5 Решения Лере–Хопфа

5.1 Уравнения Навье-Стокса

1. **Система уравнений Навье-Стокса**

   В этой главе: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей, $n = 2$ или 3, $Q_T := \Omega \times (0,T)$. Уравнениями Навье–Стокса называется система

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u \; - \; \Delta u \; + \; (u\cdot\nabla)u \; + \; \nabla p \; = \; 0 & & \text{в} \qquad Q_T \\ \operatorname{div} u \; = \; 0 & & \\ u|_{t=0} \; = \; a, \qquad u|_{\partial\Omega\times(0,T)} \; = \; 0 & & \end{array} \right. \tag{NS}$$

   Здесь $a : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — заданная функция, удовлетворяющая условиям

$$\operatorname{div} a = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad a|_{\partial\Omega} = 0,$$

   а неизвестными являются поле скоростей $u : Q_T \to \mathbb{R}^n$ и давление $p : Q_T \to \mathbb{R}$.

   Определение. *Гладким решением* уравнений Навье–Стокса мы будем называть функции $u \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ и $p \in C^\infty(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющие соотношениям (NS) поточечно.

2. **Свойство конвективного члена (напоминание)**

   Теорема. Тогдя для любых u, $w \in C^1(\bar{\Omega};\mathbb{R}^n)$, таких что $\operatorname{div} w = 0$ в Ω, выполняется

$$(w\cdot\nabla)u \; = \; \operatorname{div}(u\otimes w)$$

   Если дополнительно предположить, что $u|_{\partial\Omega} = 0$, то

$$\int\limits_\Omega (\nabla u)w\cdot u\; dx \; = \; \int\limits_\Omega (w\cdot\nabla)u\cdot u\; dx \; = \; -\int\limits_\Omega u\otimes w : \nabla u\; dx \; = \; 0.$$

3. **Энергетическое тождество**

   Теорема. Для любого гладкого решения u и p, соответствующего начальному данному a, справедливо *энергетическое тождество*

$$\forall\; t\in(0,T) \qquad \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u(x,t)|^2\; dx \; + \; \int\limits_0^t\int\limits_\Omega |\nabla u(x,\tau)|^2\; dxd\tau \; = \; \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |a(x)|^2\; dx$$

   из которого вытекает оценка

$$\sup_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)} \; + \; \|\nabla u\|_{L_2(Q_T)} \; \le \; c\; \|a\|_{L_2(\Omega)}.$$

4. **Теорема единственности для гладких решений**

Теорема. Пусть (u_1, p_1) и (u_2, p_2) — два гладких решения уравнения Навье–Стокса, соответствующих одному и тому же начальному данному $a \in J_0^\infty(\Omega)$. Тогда

$$u_1 \;=\; u_2 \quad \text{в} \quad Q_T.$$

5. **Уравнения Навье-Стокса для ротора**

Теорема. Пусть u и p — гладкое решение уравнений Навье–Стокса. Тогда

1) если $n = 3$, то

$$(u \cdot \nabla)u \;=\; \operatorname{rot} u \times u \;+\; \nabla \tfrac{1}{2}|u|^2$$

и функция $\omega := \operatorname{rot} u$ удовлетворяет соотношениям

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t \omega + (u \cdot \nabla)\omega - \Delta\omega \;=\; (\omega \cdot \nabla)u \qquad \text{в} \quad Q_T \\ \omega|_{t=0} \;=\; \omega_0, \qquad \omega_0 := \operatorname{rot} a \end{array} \right.$$

2) если $n = 2$, то есть

$$u(x,t) = u_1(x_1, x_2, t)\mathbf{e}_1 + u_2(x_1, x_2, t)\mathbf{e}_2, \qquad p(x,t) = p(x_1, x_2, t),$$

то

$$\operatorname{rot} u \;=\; \omega(x_1, x_2, t)\,\mathbf{e}_3, \qquad \text{где} \qquad \omega := u_{2,1} - u_{1,2}$$

и функция ω удовлетворяет соотношениям

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t \omega + (u \cdot \nabla)\omega - \Delta\omega \;=\; 0 \qquad \text{в} \quad Q_T \\ \omega|_{t=0} \;=\; \omega_0, \qquad \omega_0 := a_{2,1} - a_{1,2} \end{array} \right.$$

5.2 Принцип Лере–Шаудера

1. **Теорема Брауэра о неподвижной точке**

   Теорема. $\bar{B}_R := \{ \ x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \le R \ \}$, $f : \bar{B}_R \to \mathbb{R}^n$ – непрерывна на $\bar{B}_R$, $f(\bar{B}_R) \subset \bar{B}_R$
   $\implies \ \exists \ x_0 \in \bar{B}_R$: $\ f(x_0) = x_0$

   Следствие. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое ограниченное мн–во, $f : M \to M$ — непрерывно на M. Тогда $\ \exists \ x_0 \in M$: $\ f(x_0) = x_0$.

2. **Принцип Шаудера — I**

   Теорема. X — банахово, $K \subset X$, $A : K \to X$

   1) K — компакт
   2) K — выпукло
   3) A — непрерывен на K
   4) $A(K) \subset K$

   Тогда $\ \exists \ x_0 \in K$: $\ A(x_0) = x_0$.

   Доказательство.

   1. A – непр. на $K \implies A$ – равном. непр. на $K \implies \forall \, \varepsilon > 0 \ \ \exists \, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

   $$\forall \ x, y \in K : \qquad \|x - y\| < \delta \qquad \implies \qquad \|A(x) - A(y)\| < \varepsilon$$

   2. K – компакт $\implies \exists$ набор $\{x_i\}_{i=1}^{N_\varepsilon} \subset K$: $\quad K \ \subset \ \bigcup\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} B_\delta(x_i)$

   3. Строим функции $\ \alpha_i : K \to \mathbb{R}, \ \ i = 1, \ldots, N_\varepsilon$

   $$\alpha_i(x) \ = \ \begin{cases} \quad 0, & \|x - x_i\| \ge \delta \\ 1 - \frac{1}{\delta} \, \|x - x_i\|, & \|x - x_i\| < \delta \end{cases} \qquad x \in K$$

   Тогда

   - $\alpha_i \in C(K), \quad 0 \le \alpha_i(x) \le 1$
   - $\alpha_i(x) \ne 0 \quad \iff \quad x \in B_\delta(x_i)$
   - $\sum\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} \alpha_i(x) \ne 0, \quad \forall \, x \in K \qquad \Big(\impliedby \ K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} B_\delta(x_i) \ \Big)$

4. Строим функции $\beta_i : K \to \mathbb{R}, \;\; i = 1, \ldots, N_\varepsilon$

$$\beta_i(x) \;=\; \frac{\alpha_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{N_\varepsilon} \alpha_j(x)} \qquad x \in K$$

