\varphi_k & = & 0 \\ \varphi_k|_{\partial\Omega} & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{в} \quad \Omega$$

и при этом

1) $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ образуют базис в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ со скалярным произведением $(u,v)_{L_2(\Omega)}$, который мы всегда считаем ортонормированным в $L_2(\Omega)$:

$$\|\varphi_k\|_{L_2(\Omega)} \; = \; 1, \qquad \forall\; k=1,2,3,\ldots$$

2) $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ образуют базис в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$ со скалярным произведением $[u,v] := (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)}$, причем

$$\|\nabla\varphi_k\|_{L_2(\Omega)} \; = \; \sqrt{\lambda_k}, \qquad \forall\; k=1,2,3,\ldots$$

3) если $\partial\Omega$ класса C^2, то $\varphi_k \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^2(\Omega)$ для любого $k\in\mathbb{N}$ и функции $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ образуют базис в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^2(\Omega)$ со скалярным произведением $((u,v)) := (\tilde{\Delta}u, \tilde{\Delta}v)_{L_2(\Omega)}$, причем

$$\|\tilde{\Delta}\varphi_k\|_{L_2(\Omega)} \; = \; \lambda_k, \qquad \forall\; k=1,2,3,\ldots$$

6. Ряды Фурье по базису из собственных функций оператора Стокса

Теорема. Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — собственные числа и собственные функции оператора $-\tilde{\Delta}$ (в стандартной нумерации). Для любой $u\in\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ обозначим

$$c_k := (u,\varphi_k)_{L_2(\Omega)}, \qquad u = \sum_{k=1}^\infty c_k\varphi_k \quad \text{в} \quad L_2(\Omega), \qquad \|u\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^\infty |c_k|^2$$

Тогда

1) $u \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k |c_k|^2 < +\infty$ и при этом

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \quad \text{в} \quad W_2^1(\Omega), \qquad \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |c_k|^2$$

2) если $\partial\Omega \subset C^2$, то $u \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |c_k|^2 < +\infty$ и при этом

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \quad \text{в} \quad W_2^2(\Omega), \qquad \|\tilde{\Delta} u\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |c_k|^2$$

4.6 Нестационарная задача Стокса

1. **Система Стокса-Озина**

Определение. Системой *Стокса–Озина* мы называем линейную систему Стокса с дрифтом (младшими членами первого порядка):

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t u \;-\; \Delta u \;+\; (w\cdot\nabla)u \;+\; \nabla p \;=\; f \\ \operatorname{div} u \;=\; 0 \\ u|_{t=0} \;=\; a, \qquad u|_{\partial\Omega\times(0,T)} \;=\; 0 \end{array}\right. \quad \text{в} \quad Q_T \tag{SO}$$

Здесь неизвестными являются функции $u : Q_T \to \mathbb{R}^n$ и $p : Q_T \to \mathbb{R}$, а заданными — функции $a : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $w : Q_T \to \mathbb{R}^n$ и $f : Q_T \to \mathbb{R}^n$, причем для a и w выполнены условия соленоидальности

$$\operatorname{div} a = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \operatorname{div} w = 0 \quad \text{в} \quad Q_T,$$

плюс a удовлетворяет естественным условиям согласования на $\partial\Omega$.

2. **Свойства конвективного члена**

Теорема. Пусть $w \in L_\infty(\Omega)$ такова, что $\operatorname{div} w = 0$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_\Omega (w\cdot\nabla)u\cdot v\,dx \;=\; -\int\limits_\Omega u\otimes w : \nabla v\,dx, \qquad \forall\, u, v \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$$

Кроме того, если $w \in L_\infty(Q_T)$ такова, что $\operatorname{div} w = 0$ в $\mathcal{D}'(Q_T)$, то

$$\int\limits_{Q_T} u\otimes w : \nabla u\,dxdt \;=\; 0, \qquad \forall\, u \in L_2(0,T; \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega))$$

Доказательство. Для определенности считаем $n = 3$.

1. Существуют $w^m \in C^\infty(\Omega)$, $\operatorname{div} w^m = 0$ в Ω, $u_m \in J_0^\infty(\Omega)$, $v^m \in J_0^\infty(\Omega)$, такие что

$$w^m \to w \quad \text{в} \quad L_3(\Omega), \qquad u^m \to u \quad \text{в} \quad W^1_2(\Omega), \qquad v^m \to v \quad \text{в} \quad W^1_2(\Omega).$$

Из формулы интегрирования по частям получаем

$$\int\limits_\Omega (w^m\cdot\nabla)u^m\cdot v^m\,dx \;=\; \int\limits_\Omega w^m_j u^m_{k,j} v^m_k\,dx \;=\; -\int\limits_\Omega u^m_k (w^m_j v^m_k)_{,j}\,dx$$

$$= -\int\limits_\Omega u^m_k \underbrace{w^m_{j,j}}_{\operatorname{div} w\,=\,0} v^m_k\,dx \;-\; \int\limits_\Omega u^m_k w^m_j v^m_{k,j}\,dx \;=\; -\int\limits_\Omega u^m\otimes w^m : \nabla v^m\,dx$$