Тогда

- $\beta_i \in C(K) \quad$ т.к. $\quad \sum\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} \alpha_i(x) \neq 0, \quad \forall\, x \in K$
- $0 \leq \beta_i(x) \leq 1$
- $\beta_i(x) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in B_\delta(x_i)$
- $\sum\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} \beta_i(x) = 1, \quad \forall\, x \in K$

5. Строим оператор $A_\varepsilon : K \to X$

$$A_\varepsilon(x) \;:=\; \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \beta_i(x) A(x_i), \qquad x \in K$$

Тогда

- A_ε непрерывен на K
- $A_\varepsilon(K) \subset K$, т.к. K – выпукло $\quad \left(\; x_i \in K \;\Rightarrow\; A(x_i) \in K \;\Rightarrow\; \sum\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} \beta_i(x) A(x_i) \in K \; \right)$
- $A_\varepsilon(K) \subset L_\varepsilon := \mathrm{Lin}\{A(x_1), A(x_2), \ldots, A(x_{N_\varepsilon})\}, \quad \dim L_\varepsilon < +\infty$

6. Аппроксимирующее свойство A_ε

$$\forall\, x \in K \qquad \|A_\varepsilon(x) - A(x)\| \;\leq\; \varepsilon$$

Дейситвительно, поскольку $\beta_i(x) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in B_\delta(x_i)$, в сумме ниже отличны от нуля только те слагаемые, в которых $\|A(x) - A(x_i)\| \leq \varepsilon$:

$$\|A_\varepsilon(x) - A(x)\| \;=\; \left\| \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \beta_i(x)(A(x_i) - A(x)) \right\| \;\leq\; \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \underbrace{\beta_i(x)}_{=0 \text{ вне } B_\delta(x_i)} \underbrace{\|A(x_i) - A(x)\|}_{\leq\, \varepsilon} \;\leq\; \varepsilon$$

7. Используем теорему Брауэра (следвствие):

$$K_\varepsilon \;:=\; K \cap L_\varepsilon, \qquad L_\varepsilon := \mathrm{Lin}\{A(x_1), A(x_2), \ldots, A(x_{N_\varepsilon})\}$$

Тогда

- K_ε — выпукло

- K_ε — компактно
- A_ε — непр. на K_ε
- $A_\varepsilon(K_\varepsilon) \subset K_\varepsilon \quad \big($т.к. $A_\varepsilon(K_\varepsilon) \subset A_\varepsilon(K) \subset K$ и $A_\varepsilon(K_\varepsilon) \subset A_\varepsilon(K) \subset L_\varepsilon\big)$

Следовательно, по теореме Брауэра (следствие)

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, x_\varepsilon \in K_\varepsilon: \qquad A_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$$

8. Строим неподвижную точку для оператора A. Пусть $\varepsilon_m \to 0$ и $x_m := x_{\varepsilon_m}$. Тогда

$$A_{\varepsilon_m}(x_m) = x_m, \qquad x_m \in K_{\varepsilon_m} \subset K$$

и поскольку K — компакт, $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset K$, то $\exists\, \{x_{m_i}\}_{i=1}^\infty \subset \{x_m\}_{m=1}^\infty$ и $x_0 \in K$, такие что

$$\|x_{m_i} - x_0\| \to 0$$

При этом

$$\|A(x_0) - x_0\| \ \le\ \underbrace{\|A(x_0) - A(x_m)\|}_{\to 0} + \underbrace{\|A(x_m) - A_{\varepsilon_m}(x_m)\|}_{\le\, \varepsilon_m} + \underbrace{\|A_{\varepsilon_m}(x_m) - x_m\|}_{=\,0} + \underbrace{\|x_m - x_0\|}_{\to 0}$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем $A(x_0) = x_0$, $x_0 \in K$. $\square$

3. **Компактные и вполне непрерывные нелинейные операторы**

Определение. Пусть X — банахово. Нелинейный оператор $A : X \to X$ называется *компактным*, если для любого ограниченного подмножества $B \subset X$ множество $A(B)$ предкомпактно в X. Будем говорить, что оператор A *вполне непрерывен* на X, если он непрерывен и компактен на X.

4. **Принцип Шаудера — II**

Лемма. X — банахово, $K \subset X$ — предкомпакт $\implies$ $\operatorname{conv} K$ — предкомпакт.

$$\operatorname{conv} K \ = \ \Big\{\ y \in X:\ \exists\, \{x_i\}_{i=1}^m \subset K,\ \exists\, \{\lambda_i\}_{i=1}^m,\ \lambda_i \in [0,1],\ \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1,\ y = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\ \Big\}$$

Теорема. X — банахово, $A : X \to X$

1) A — вполне непрерывен на X
2) $\exists$ шар $\bar{B}_R \subset X$: $\quad A(\bar{B}_R) \subset \bar{B}_R$

Тогда $\exists\, x_0 \in \bar{B}_R$: $A(x_0) = x_0$.

Доказательство. Обозначим

$$K \ :=\ \overline{\underbrace{\operatorname{conv} \underbrace{A(\bar{B}_R)}_{\text{предкомп.}}}_{\text{предкомп.}}}$$

Тогда

- K — компакт
- K — выпукло
- $K \subset \bar{B}_R \quad \big($ т.к. $A(\bar{B}_R) \subset \bar{B}_R$, $\bar{B}_R$ выпукло $\Rightarrow$ $\operatorname{conv} A(\bar{B}_R) \subset \bar{B}_R \ \big)$
- $A(K) \subset K \quad \big($ т.к. $A(K) \subset A(\bar{B}_R) \subset \operatorname{conv} A(\bar{B}_R) \subset K \ \big)$
- $A : K \to K$ — непрерывно на K

Следовательно, по теореме Шаудера–I

$$\exists\, x_0 \in K \subset \bar{B}_R : \qquad A(x_0) = x_0$$

□

5. **Теорема Лере–Шаудера**

Теорема. X — сепарабельное банахово, $A : X \to X$

1) A — вполне непрерывен на X
2) множество решений уравнения $x = \lambda A(x)$ ограничено в X равномерно по $\lambda \in [0, 1]$, то есть существует $M > 0$, такое что для любых $x \in X$ и $\lambda \in [0, 1]$ справедлива следующая импликация

$$x = \lambda A(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \|x\|_X \le M.$$

Тогда $\exists\, x_0 \in \bar{B}_M$: $A(x_0) = x_0$.

Доказательство. Обозначим $R := M + 1$.

1. Определим оператор $\tilde{A} : X \to X$

$$A(x) \ = \ \begin{cases} A(x), & \|A(x)\| \le R \\ R\,\frac{A(x)}{\|A(x)\|}, & \|A(x)\| > R \end{cases}$$

2. $\tilde{A}(\bar{B}_R) \subset \bar{B}_R$ — очевидно

3. $\tilde{A}$ непрерывен на X как композиция непрерывных, поскольку

$$\tilde{A} \ = \ P_R \circ A, \qquad \text{где} \qquad P_R(x) \ = \ \begin{cases} x, & \|x\| \le R \\ R\,\frac{x}{\|x\|}, & \|x\| > R \end{cases}$$

и оператор $P_R : X \to X$ является “не растягивающим”, т.е.

$$\|P_R(x) - P_R(y)\| \ \le \ \|x - y\|, \qquad \forall\, x, y \in X$$

4. $\tilde{A}$ — компактный, т.е.

$$f : X \to X \text{ – непр.,} \quad K \subset X \text{ — предкомп.} \ \Longrightarrow \ f(\bar{K}) = \overline{f(K)}$$
$$f : X \to X \text{ – непр.,} \quad A : X \to X \text{ — комп.} \ \Longrightarrow \ f \circ A \text{ — комп.}$$

5. Применяем теорему Шаудера-II:

$$\exists\, x_0 \in \bar{B}_R : \qquad \tilde{A}(x_0) = x_0$$

6. Докажем, что $\tilde{A}(x_0) = A(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \|A(x_0)\| \le R$

От противного: пусть $\|A(x_0)\| > R$, тогда

$$x_0 \;=\; \tilde{A}(x_0) \;=\; \frac{R}{\|A(x_0)\|}\, A(x_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_0 = \lambda\, A(x_0), \qquad \lambda := \frac{R}{\|A(x_0)\|} < 1$$

Но по условию $x_0 = \lambda A(x_0) \;\Rightarrow\; \|x_0\| \le M < R$. С другой стороны, $\|x_0\| = R$ (?!!).

$\square$

5.3 Регуляризованная задача

1. **Оператор усреднения**

   Для любой $u \in L_1(Q_T)$ обозначим через $\tilde u$ продолжение функции u нулем с Q_T на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Обозначим через ω_ε ядро усредения по Соболеву по переменным (x,t):

$$\omega_\varepsilon(x,t) := \frac{1}{\varepsilon^4}\,\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right), \qquad \omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}), \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \omega(x,t)\; dxdt = 1$$

   Определим оператор усреднения по переменным (x,t):

$$T_\varepsilon u \;:=\; \omega_\varepsilon * \tilde u, \qquad (T_\varepsilon u)(x,t) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y,t-\tau)\tilde u(y,\tau)\, dyd\tau$$

   Теорема. Пусть $u \in L_2(0,T;\overset{\circ}{J}_2(\Omega))$ и $w_\varepsilon := T_\varepsilon u$, $\varepsilon>0$. Тогда

$$w_\varepsilon \in C^\infty(\bar Q_T), \qquad \operatorname{div} w_\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad Q_T.$$

2. **Регуляризованная система Навье-Стокса**

   Определение. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$. *Регуляризованной* системой уравнений Навье-Стокса мы будем называть систему

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t u \;-\; \Delta u \;+\; (T_\varepsilon u\cdot\nabla)u \;+\; \nabla p \;=\; 0 \\ \operatorname{div} u \;=\; 0 \\ u|_{t=0} \;=\; a, \qquad u|_{\partial\Omega\times(0,T)} \;=\; 0 \end{array}\right. \qquad \text{в} \qquad Q_T \qquad \qquad (\mathrm{NS}_\varepsilon)$$

   Заметим, что из $\operatorname{div}(T_\varepsilon u)=0$ вытекают тождества

$$(T_\varepsilon u\cdot\nabla)u \;=\; \operatorname{div}\left(u\otimes T_\varepsilon u\right), \qquad \int\limits_\Omega (T_\varepsilon u\cdot\nabla)u\cdot u\,dx = 0, \qquad \forall\; u\in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega).$$

3. **Разрешимость регуляризованной задачи**

   Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ и $\varepsilon>0$. Тогда для любого $T>0$ существуют единственная функция u^ε, являющиеся обобщенным решением задачи $(\mathrm{NS})_\varepsilon$, т.е.

   1) $u^\varepsilon \in C([0,T];\overset{\circ}{J}_2(\Omega))\cap L_2(0,T;\overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega))$, $\quad \partial_t u^\varepsilon \in L_2(0,T;J_2^{-1}(\Omega))$
   2) при п.в. $t\in(0,T)$ функция u^ε удовлетворяет интегральному тождеству

$$\langle\partial_t u^\varepsilon(t), w\rangle + (\nabla u^\varepsilon(t),\nabla w) - (u^\varepsilon(t)\otimes(T_\varepsilon u^\varepsilon)(t),\nabla w) \;=\; 0, \qquad \forall\; w\in\overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$$

   3) $u^\varepsilon(x,0)=a(x)$ для п.в. $x\in\Omega$

4. **План доказательства разрешимости регуляризованной задачи**

- Определение оператора $A : \overset{\circ}{J}_2(Q_T) \to \overset{\circ}{J}_2(Q_T)$
- Непрерывность оператора $u \mapsto A(u)$ в $\overset{\circ}{J}_2(Q_T)$
- Компактность оператора $u \mapsto A(u)$ в $\overset{\circ}{J}_2(Q_T)$
- Априорная оценка: $\exists\, M > 0$: $\forall\, u \in \overset{\circ}{J}_2(Q_T),\ \ \forall\, \lambda \in [0,1]\ \ u = \lambda A(u) \ \Rightarrow\ \|u\|_{\overset{\circ}{J}_2(Q_T)} \le M$
- Принцип Лере–Шаудера: $\exists\, u \in \overset{\circ}{J}_2(Q_T)$: $u = A(u)$

5. **Определение оператора A**

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Для любой $v \in \overset{\circ}{J}_2(Q_T)$ обозначим через $v \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap W_2^{1,0}(Q_T)$ обобщенное решение задачи Стокса-Озина

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u \ - \ \Delta u \ + \ (T_\varepsilon v \cdot \nabla) u \ + \ \nabla p \ = \ 0 \\ \operatorname{div} u \ = \ 0 \\ u|_{t=0} \ = \ a, \qquad u|_{\partial\Omega\times(0,T)} \ = \ 0 \end{array} \right. \qquad \text{в} \qquad Q_T \qquad\qquad (\mathrm{SO}_\varepsilon)$$

и определим нелинейный оператор

$$A : \overset{\circ}{J}_2(Q_T) \to \overset{\circ}{J}_2(Q_T), \qquad A(v) := u$$

6. **Непрерывность оператора A**

Теорема. Если $v^m \to v$ в $L_2(Q_T)$, то $A(v^m) \to A(v)$ в $L_2(Q_T)$.