По неравенству Гельдера имеем $(w^m\cdot\nabla)u^m \to (w\cdot\nabla)u$ в $L_{\frac{6}{5}}(\Omega)$ и, у учетом вложения $W^1_2(\Omega) \hookrightarrow L_6(\Omega)$ при $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, получаем $v^m \to v$ в $L_6(\Omega)$. Следовательно,

$$\int\limits_\Omega (w^m\cdot\nabla)u^m\cdot v^m\,dx \;\to\; \int\limits_\Omega (w\cdot\nabla)u\cdot v\,dx$$

Аналогично,

$$-\int\limits_{\Omega} u^m \otimes w^m : \nabla v^m \, dx \;\to\; -\int\limits_{\Omega} u \otimes w : \nabla v \, dx$$

2. Поскольку при $w \in L_\infty(Q_T)$ и $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ мы имеем $u \otimes w : \nabla u \in L_1(Q_T)$, по теореме Фубини

$$\int\limits_{Q_T} u \otimes w : \nabla u \, dxdt \;=\; \int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Omega} u(t) \otimes w(t) : \nabla u(t) \, dx \right) dt$$

Так как при п.в. $t \in (0,T)$ справедивы включения

$$w(t) \in L_\infty(\Omega), \qquad \operatorname{div} w(t) = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \qquad u(t) \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega),$$

получаем

$$\int\limits_{\Omega} u(t) \otimes w(t) : \nabla u(t) \, dx \;=\; \int\limits_{\Omega} u_j(t) w_k(t) u_{j,k}(t) \, dx \;=\; \int\limits_{\Omega} w(t) \cdot \nabla \underbrace{\tfrac{1}{2}|u(t)|^2}_{\in \overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)} dx \;=\; 0.$$

3. **Обобщенные решения системы Стокса-Озина**

Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$, $f \in L_2(0,T; J_2^{-1}(\Omega))$, $w \in L_\infty(Q_T)$, $\operatorname{div} w = 0$ в $\mathcal{D}'(Q_T)$. Обобщенным решением системы (SO) мы называем функцию $u : Q_T \to \mathbb{R}^n$, такую что

1) $u \in C([0,T]; \overset{\circ}{J}_2(\Omega)) \cap L_2(0,T; \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega))$, $\quad \partial_t u \in L_2(0,T; J_2^{-1}(\Omega))$
2) для п.в. $t \in (0,T)$ справедливо тождество

$$\langle \partial_t u(t), w \rangle + (\nabla u(t), \nabla w) - (u(t) \otimes w(t), \nabla w) \;=\; \langle f(t), w \rangle, \qquad \forall\, w \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$$

3) $u(x,0) = a(x)$ для п.в. $x \in \Omega$

4. **Энергетическое тождество и единственность в классе обобщенных решений**

Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$, $f \in L_2(0,T; J_2^{-1}(\Omega))$ и пусть u — обобщенное решение системы (SO). Тогда для любого $t \in (0,T]$ u удовлетворяет *глобальному энергетическому тождеству*

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |u(x,t)|^2 \, dx \;+\; \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x,\tau)|^2 \, dx d\tau \;=\; \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |a(x)|^2 \, dx \;+\; \int\limits_0^t \langle f(\tau), u(\tau) \rangle \, dt$$

Следствие. Для любых $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$, $f \in L_2(0,T; J_2^{-1}(\Omega))$, $w \in L_\infty(Q_T)$, $\operatorname{div} w = 0$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$, задача (SO) не может иметь двух различных обобщенных решений.

5. **Теорема существования в классе обобщенных решений**

Теорема. Пусть $w \in L_\infty(Q_T)$, $\operatorname{div} w = 0$ в $\mathcal{D}'(Q_T)$. Тогда для любых $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ и $f \in L_2(0,T; J_2^{-1}(\Omega))$ существует единственная функция u, являющаяся обобщенным решением системы (SO), причем справедливы оценки

$$\|u\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} + \|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \ \le\ c\Big(\|a\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(0,T;J_2^{-1}(\Omega))}\Big)$$

$$\|\partial_t u\|_{L_2(0,T;J_2^{-1}(\Omega))} \ \le\ c_w\Big(\|a\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(0,T;J_2^{-1}(\Omega))}\Big)$$

где постоянная $c > 0$ зависит только от n и Ω, а $c_w > 0$ зависит от n, Ω и $\|w\|_{L_\infty(Q_T)}$.

План доказательства.

- Определение галеркинских приближений u^N.
- Энергетическая оценка для u^N.
- Предельный переход в уравнении.
- Оценка $\partial_t u$.