Доказательство. Пусть $u^m = A(v^m)$ и $u = A(v)$. Тогда для любого $w \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ при п.в. $t \in (0,T)$ выполняется соотношение

$$\langle \partial_t(u^m - u), w\rangle + (\nabla(u^m - u), \nabla w) - ((u^m - u) \otimes T_\varepsilon v^m, \nabla w) \ = \ (u \otimes T_\varepsilon(v^m - v), \nabla w)$$

Пусть $w = u^m(t) - u(t) \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$. С учетом $T_\varepsilon v^m \in L_\infty(\Omega)$, $\operatorname{div} T_\varepsilon v^m = 0$ в Ω, получаем

$$\int\limits_\Omega (u^m - u) \otimes T_\varepsilon v^m : \nabla(u^m - u)\, dx \ = \ 0$$

Следовательно,

$$\tfrac{d}{dt}\|u^m - u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u^m - \nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} \ \le \ c\, \|T_\varepsilon(v^m - v)\|^2_{L_\infty(\Omega)} \|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Интегрируя это неравенство по $t \in (0,T)$, с учетом $u^m|_{t=0} = u|_{t=0} = a$, получаем

$$\|u^m - u\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} + \|\nabla u^m - \nabla u\|_{L_2(Q_T)} \ \le \ c\, \|T_\varepsilon(v^m - v)\|_{L_\infty(Q_T)} \|u\|_{L_2(Q_T)}$$

Из свойств оператора усреднения мы знаем оценку

$$\|T_\varepsilon(v^m - v)\|_{L_\infty(Q_T)} \ \le \ c(\varepsilon)\, \|v^m - v\|_{L_2(Q_T)}$$

Следовательно,

$$\|u^m - u\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} + \|\nabla u^m - \nabla u\|_{L_2(Q_T)} \ \le \ c(\varepsilon)\, \|v^m - v\|_{L_2(Q_T)} \|u\|_{L_2(Q_T)}$$

откуда вытекает, что если $v^m \to v$ в $L_2(Q_T)$, то $u^m \to u$ в $L_2(Q_T)$.

7. Компактность оператора A

Теорема. Если $\{v^m\}$ ограничена в $L_2(Q_T)$, то $\{A(v^m)\}$ предкомпактна в $L_2(Q_T)$.

Доказательство. Пусть $u^m := A(v^m)$. Поскольку v^m являются решениями задач (SO) с $w^m := T_\varepsilon v^m$, они удовлетворяют оценкам

$$\|u^m\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \ + \ \|u^m\|_{W^{1,0}_2(Q_T)} \ \le \ c\, \|a\|_{L_2(\Omega)}$$

$$\|\partial_t u^m\|_{L_2(0,T;J_2^{-1}(\Omega))} \ \le \ c\, \Big(1 + \|w^m\|_{L_\infty(Q_T)}\Big)\, \|u^m\|_{W^{1,0}_2(Q_T)}$$

Пусть

$$\sup_m \|v^m\|_{L_2(Q_T)} \ \le \ M.$$

Тогда с учетом свойств оператора усреднения

$$\|w^m\|_{L_\infty(Q_T)} \ = \ \|T_\varepsilon v^m\|_{L_\infty(Q_T)} \ \le \ c(\varepsilon)\, \|v^m\|_{L_2(Q_T)} \ \le \ c(\varepsilon)\, M$$

и поэтому справедливы оценки

$$\|u^m\|_{W^{1,0}_2(Q_T)} \ \le \ c\, \|a\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \|\partial_t u^m\|_{L_2(0,T;J_2^{-1}(\Omega))} \ \le \ c\, \Big(1 + c(\varepsilon) M\Big)\, \|a\|_{L_2(\Omega)}$$

Обозначим $X := \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$, $Y := \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$, $Z := J_2^{-1}(\Omega)$. Тогда $X \hookrightarrow Y$ компактно и при этом мы установили, что последовательность $\{v^m\}$ ограничена по норме пространства

$$\mathcal{W} \ := \ \Big\{ \ w \in L_2(0,T;X) : \ \partial_t w \in L_2(0,T;Z) \ \Big\}.$$

В силу компактности вложения $\mathcal{W} \hookrightarrow L_2(0,T;Y)$ мы заключаем, что

$$\{u^m\} \ \text{ предкомпактна в } \ \overset{\circ}{J}_2(Q_T) = L_2(0,T;\overset{\circ}{J}_2(\Omega)).$$

8. Априорная оценка для неподвижных точек оператора λA

Теорема. Существует постоянная $c_a > 0$, зависящая только от $\|a\|_{L_2(\Omega)}$, такая что выполняется импликация

$$\forall\, u \in \overset{\circ}{J}_2(Q_T), \qquad \forall\, \lambda \in [0,1] : \qquad u = \lambda A(u) \qquad \Longrightarrow \qquad \|u\|_{L_2(Q_T)} \ \le \ c_a.$$

Доказательство. Обозначим $v := \frac{1}{\lambda}u$. Тогда $v = A(u)$ и, следовательно, v является обобщенным решением задачи (SO_ε). Поэтому при $\lambda \in [0,1]$ функция u является обобщенным решением следующей задачи Стокса-Озина

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u \ - \ \Delta u \ + \ (\lambda\, T_\varepsilon u \cdot \nabla) u \ + \ \nabla p \ = \ 0 \\ \operatorname{div} u \ = \ 0 \\ u|_{t=0} \ = \ a, \qquad u|_{\partial\Omega\times(0,T)} \ = \ 0 \end{array} \right. \qquad \text{в} \qquad Q_T$$

Поскольку для любого $\lambda \in [0,1]$ дрифт $w_\varepsilon := \lambda T_\varepsilon u$ удовлетворяет условиям $w_\varepsilon \in L_\infty(Q_T)$ и $\operatorname{div} w_\varepsilon = 0$ в Q_T, для u выполняется энергетическая оценка

$$\|u\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \ + \ \|u\|_{W^{1,0}_2(Q_T)} \ \le \ c\,\|a\|_{L_2(\Omega)} \qquad \Longrightarrow \qquad \|u\|_{L_2(Q_T)} \ \le \ c_a.$$

9. **Существование неподвижной точки оператора $\boldsymbol{A}$**

Теорема. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Тогда существует единственная функция u, являющиеся обобщенным решением задачи $(\mathrm{NS})_\varepsilon$.

Доказательство. Вытекает из принципа Лере-Шаудера. $\square$

5.4 Мультипликативные неравенства

1. **Неравенства О.А. Ладыженской**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ — произвольная область (огр. или неогр.). Тогда

1) если $n = 2$, то

$$\|u\|^4_{L_4(\Omega)} \ \le\ 2\ \|w\|^2_{L_2(\Omega)}\ \|\nabla w\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\ w \in C_0^\infty(\Omega)$$

2) если $n = 3$, то

$$\|w\|^4_{L_4(\Omega)} \ \le\ 4\ \|w\|_{L_2(\Omega)}\ \|\nabla w\|^3_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\ w \in C_0^\infty(\Omega)$$

Доказательство.