Доказательство. Пусть функции $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$ и

- $\{\varphi_k\}_{k=1}$ образуют ортонормированный базис в $\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$
- $\{\varphi_k\}_{k=1}$ образуют ортогональный базис в $\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$ $\big($отн. ск. произв. $(\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)}\big)$

(Например, в качестве $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ можно взять полную систему собственных функций задачи Дирихле для оператора Стокса в Ω, тогда λ_k — с.ч., соответствующее φ_k).

1. Для любого $N \in \mathbb{N}$ существует и притом единственный набор коэффициентов $\{C_k^N\}_{k=1}^N$, $C_k^N \in W_2^1(0,T)$, таких что функция

$$u^N(x,t) \ :=\ \sum_{k=1}^N C_k^N(t)\varphi_k(x), \qquad u^N \in W_2^{1,1}(Q_T)$$

для любого $k = 1, 2, \ldots, N$ удовлетворяет тождеству

$$(\partial_t u^N(t), \varphi_k) + (\nabla u^N(t), \nabla\varphi_k) - (u^N(t)\otimes w(t), \nabla\varphi_k) \ =\ \langle f(t), \varphi_k\rangle,$$

а также начальному условию

$$u^N(x,0) \ =\ a^N(x) \qquad \text{п.в.} \quad x \in \Omega,$$

где

$$a^N(x) \ :=\ \sum_{k=1}^N a_k\varphi_k(x), \qquad a_k := \int\limits_\Omega a(x)\varphi_k(x)\,dx, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Заметим, что функции $C_k^N \in W_2^1(0,T)$ являются решениями следующей линейной системы ODE:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_k^N}{dt}(t) \ = \ \sum\limits_{j=1}^N A_{kj}(t)C_j^N(t) \ + \ F_k(t) \\ \qquad\qquad C_k^N = a_k \end{cases} \qquad k=1,2,\dots,N$$

где

$$A_{kj}(t) = \lambda_k\delta_{kj} - (\varphi_j\otimes w(t), \nabla\varphi_k) \ \in \ L_\infty(0,T),$$
$$F_k(t) = \langle f(t), \varphi_k\rangle \ \in \ L_2(0,T)$$

2. Умножая уравнение для $k=1,\dots,N$ на соответствующее C_k^N, получаем тождество

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} - \underbrace{(u^N(t)\otimes w(t), \nabla u^N(t))}_{=\,0} \ = \ \langle f(t), u^N(t)\rangle$$

Интегрируя это соотношение по $t\in(0,T)$ с учетом $\|a^N\|_{L_2(\Omega)} \le \|a^N\|_{L_2(\Omega)}$ получаем

$$\|u^N\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \ + \ \|u^N\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \ \le \ c\Big(\|a\|_{L_2(\Omega)} \ + \ \|f\|_{L_2(0,T;J_2^{-1}(\Omega))}\Big)$$

Следовательно,

$$\exists\, u\in L_\infty(0,T;\overset{\circ}{J}_2(\Omega))\cap L_2(0,T;\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)),$$

такая что для некоторой п/посл–ти (мы сохраним за ней прежнее обозначение)

$$u^N \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad W_2^{1,0}(Q_T), \qquad u^N \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{в} \quad L_\infty(0,T;L_2(\Omega)).$$

откуда

$$\|u\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \ + \ \|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \ \le \ c\Big(\|a\|_{L_2(\Omega)} \ + \ \|f\|_{L_2(0,T;J_2^{-1}(\Omega))}\Big)$$

3. Теперь для произвольной $\xi\in W_2^1(0,T)$, $\xi(T)=0$, мы получаем

$$-\int\limits_0^T (u^N(t),\varphi_k)\xi'(t)\,dt + \int\limits_0^T \Big((\nabla u^N(t),\nabla\varphi_k) - (u^N(t)\otimes w(t),\nabla\varphi_k)\Big)\xi(t)\,dt \ =$$

$$= \ a_k\xi(0) \ + \ \int\limits_0^T \langle f(t), w_k\rangle\,dt$$

откуда для любой функции $\eta^m(x,t) = \sum\limits_{k=1}^N \xi_k(t)\varphi_k(x)$, где $\xi_j\in W_2^1(0,T)$, $\xi_j(T)=0$, при $N\ge m$ мы получаем

$$\int\limits_{Q_T}\Big(-u^N\cdot\partial_t\eta^m + \nabla u^N:\nabla\eta^m - u^N\otimes w:\nabla\eta^m\Big)\,dxdt \ =$$

$$= \int\limits_\Omega a^N(x)\eta^m(x,0)\,dx + \int\limits_0^T \langle f(t),\eta^m(t)\rangle\,dt$$

Фиксируя $m\in\mathbb{N}$ и переходя к пределу при $N\to\infty$, получаем

$$\int\limits_{Q_T}\Big(-u\cdot\partial_t\eta^m+\nabla u:\nabla\eta^m-u\otimes w:\nabla\eta^m\Big)\,dxdt\ =$$

$$=\ \int\limits_{\Omega}a(x)\eta^m(x,0)\,dx+\int\limits_0^T\langle f(t),\eta(t)\rangle\,dt$$

Поскольку функции $\Big\{\,\eta^m(x,t)=\sum\limits_{k=1}^N\xi_k(t)\varphi_k(x),\ \xi_k\in W_2^1(0,T),\,\xi_k(T)=0\,\Big\}$ плотны в

$$\Big\{\,\eta\in W_2^1(0,T;\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)):\ \eta|_{t=T}=0\,\Big\},$$

получаем

$$\int\limits_{Q_T}\Big(-u\cdot\partial_t\eta+\nabla u:\nabla\eta-u\otimes w:\nabla\eta\Big)\,dxdt\ =\ \int\limits_{\Omega}a(x)\eta(x,0)\,dx\ +$$

$$+\ \int\limits_0^T\langle f(t),\eta(t)\rangle\,dt,\qquad\forall\,\eta\in W_2^1(0,T;\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)):\quad\eta|_{t=T}=0$$

4. Из полученного тождества стандартным переходом (см. часть I) получаем, что

$$\exists\,\partial_t u\in L_2(0,T;\overset{\circ}{J}{}_2^{-1}(\Omega))$$

и для п.в. $t\in(0,T)$ справедливо тождество

$$\langle\partial_t u(t),w\rangle+(\nabla u(t),\nabla w)-(u(t)\otimes w(t),\nabla w)\ =\ \langle f(t),w\rangle,\qquad\forall\,w\in\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$$

Из последнего тождества при п.в. $t\in(0,T)$ вытекает неравенство

$$\|\partial_t u(t)\|_{J_2^{-1}(\Omega)}\ \le\ \|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)}+\|w(t)\|_{L_\infty(\Omega)}\|u(t)\|_{L_2(\Omega)}\ +\ \|f(t)\|_{J_2^{-1}(\Omega)},$$

откуда с учетом энергетической оценки мы получаем

$$\|\partial_t u\|_{L_2(0,T;J_2^{-1}(\Omega))}\ \le\ c_w\ \Big(\ \|a\|_{L_2(\Omega)}\ +\ \|f\|_{L_2(0,T;J_2^{-1}(\Omega))}\ \Big)$$

где постоянная $c_w>0$ зависит от $\|w\|_{L_\infty(Q_T)}$.

6. Сильные решения системы Стокса–Озина

Определение. Пусть $a\in\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$, $f\in L_2(Q_T)$, $w\in L_\infty(Q_T)$, $\operatorname{div}w=0$ в $\mathcal{D}'(Q_T)$. *Сильным* решением системы (SO) называются функции $u\in W_2^{2,1}(Q_T)$ и $p\in W_2^{1,0}(Q_T)$, такие что $[p(t)]_\Omega=0$ п.в. $t\in(0,T)$ и функции u и p удовлетворяют уравнениям (SO) п.в. в Q_T, а начальным и краевым условиям — в смысле теории следов.

7. Сильные решения системы Стокса–Озина

Теорема. Пусть $w \in L_\infty(Q_T)$, $\operatorname{div} w = 0$ в $\mathcal{D}'(Q_T)$. Тогда для любых $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ и $f \in L_2(Q_T)$ обобщенное решение системы (SO) является сильным, т.е. $u \in W^{2,1}_2(Q_T)$ и существует единственная $p \in W^{1,0}_2(Q_T)$, такая что $[p(t)]_\Omega = 0$ п.в. $t \in (0,T)$ и функции u и p являются сильным решением системы (SO), причем имеет место оценка

$$\|u\|_{W^{2,1}_2(Q_T)} + \|p\|_{W^{1,0}_2(Q_T)} \ \le \ c_w \ \Big(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|a\|_{W^1_2(\Omega)} \Big)$$

с постоянной $c_w > 0$, зависящей только от n, Ω и $\|w\|_{L_\infty(Q_T)}$.

Доказательство.

1. Пусть $u \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap W^{1,0}_2(Q_T)$ — обобщенное решение задачи (SO). Обозначим

$$f_0 \ := \ f - (w\cdot\nabla)u, \qquad f_0 \in L_2(Q_T)$$

С учетом энергетического неравенства получаем для f_0 оценку

$$\|f_0\|_{L_2(Q_T)} \ \le \ c\Big(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|w\|_{L_\infty(Q_T)}\|u\|_{W^{1,0}_2(Q_T)}\Big) \ \le \ c_w \Big(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|a\|_{W^1_2(\Omega)}\Big)$$

Теперь u является обобщенным решением задачи Стокса

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u - \Delta u + \nabla p \ = \ f_0 \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} \ = \ 0 \\ u|_{t=0} \ = \ a \end{array} \right. \quad \text{в} \quad Q_T \qquad \text{(S)}$$