1. Пусть $n = 2$, $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$. Тогда

$$|u(x_1,x_2)|^2 \ \le\ 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1,s)|\,|u_{,2}(x_1,s)|\,ds \ \le\ 2\ \underbrace{\|u(x_1,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}}_{=:\,F_1(x_1)}\ \underbrace{\|u_{,2}(x_1,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}}_{=:\,G_1(x_1)}$$

$$|u(x_1,x_2)|^2 \ \le\ 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(s,x_2)|\,|u_{,1}(s,x_2)|\,ds \ \le\ 2\ \underbrace{\|u(\cdot,x_2)\|_{L_2(\mathbb{R})}}_{=:\,F_2(x_2)}\ \underbrace{\|u_{,1}(\cdot,x_2)\|_{L_2(\mathbb{R})}}_{=:\,G_2(x_2)}$$

Перемножим эти неравенства и результат проинтегрируем по $\mathbb{R}^2$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u(x_1,x_2)|^4\,dx_1dx_2 \ =\ 4 \int\limits_{\mathbb{R}^2} F_1(x_1)G_1(x_1)F_2(x_2)G_2(x_2)\,dx_1dx_2 \ =$$

$$=\ 4 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1(x_1)G_1(x_1)\,dx_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_2(x_2)G_2(x_2)\,dx_2 \ \le$$

$$\le\ 4\ \underbrace{\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1^2(x_1)\,dx_1\Big)^{1/2}}_{=\,\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}} \underbrace{\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_1^2(x_1)\,dx_1\Big)^{1/2}}_{=\,\|u_{,2}\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}} \underbrace{\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_2^2(x_2)\,dx_2\Big)^{1/2}}_{=\,\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}} \underbrace{\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_2^2(x_2)\,dx_2\Big)^{1/2}}_{=\,\|u_{,1}\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}} \ =$$

$$=\ 4\,\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}\|u_{,1}\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}\|u_{,2}\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \ \le\ 2\,\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}\Big(\|u_{,1}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} + \|u_{,2}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}\Big) \ =$$
$$=\ 2\,\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}\,\|\nabla u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}$$

2. Пусть $n = 3$, $u \in C_0^1(\mathbb{R}^3)$. По неравенству Гельдера

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |u|^4\,dx \ =\ \int\limits_{\mathbb{R}^3} |u|\,|u|^3\,dx \ \le \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3} |u|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3} |u|^6\,dx\Big)^{1/2} \ =\ \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\|u\|^3_{L_6(\mathbb{R}^3)}$$

Напомним неравенство Гальярдо–Ниренберга при $n=3$:

$$\|u\|_{L_6(\mathbb{R}^3)} \;\le\; 4\,\|\nabla u\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}, \qquad \forall\, u\in C_0^1(\mathbb{R}^3)$$

Тогда

$$\|u\|^4_{L_4(\mathbb{R}^3)} \;\le\; \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\|u\|^3_{L_6(\mathbb{R}^3)} \;\le\; 4\,\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u\|^3_{L_6(\mathbb{R}^3)}$$

□

2. **Общее мультипликативное неравенство**

Теорема. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — произвольная область (огр. или неогр.) и $s\in[2,6]$. Тогда

$$\|w\|_{L_s(\Omega)} \;\le\; c_s\,\|w\|^{1-\lambda}_{L_2(\Omega)}\,\|\nabla w\|^{\lambda}_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\, w\in C_0^1(\Omega).$$

где $\lambda\in[0,1]$, $\lambda:=\frac{3(s-2)}{2s} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{s}=\frac{1-\lambda}{2}+\frac{\lambda}{6}$.

3. **Вложение энергетического класса в $L_s(Q_T)$**

Теорема. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n=2,3$ — произвольная область (огр. или неогр.). Тогда

1) если $n=2$, то

$$\|u\|^4_{L_4(Q_T)} \;\le\; c\,\|u\|^2_{L_{2,\infty}(Q_T)}\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)}, \qquad \forall\, u\in L_{2,\infty}(Q_T)\cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$$

2) если $n=3$, то

$$\|u\|^{\frac{10}{3}}_{L_{\frac{10}{3}}(Q_T)} \;\le\; c\,\|u\|^{\frac{4}{3}}_{L_{2,\infty}(Q_T)}\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)}, \qquad \forall\, u\in L_{2,\infty}(Q_T)\cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$$

4. **Вложение энергетического класса в $\boldsymbol{L_{s,l}(Q_T)}$**

Теорема. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — произвольная область (огр. или неогр.). Тогда

$$\forall\, s\in[2,6],\quad l\in[2,\infty]: \qquad \frac{3}{s}\;+\;\frac{2}{l}\;=\;\frac{3}{2}$$

существует постояннная $c(s,l)>0$, такая что

$$\|u\|_{L_{s,l}(Q_T)} \;\le\; c(s,l)\,\|u\|^{1-\frac{2}{l}}_{L_{2,\infty}(Q_T)}\|\nabla u\|^{\frac{2}{l}}_{L_2(Q_T)}, \qquad \forall\, u\in L_{2,\infty}(Q_T)\cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$$

5.5 Решения Лере-Хопфа

1. **Определение решений Лере–Хопфа**

   Определение. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$. Функция $u : Q_T \to \mathbb{R}^n$ называется *решением Лере–Хопфа* уравнений Навье–Стокса

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u \; - \; \Delta u \; + \; (u \cdot \nabla) u \; + \; \nabla p \; = \; 0 \\ \operatorname{div} u \; = \; 0 \\ u|_{t=0} \; = \; a, \qquad u|_{\partial\Omega \times (0,T)} \; = \; 0 \end{array} \right. \quad \text{в} \quad Q_T \tag{NS}$$

   если выполняются следующие условия

   1) $u \; \in \; L_\infty(0,T; \overset{\circ}{J}_2(\Omega)) \cap L_2(0,T; \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega))$
   2) $u \in C_w([0,T]; L_2(\Omega))$, т.е. для любого $t \in [0,T]$ $u(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ и

$$\forall \; w \in L_2(\Omega) \quad \text{функция} \quad t \; \mapsto \; \int\limits_\Omega u(x,t) w(x) \; dx \quad \text{непрерывна на} \quad [0,T]$$

   3) u удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} \Big(- u \cdot \partial_t \eta + \nabla u : \nabla \eta - u \otimes u : \nabla \eta \Big) \; dxdt \; = \; 0, \qquad \forall \; \eta \in J_0^\infty(Q_T)$$

   4) u удовлетворяет *глобальному энергетическому неравенству*

$$\forall \; t \in [0,T] \qquad \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u(x,t)|^2 \; dx \; + \; \int\limits_0^t \int\limits_\Omega |\nabla u(x,\tau)|^2 \; dx d\tau \; \leq \; \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |a(x)|^2 \; dx$$

   5) u удовлетворяет начальному условию $u(x,0) = a(x)$ п.в. $x \in \Omega$ и

$$\|u(t) - a\|_{L_2(\Omega)} \; \to \; 0 \qquad \text{при} \quad t \to +0$$

2. **Глобальное существование решений Лере–Хопфа**

   Теорема. Пусть $T > 0$ произвольное и $Q_T := \Omega \times (0,T)$. Для любого $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ существует по крайней мере одна функция $u : Q_T \to \mathbb{R}^n$, являющаяся решением Лере–Хопфа уравнений Навье–Стокса (NS).