Построим галеркинские приближения для задачи (S):

$$u^N(x,t) \ := \ \sum_{k=1}^N C^N_k(t)\varphi_k(x), \qquad u^N \in W^{1,1}_2(Q_T)$$

где $C^N_k \in W^1_2(0,T)$ и функции u^N для любого $k = 1, 2, \ldots, N$ удовлетворяют тождеству

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t u^N(t), \varphi_k) + (\nabla u^N(t), \nabla\varphi_k) \ = \ (f_0(t), \varphi_k), \\ u^N|_{t=0} \ = \ a^N, \qquad a^N \ := \ \displaystyle\sum_{k=1}^N (a,\varphi_k)\,\varphi_k \end{array} \right.$$

Мы уже знаем, что

$$\|u^N\|_{W^{1,0}_2(Q_T)} \ \le \ c\Big(\|f_0\|_{L_2(Q_T)} + \|a\|_{L_2(\Omega)}\Big), \qquad u^N \to v \quad \text{в} \quad L_2(Q_T),$$

где $v \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap W^{1,0}_2(Q_T)$ — некоторое обобщенное решение задачи (S). Таким образом, v и u — два обобщенных решения задачи (S), соответствующие одному и тому же начальному данному и правой части. По теореме единственности для обобщенных решений получаем $v \equiv u$ п.в. в Q_T.

2. Умножим каждое из тождеств

$$(\partial_t u^N(t), \varphi_k) + (\nabla u^N(t), \nabla\varphi_k) \ = \ (f_0(t), \varphi_k)$$

на $\frac{dC_k^N}{dt}(t)$ и просуммиуем по k от 1 до N. Получим тождество

$$\big(\partial_t u^N(t), \partial_t u^N\big) + \big(\nabla u^N(t), \partial_t \nabla u^N\big) \ = \ \big(f_0(t), \partial_t u^N\big)$$

Следовательно, для u^N при п.в. $t \in (0, T)$ выполняется тождество

$$\|\partial_t u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ + \ \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|\nabla u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ = \ \Big(f_0(t), \partial_t u^N(t)\Big)$$

из которого при помощи неравенства Юнга при п.в. $t \in (0, T)$ вытекает оценка

$$\|\partial_t u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ + \ \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|\nabla u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ \le \ c\,\|f_0(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Получаем неравенство

$$\|\partial_t u^N\|_{L_2(Q_T)} \ + \ \|\nabla u^N(t)\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \ \le \ c\,\Big(\|f_0\|_{L_2(Q_T)} + \|\nabla a^N\|_{L_2(\Omega)}\Big)$$

Заметим, что поскольку $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — ортогональный базис в $\overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ и $\|\nabla\varphi_k\|^2_{L_2(\Omega)} = \lambda_k$, справедливо неравенство

$$\|\nabla a^N\|^2_{L_2(\Omega)} \ = \ \sum_{k=1}^n \lambda_k |a_k|^2 \ \le \ \sum_{k=1}^\infty \lambda_k |a_k|^2 \ = \ \|\nabla a\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad a_k := (a, \varphi_k)$$

Принимая во внимание энергетическую оценку для u^N, получаем

$$\|\partial_t u^N\|_{L_2(Q_T)} \ + \ \|\nabla u^N(t)\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \ \le \ c\,\Big(\|f_0\|_{L_2(Q_T)} + \|a\|_{W^1_2(\Omega)}\Big)$$

Следовательно, $\partial_t u^N$ ограничена в $L_2(Q_T)$, откуда вытекает

$$\partial_t u^N \rightharpoonup \partial_t u \quad \text{в} \quad L_2(Q_T), \qquad \|\partial_t u\|_{L_2(Q_T)} \ \le \ c\,\Big(\|f_0\|_{L_2(Q_T)} + \|a\|_{W^1_2(\Omega)}\Big)$$

3. Обозначим $f_1 := f_0 - \partial_t u$. Тогда с учетом оценок $\|f_0\|_{L_2(Q_T)}$ и $\|\partial_t u\|_{L_2(Q_T)}$ получаем

$$\|f_1\|_{L_2(Q_T)} \ \le \ c_w\,\Big(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|a\|_{W^1_2(\Omega)}\Big)$$

Для п.в. $t \in (0, T)$ функция $u(t) \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ является обобщенным решением стационарной задачи Стокса с правой частью $f_1(t)$:

$$\left\{ \begin{aligned} -\Delta u(t) + \nabla p(t) \ &= \ f_1(t) \quad \text{в} \quad \Omega \\ \operatorname{div} u(t) \ &= \ 0 \\ u(t)|_{\partial\Omega} \ &= \ 0 \end{aligned} \right.$$

Поскольку для области Ω класса C^2 при $f_1(t)\in L_2(\Omega)$ обобщенное решение стационарной задачи Стокса является сильным, заключаем, что при п.в $t\in(0,T)$ $u(t)\in W_2^2(\Omega)$ и существует единственная $p(t)\in W_2^1(\Omega)$, $[p(t)]_\Omega=0$, такая что выполняется оценка

$$\|u(t)\|^2_{W_2^2(\Omega)} \ + \ \|p(t)\|^2_{W_2^1(\Omega)} \ \le \ c\,\|f_1(t)\|^2_{L_2(\Omega)},$$

откуда интегрированием этой оценки по $t\in(0,T)$ получаем

$$\|u\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \ + \ \|p\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \ \le \ c\,\|f_1\|_{L_2(Q_T)}$$

Следовательно, $u\in W_2^{2,1}(Q_T)$, $p\in W_2^{1,0}(Q_T)$ и

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)}+\|p\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \ = \ \|\partial_t u\|_{L_2(Q_T)}+\|u\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}+\|p\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \ \le$$
$$\le \ c\Big(\|f_0\|_{L_2(Q_T)}+\|a\|_{W_2^1(\Omega)}\Big) \ + \ c\,\|f_1\|_{L_2(Q_T)} \ \le \ c\Big(\|f\|_{L_2(Q_T)}+\|a\|_{W_2^1(\Omega)}\Big)$$

Единственность справедлива в более широком классе обобщенных решений.

8. **Теорема единственности О.А. Ладыженской в классе очень слабых решений**

Теорема. Пусть $u\in L_2(0,T;\overset{\circ}{J}_2(\Omega))$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{Q_T} u\cdot\Big(\partial_t\eta+\Delta\eta\Big)\,dxdt \ = \ 0,$$

$$\forall\ \eta\in W_2^{2,1}(Q_T): \quad \operatorname{div}\eta=0 \ \text{ в } \ Q_T, \quad \eta|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0, \quad \eta|_{t=T}=0.$$

Тогда $u\equiv 0$ п.в. в Q_T.

9. **Коэрцитивные оценки В.А. Солонникова**

Для $s\in(1,+\infty)$ обозначим $\overset{\circ}{J}{}_s^{2-2/s}(\Omega) \ := \ \text{Closure}_{W_s^{2-2/s}(\Omega)}\, J_0^\infty(\Omega)$.

Теорема. Пусть $s\in(1,+\infty)$. Тогда для любых $a\in\overset{\circ}{J}{}_s^{2-2/s}(\Omega)$ и $f\in L_s(Q_T)$ существует единственная пара функций $u\in W_s^{2,1}(Q_T)$ и $p\in W_s^{1,0}(Q_T)$, $[p(t)]_\Omega=0$ п.в. $t\in(0,T)$, являющаяся сильным решением системы Стокса

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t u \ - \ \Delta u \ + \ \nabla p \ = \ f \\ \operatorname{div} u \ = \ 0 \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} \ = \ 0 \\ u|_{t=0} \ = \ a \end{array}\right. \qquad \text{в} \qquad Q_T \tag{S}$$

т.е. удовлетворяющая уравнениям (S) п.в. в Q_T, начальным и краевым условиям — в смысле теории следов, а также удовлетворяющая оценке

$$\|u\|_{W_s^{2,1}(Q_T)}+\|p\|_{W_s^{1,0}(Q_T)} \ \le \ c\,\Big(\|f\|_{L_s(Q_T)}+\|a\|_{W_s^{2-2/s}(\Omega)}\Big)$$

с постоянной $c>0$, зависящей только от n, s, Ω и T.

Доказательство. Без доказательства. $\square$

4.7 Теорема о компактности

1. **Мотивировка**

   Из-за наличия “конвективного члена” $(u \cdot \nabla)u$ уравнения гидродинамики являются *нелинейными* уравнениями в частных производных. Основная трудность в работе с нелинейными уравнениями заключается в том, что нелинейные операторы, как правило, не являются непрерывными относительно слабой сходимости $u^N \rightharpoonup u$. Поэтому для предельного перехода в конвективном члене нам потребуется сильная сходимость $u^N \to u$, то есть, иначе говоря, компактность последовательности гладких “приближенных” решений $\{u^N\}$ в некотором подходящем функциональном пространстве.

2. **Класс $\mathcal{W}$**

   Определение. Пусть $X \hookrightarrow Z$. Для любых p, $q \in [1, +\infty)$ определим лин. пр–во

   $$\mathcal{W} \ := \ \left\{ \ u \in L_p(I;X) : \ \exists \ \text{ слабая производная по времени } \ \frac{du}{dt} \in L_q(I;Z) \ \right\}$$

   Таким образом, функция $u \in L_p(I;X)$ принадлежит классу $\mathcal{W}$ в том и только в том случае, когда существует функция $v \in L_q(I;Z)$, такая что выполняется соотношение

   $$\int\limits_I u(t) \ \varphi'(t) \ dt \ = \ - \int\limits_I v(t) \ \varphi(t) \ dt \qquad \text{в} \qquad Z, \qquad \forall \, \varphi \in C_0^\infty(I).$$

   Теорема. Пространство $\mathcal{W}$ является банаховым относительно нормы

   $$\|u\|_{\mathcal{W}} \ := \ \|u\|_{L_p(I;X)} \ + \ \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L_q(I;Z)}$$

   Если X, Z рефлексивны и p, $q \in (1, +\infty)$, то $\mathcal{W}$ также является рефлексивным.