3. **План**

   - Энергетическая оценка решений u^ε регуляризованной задачи (NS_ε).
   - Оценка слабой призводной по времени $\partial_t u^\varepsilon$ и компактность u^ε в $L_2(Q_T)$.

- Предельный переход в уравнениях.
- Непрерывность решения в слабой топологии $L_2(\Omega)$.
- Энергетическое неравенство.
- Сильная непрерывность решения в $L_2(\Omega)$ в начальный момент.

4. **Доказательство теоремы существования в классе Лере-Хопфа**

1. Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим через $u^\varepsilon \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap W_2^{1,0}(Q_T)$ обобщенное решение регуляризованной задачи (NS$_\varepsilon$).

Поскольку при п.в. $t \in (0,T)$ имеет место включение $u^\varepsilon(t) \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$, мы использовать $w = u^\varepsilon(t)$ в качестве пробной фукнции в тождестве для u^ε. Мы получим оценку

$$\|u^\varepsilon\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} + \|u^\varepsilon\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \ \leq \ c\,\|a\|_{L_2(\Omega)}$$

Поэтому существует $u \in L_\infty(0,T;\overset{\circ}{J}_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega))$, такая что для некоторой подпоследовательности (за которой мы сохраним обозначение $\{u^\varepsilon\}$) имеют место сходимости

$$u^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{в} \quad L_{2,\infty}(Q_T), \qquad u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad W_2^{1,0}(Q_T)$$

2. Рассмотрим сначала случай $n = 3$. Из тождества

$$\langle \partial_t u^\varepsilon(t), w\rangle + (\nabla u^\varepsilon(t), \nabla w) - (u^\varepsilon(t) \otimes (T_\varepsilon u^\varepsilon)(t), \nabla w) \ = \ 0, \qquad \forall\ w \in \overset{\circ}{J}{}^1_{\frac52}(\Omega)$$

вытекает оценка

$$\|\partial_t u^\varepsilon(t)\|_{J^{-1}_{\frac53}(\Omega)} \ \leq \ \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{L_{\frac53}(\Omega)} + \|u^\varepsilon(t) \otimes (T_\varepsilon u^\varepsilon)(t)\|_{L_{\frac53}(\Omega)}$$

откуда с учетом неравенства Гельдера мы получим

$$\|\partial_t u^\varepsilon\|_{L_{\frac53}(0,T;J^{-1}_{\frac53}(\Omega))} \ \leq \ c\,\|\nabla u^\varepsilon\|_{L_2(Q_T)} + \|u^\varepsilon\|_{L_{\frac{10}{3}}(Q_T)}\|T_\varepsilon u^\varepsilon\|_{L_{\frac{10}{3}}(Q_T)}$$

Из свойств оператора усреднения вытекает, что

$$\|T_\varepsilon u^\varepsilon\|_{L_{\frac{10}{3}}(Q_T)} \ \leq \ \|u^\varepsilon\|_{L_{\frac{10}{3}}(Q_T)}$$

откуда

$$\|\partial_t u^\varepsilon\|_{L_{\frac53}(0,T;J^{-1}_{\frac53}(\Omega))} \ \leq \ c\,\|\nabla u^\varepsilon\|_{L_2(Q_T)} + \|u^\varepsilon\|^2_{L_{\frac{10}{3}}(Q_T)}$$

Из мультипликативного неравенства мы знаем, что

$$\|u^\varepsilon\|_{L_{\frac{10}{3}}(Q_T)} \ \leq \ \|u^\varepsilon\|^{\frac25}_{L_{2,\infty}(Q_T)}\|\nabla u^\varepsilon\|^{\frac35}_{L_2(Q_T)}$$

и, с учетом энергетической оценки, мы получаем неравенство

$$\|\partial_t u^\varepsilon\|_{L_{\frac53}(0,T;J^{-1}_{\frac53}(\Omega))} \ \leq \ c\left(\|a\|_{L_2(\Omega)} + \|a\|^2_{L_2(\Omega)}\right)$$

В случае $n=2$ мы аналогичными рассуждениями приходим к оценке

$$\|\partial_t u^\varepsilon\|_{L_2(0,T;J_2^{-1}(\Omega))} \ \le \ c\left(\|a\|_{L_2(\Omega)} + \|a\|^2_{L_2(\Omega)}\right)$$

Обозначим $X := \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$, $Y := \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$, $Z := \overset{\circ}{J}{}^{-1}_{\frac53}(\Omega)$, $\ X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$, и пусть

$$\mathcal{W} \ := \ \{ \ v \in L_2(0,T;X) : \, \partial_t u^\varepsilon \in L_{\frac53}(0,T;Z) \ \}$$

Поскольку вложение $X \hookrightarrow Y$ компактно, вложение $\mathcal{W} \hookrightarrow L_2(0,T;Y)$ также компактно. Поскольку $\{u^\varepsilon\}$ ограничено в $\mathcal{W}$, $\{u^\varepsilon\}$ предкомпактно в $L_2(0,T;Y)$. С учетом сходимости $u^\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W^{1,0}_2(Q_T)$ мы заключаем, что существует подпоследовательность $\{u^\varepsilon\}$, такая что

$$u^\varepsilon \to u \quad \text{в} \quad L_2(Q_T)$$

Кроме того, из ограниченности $\{\partial_t u^\varepsilon\}$ в $L_{\frac53}(0,T;J^{-1}_{\frac53}(\Omega))$ вытекает что

$$\partial_t u \in L_{\frac53}(0,T;J^{-1}_{\frac53}(\Omega)), \qquad \partial_t u^\varepsilon \rightharpoonup \partial_t u \quad \text{в} \quad L_{\frac53}(0,T;J^{-1}_{\frac53}(\Omega))$$