3. **Основной результат данного параграфа**

   Теорема. X, Y, Z — банаховы, p, $q \in (1, +\infty)$. Предположим, что

   1) $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$

   2) X, Z — рефлексивны

   3) вложение $X \hookrightarrow Y$ компактно

   Тогда вложение $\mathcal{W}$ в пространство $L_p(I;Y)$ компактно, то есть для всякой последовательности $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{W}$

   $$u_k \ \rightharpoonup \ u \quad \text{в} \quad \mathcal{W} \qquad \Longrightarrow \qquad u_{k_j} \ \to \ u \qquad \text{в} \qquad L_p(I;Y).$$

4. **Предварительные факты**

Теорема.

- если $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{W}$, $u \in L_p(I;X)$, $v \in L_q(I;Z)$ таковы, что

$$u_k \rightharpoonup u \quad \textit{в} \quad L_p(I;X), \qquad \frac{du_k}{dt} \rightharpoonup v \quad \textit{в} \quad L_q(I;Z),$$

  то $u \in \mathcal{W}$ и $\frac{du}{dt} = v$ в Z.
- для любой $u \in \mathcal{W}$ $u : \bar{I} \to Z$ абсолютно непрерывна и $\forall\, s,\, t \in \bar{I}$

$$u(t) \;=\; \int\limits_s^t \frac{du}{d\tau}(\tau)\; d\tau \;+\; u(s) \qquad \textit{в} \quad Z.$$

- $\mathcal{W}$ непрерывно вкладывается в $C(\bar{I};Z)$, т.е. $\exists\; c > 0$, такое что

$$\|u\|_{C(\bar{I};Z)} \;\le\; c\;\|u\|_{\mathcal{W}}, \qquad \forall\; u \in \mathcal{W}.$$

- для любой $u \in \mathcal{W}$ и любых $s,\, t \in \bar{I}$

$$(t-s)u(t) \;=\; \int\limits_s^t u(\tau)\; d\tau \;+\; \int\limits_s^t (\tau - s)\frac{du}{d\tau}(\tau)\; d\tau \qquad \textit{в} \quad Z.$$

- пусть $v_k,\, v \in L_p(I;X)$ и пусть $t,\, s \in (0,T)$ фиксированы. Определим элементы $a_k^{(t,s)}$, $a^{(t,s)} \in X$ по формулам

$$a_k^{(t,s)} \;:=\; \frac{1}{t-s}\int\limits_s^t v_k(\tau)\; d\tau, \qquad a^{(t,s)} \;:=\; \frac{1}{t-s}\int\limits_s^t v(\tau)\; d\tau$$

  Тогда если $v_k \rightharpoonup v$ в $L_p(I;X)$, то $a_k^{(s)} \rightharpoonup a^{(s)}$ в X при $k \to +\infty$.

5. **Компактность вложения в $\boldsymbol{L_p(I;Z)}$**

Теорема. Пусть выполнены условия основной теоремы и пусть $u_k \in \mathcal{W}$ таковы, что

$$u_k \rightharpoonup 0 \quad \textit{в} \quad L_p(I;X) \qquad \text{и} \qquad \left\{\frac{du_k}{dt}\right\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{ограничена в } L_q(I;Z).$$

Тогда $u_k \to 0$ в $L_p(I;Z)$.

Доказательство. Для $t \in I$ обозначим $\varphi_k(t) := \|u_k(t)\|_Z^p$. Докажем, что $\varphi_k \to 0$ в $L_1(I)$. Мы хотим воспользоваться теоремой Лебега.

1. Равномерная ограниченность вытекает из вложения $\mathcal{W} \hookrightarrow C(\bar{I};Z)$. Действительно,

$$\varphi_k(t) \;\le\; \sup_{t \in \bar{I}} \|u_k(t)\|_Z^p \;=\; \|u_k\|_{C(\bar{I};Z)}^p \;\le\; C\;\|u_k\|_{\mathcal{W}}^p,$$

и поскольку $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена в $\mathcal{W}$, мы заключаем, что

$$0 \;\le\; \varphi_k(t) \;\le\; C\; M^p, \qquad \forall\, t \in \bar{I},$$

где мы обозначили $M := \sup\limits_k \|u_k\|_{\mathcal{W}}$.

2. Чтобы установить поточечную сходимость $\varphi_k(t) \to 0$, $\forall\, t \in I$, фиксируем произвольные $t \in I$ и $\varepsilon > 0$ и возьмем точку $s \in I$, $s \neq t$, $s = s(t, M, q, \varepsilon)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$C(q)\; M\; |t-s|^{1/q'} \;<\; \frac{\varepsilon}{2}, \qquad C(q) = (q'+1)^{-\frac{1}{q'}}, \qquad q' = \frac{q}{q-1}.$$

Воспользуемся следствием из формулы Ньютона–Лейбница для класса $\mathcal{W}_{p,q}$:

$$u_k(t) \;=\; \underbrace{\frac{1}{t-s}\int\limits_s^t u_k(\tau)\; d\tau}_{:=\; a_k^{(t,s)}} \;+\; \underbrace{\frac{1}{t-s}\int\limits_s^t (\tau - s)\; \frac{du_k}{d\tau}(\tau)\; d\tau}_{:=\; b_k^{(t,s)}}$$

3. Для последовательности $\{b_k^{(t,s)}\}_{k=1}^{\infty} \subset Z$

$$\|b_k^{(t,s)}\|_Z \;\le\; \frac{1}{|t-s|}\left|\;\int\limits_s^t (\tau - s)\; \left\|\frac{du_k}{d\tau}(\tau)\right\|_Z\; d\tau\;\right|$$

При помощи неравенства Гельдера получаем оценку

$$\|b_k^{(t,s)}\|_Z \;\le\; \frac{1}{|t-s|}\;\left\|\frac{du_k}{d\tau}\right\|_{L_q(I;Z)}\;\left(\frac{|t-s|^{q'+1}}{q'+1}\right)^{1/q'} \;\le\; C(q)\; M\; |t-s|^{1/q'}$$

С учетом нашего выбора точки $s \in I$ получаем

$$\sup_k \|b_k^{(t,s)}\|_Z \;\le\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

4. Перейдем к оценке $\{a_k^{(t,s)}\}_{k=1}^{\infty}$. Так как $u_k \rightharpoonup 0$ в $L_p(I;X)$, в силу предварительных фактов мы заключаем, что

$$a_k^{(t,s)} \;\rightharpoonup\; 0 \qquad \text{в} \quad X.$$

Поскольку вложение $X \hookrightarrow Y$ компактно, мы заключаем, что $a_k^{(t,s)} \to 0$ в Y и, следовательно, $a_k^{(t,s)} \to 0$ в Z. Фиксируем $k_0 = k_0(\varepsilon, t, s)$ так, чтобы при всех $k \ge k_0$ выполнялись неравенства

$$\|a_k^{(t,s)}\|_Z \;<\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для любого $k \ge k_0$

$$0 \;\le\; \|u_k(t)\|_Z \;\le\; \|a_k^{(t,s)}\|_Z \;+\; \|b_k^{(t,s)}\|_Z \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \;+\; \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon.$$

Следовательно, $\forall\, t \in I \;\; \varphi_k(t) = \|u_k(t)\|_Z^p \to 0$ при $k \to \infty$. $\square$

6. **Общий факт о компактных вложениях**

Теорема. Пусть банаховы пространства X, Y, Z таковы, что

1) $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$ (непрерывные вложения)
2) вложение $X \hookrightarrow Y$ компактно

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$, такая что

$$\|x\|_Y \;\le\; \varepsilon\, \|x\|_X \;+\; C_\varepsilon\, \|x\|_Z, \qquad \forall\, x \in X.$$

7. **Компактность вложения в $\boldsymbol{L_p(I;Y)}$**

Теорема. Пусть выполнены условия основной теоремы и $u_k \in L_p(I;X)$ таковы, что

$$u_k \rightharpoonup 0 \quad \text{в} \quad L_p(I;X) \qquad u \qquad u_k \to 0 \quad \text{в} \quad L_p(I;Z).$$

Тогда $u_k \to 0$ в $L_p(I;Y)$.

Доказательство. $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, C_\varepsilon > 0$, такая что для п.в. $t \in I$

$$\|u_k(t)\|_Y \;\le\; \varepsilon\, \|u_k(t)\|_X \;+\; C_\varepsilon\, \|u_k(t)\|_Z$$

Возводя это неравенство в степень p и интегрируя по t, получаем

$$\|u_k\|_{L_p(I;Y)} \;\le\; \varepsilon\, \|u_k\|_{L_p(I;X)} \;+\; C_\varepsilon\, \|u_k\|_{L_p(I;Z)}$$

Поскольку $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ ограничена в $L_p(I;X)$ и $u_k \to 0$ в $L_p(I;Z)$, получаем

$$\limsup_{k\to\infty} \|u_k\|_{L_p(I;Y)} \;\le\; M\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольное, получаем

$$u_k \;\to\; 0 \qquad \text{в} \quad L_p(I;Y).$$

□