3. Из соотношений при п.в. $t \in (0,T)$

$$\langle \partial_t u^\varepsilon(t), w\rangle + (\nabla u^\varepsilon(t), \nabla w) - (u^\varepsilon(t)\otimes (T_\varepsilon u^\varepsilon)(t), \nabla w) \ = \ 0, \qquad \forall \ w \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$$

стандартными рассуждениями вытекает тождество

$$\int\limits_{Q_T} \Big(- u^\varepsilon \cdot \partial_t \eta + \nabla u^\varepsilon : \nabla \eta - u^\varepsilon \otimes T_\varepsilon u^\varepsilon : \nabla \eta \Big)\, dxdt \ = \ 0, \qquad \forall \ \eta \in J^\infty_0(Q_T)$$

Заметим, что для $\eta \in J^\infty_0(\Omega)$ справеливо неравенство

$$\Big| \int\limits_{Q_T} (u^\varepsilon \otimes T_\varepsilon u^\varepsilon - u\otimes u) : \nabla \eta \, dxdt \ \Big| \ \le \ \big\| u^\varepsilon \otimes T_\varepsilon u^\varepsilon - u\otimes u\big\|_{L_1(Q_T)} \|\nabla \eta\|_{L_\infty(Q_T)}$$

Для первого сомножителя в правой части мы имеем оценку

$$\big\| u^\varepsilon \otimes T_\varepsilon u^\varepsilon - u\otimes u\big\|_{L_1(Q_T)} \ \le$$
$$\le \ \|u^\varepsilon - u\|_{L_2(Q_T)} \big\|T_\varepsilon u^\varepsilon\big\|_{L_2(Q_T)} + \|u\|_{L_2(Q_T)} \big\|T_\varepsilon(u^\varepsilon - u)\big\|_{L_2(Q_T)} + \|u\|_{L_2(Q_T)}\big\|T_\varepsilon u - u\big\|_{L_2(Q_T)}$$

С учетом свойств оператора усреднения

$$\big\|T_\varepsilon u^\varepsilon\big\|_{L_2(Q_T)} \le \|u^\varepsilon\|_{L_2(Q_T)}, \qquad \big\|T_\varepsilon(u^\varepsilon - u)\big\|_{L_2(Q_T)} \le \|u^\varepsilon - u\|_{L_2(Q_T)}$$

мы получаем

$$\big\| u^\varepsilon \otimes T_\varepsilon u^\varepsilon - u\otimes u\big\|_{L_1(Q_T)} \ \le \ c\left(\|u^\varepsilon\|_{L_2(Q_T)} + \|u\|_{L_2(Q_T)}\right) \|u^\varepsilon - u\|_{L_2(Q_T)}$$

и поэтому из сходимости $u^\varepsilon \to u$ в $L_2(Q_T)$ вытекает сходимость

$$\int\limits_{Q_T} u^\varepsilon \otimes T_\varepsilon u^\varepsilon : \nabla \eta \, dxdt \ \to \ \int\limits_{Q_T} u \otimes u : \nabla \eta \, dxdt, \qquad \forall \ \eta \in J_0^\infty(Q_T)$$

С учетом слабой сходимости $u^\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W_2^{1,0}(Q_T)$ мы можем также перейти к пределу в линейных членах. В итоге мы получаем тождество

$$\int\limits_{Q_T} \Big(- u \cdot \partial_t \eta + \nabla u : \nabla \eta - u \otimes u : \nabla \eta \Big) \, dxdt \ = \ 0, \qquad \forall \ \eta \in J_0^\infty(Q_T)$$

4. Пусть $\varepsilon_m \to 0$. Возьмем произвольную $w \in \overset{\circ}{J}{}^1_{\frac52}(\Omega)$ и обозначим

$$f_m(t) \ := \ (u^{\varepsilon_m}(t), w) \ = \ \int\limits_\Omega u^{\varepsilon_m}(x,t) \cdot w(x) \, dx$$

Поскольку $u^{\varepsilon_m} \in C([0,T]; L_2(\Omega))$, заключаем, что $f_m \in C([0,T])$, $\ \forall \ m \in \mathbb{N}$.

Докажем, что последовательность $\{f_m\}$ предкомпактна в $C([0,T])$. Равномерная ограниченность вытекает из энергетического неравенства:

$$\sup\limits_{t\in[0,T]} |f_m(t)| \ \le \ \|u^{\varepsilon_m}\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \|w\|_{L_2(\Omega)} \ \le \ \|a\|_{L_2(\Omega)} \|w\|_{L_2(\Omega)}$$

Для доказательства равностепенной непрерывности воспользуемся тождеством

$$\frac{d}{dt} (u^{\varepsilon_m}(t), w) \ = \ \langle \partial_t u^{\varepsilon_m}(t), w \rangle, \qquad w \in \overset{\circ}{J}{}^1_{\frac52}(\Omega)$$

и проинтегрируем его по промежутку $(t, t+\Delta t)$. Получим

$$|f_m(t+\Delta t) - f_m(t)| \ \le \ \int\limits_t^{t+\Delta t} |\langle \partial_t u^{\varepsilon_m}(\tau), w\rangle| \, d\tau \ \le \ \big\|w\big\|_{\overset{\circ}{J}{}^1_{\frac52}(\Omega)} \int\limits_t^{t+\Delta t} \|\partial_t u^{\varepsilon_m}\|_{J^{-1}_{\frac53}(\Omega)} \, d\tau$$

и по неравенству Гельдера

$$|f_m(t+\Delta t) - f_m(t)| \ \le \ \big\|w\big\|_{\overset{\circ}{J}{}^1_{\frac52}(\Omega)} |\Delta t|^{\frac25} \, \|\partial_t u^{\varepsilon_m}\|_{L_{\frac53}(0,T; J^{-1}_{\frac53}(\Omega))}$$

С учетом уже полученной оценки

$$\|\partial_t u^{\varepsilon_m}\|_{L_{\frac53}(0,T; J^{-1}_{\frac53}(\Omega))} \ \le \ c \, \|a\|_{L_2(\Omega)} (1 + \|a\|_{L_2(\Omega)})$$

мы получаем

$$|f_m(t+\Delta t) - f_m(t)| \ \le \ c_{a,w} \, |\Delta t|^{\frac25}$$

что означает, что последовательность $\{f_m\}$ равностепенно непрерывна. Таким образом, последовательность $\{f_m\}$ предкомпактна в $C([0,T])$, и поэтому для некоторой подпоследовательности

$$\sup_{t\in[0,T]} |(u^{\varepsilon_m}(t),w) - (u^{\varepsilon_k}(t),w)| \;=\; \sup_{t\in[0,T]} |f_m(t) - f_k(t)| \;\to\; 0.$$

Таким образом,

$$\left\{\begin{array}{ll} & \|u^{\varepsilon_m}\|_{L_\infty(0,T;\overset{\circ}{J}_2(\Omega))} \;\le\; \|a\|_{L_2(\Omega)}, \\ \forall\, w \in \overset{\circ}{J}{}^1_{\frac{5}{2}}(\Omega) & \sup_{t\in[0,T]} |(u^{\varepsilon_m}(t),w) - (u^{\varepsilon_k}(t),w)| \;\to\; 0 \quad \text{при} \quad m,k\to\infty. \end{array}\right.$$

Поскольку $\overset{\circ}{J}{}^1_{\frac{5}{2}}(\Omega)$ всюду плотно в $\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$, по следствию из теоремы Банаха–Штейнгауза (рвномерная ограниченность последовательности плюс ее слабая сходимость на плотном подмножестве влечет слабую сходимость на всем банаховом пространстве) мы получаем

$$\forall\, w \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega) \qquad \sup_{t\in[0,T]} |(u^{\varepsilon_m}(t),w) - (u^{\varepsilon_k}(t),w)| \;\to\; 0 \quad \text{при} \quad m,k\to\infty.$$

то есть

$$\{u^{\varepsilon_m}\} \quad \text{фундаментальна в} \;\; C_w([0,T];\overset{\circ}{J}_2(\Omega))$$

Поскольку $C_w([0,T];\overset{\circ}{J}_2(\Omega))$ слабо секвенциально полно, $\exists\, \bar u \in C_w([0,T];\overset{\circ}{J}_2(\Omega))$, такая то

$$\forall\, w \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega) \qquad \sup_{t\in[0,T]} |(u^{\varepsilon_m}(t),w) - (\bar u(t),w)| \;\to\; 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty.$$

Тогда для любой $v\in L_2(\Omega)$, используя разложение Гельмгольца

$$v = w + \nabla\pi, \quad w\in \overset{\circ}{J}_2(\Omega), \quad \pi\in W^1_2(\Omega),$$

мы получаем

$$(u^{\varepsilon_m}(t),v) = (u^{\varepsilon_m}(t),w) + \underbrace{(u^{\varepsilon_m}(t),\nabla\pi)}_{=\,0}, \qquad (\bar u(t),v) = (\bar u(t),w) + \underbrace{(u(t),\nabla\pi)}_{=\,0}$$

откуда

$$\forall\, v \in L_2(\Omega) \qquad \sup_{t\in[0,T]} |(u^{\varepsilon_m}(t),v) - (\bar u(t),v)| \;\to\; 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty.$$

Следовательно,

$$\bar u \in C([0,T];L_2(\Omega)) \qquad \text{и} \qquad \forall\; t\in[0,T] \qquad u^{\varepsilon_m}(t) \rightharpoonup \bar u(t) \quad \text{в} \quad L_2(\Omega)$$

Поскольку $u^{\varepsilon_m} \to u$ в $L_2(Q_T)$, для п.в. $t\in(0,T)$ имеет место $u^{\varepsilon_m}(t)\to u(t)$ в $L_2(\Omega)$. Следовательно, $u(t)=\bar u(t)$ для п.в. $t\in(0,T)$. Это, в частности, означает, что в классе эквивалентности $u\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ существует представитель $\bar u$, такой что

$$\bar u(t)\in L_2(\Omega) \quad \text{для } \textit{любого} \;\; t\in[0,T].$$

5. Для любого $\varepsilon_m > 0$ И любого $t \in [0,T]$ имеет место энергетическое тождество

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u^{\varepsilon_m}(x,t)|^2\, dx \;+\; \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} |\nabla u^{\varepsilon_m}(x,\tau)|^2\, dxd\tau \;\le\; \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |a(x)|^2\, dx$$

Поскольку при фиксированном $t \in [0,T]$

$$u^{\varepsilon_m}(t) \rightharpoonup u(t) \;\text{ в }\; L_2(\Omega), \qquad \nabla u^{\varepsilon_m} \rightharpoonup \nabla u \;\text{ в }\; L_2(Q_t)$$

в силу полунепрерывности снизу нормы относительно слабой сходимости получаем

$$\int\limits_{\Omega} |u(x,t)|^2\, dx \;\le\; \liminf_{\varepsilon_m\to 0} \int\limits_{\Omega} |u^{\varepsilon_m}(x,t)|^2\, dx,$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x,\tau)|^2\, dxd\tau \;\le\; \liminf_{\varepsilon_m\to 0} \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} |\nabla u^{\varepsilon_m}(x,\tau)|^2\, dxd\tau$$

откуда вытекает энергетическое *неравенство* для u:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u(x,t)|^2\, dx \;+\; \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x,\tau)|^2\, dxd\tau \;\le\; \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |a(x)|^2\, dx$$

6. Поскольку $u^{\varepsilon_m}(0) = a$ и $u^{\varepsilon_m}(0) \rightharpoonup u(0)$ в $L_2(\Omega)$, заключаем, что $u(0) = a$ в $L_2(\Omega)$, т.е.

$$u(x,0) = a(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in \Omega.$$

В силу того, что $u \in C_w([0,T]; L_2(\Omega))$, мы заключаем, что $u(t) \rightharpoonup u(0)$ при $t \to +0$, откуда в силу полунепрерывности нормы

$$\|a\|_{L_2(\Omega)} \;\le\; \liminf_{t\to +0} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}$$

С другой стороны, из энергетического неравенства вытекает, что

$$\limsup_{t\to +0} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)} \;\le\; \|a\|_{L_2(\Omega)}$$

Поскольку в гильбертовом пространстве слабая сходимость плюс сходимость норм означают сильную сходимость, заключаем

$$\|u(\cdot,t) - a\|_{L_2(\Omega)} \;\to\; 0 \qquad \text{при} \qquad t \to +0.$$

□

5. Слабая производная по времени для решений Лере–Хопфа

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$ — ограниченная область, $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ и u — решение Лере–Хопфа уравнений (NS). Тогда

1) если $n=2$, то $\partial_t u \in L_2(0,T; J_2^{-1}(\Omega))$ и соотношение

$$\langle \partial_t u(t), w\rangle + (\nabla u(t), \nabla w) - (u(t)\otimes u(t), \nabla w) \ = \ 0 \qquad \text{п.в.} \quad t\in (0,T)$$

выполняется для любой функции $w \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$. В частности, справедлива оценка

$$\|\partial_t u\|_{L_2(0,T;J_2^{-1}(\Omega))} \ \le \ \|\nabla u\|_{L_2(Q_T)} + \|u\|^2_{L_4(Q_T)}.$$

2) если $n=3$, то $\partial_t u \in L_{\frac53}(0,T; J_{\frac53}^{-1}(\Omega))$ и соотношение

$$\langle \partial_t u(t), w\rangle + (\nabla u(t), \nabla w) - (u(t)\otimes u(t), \nabla w) \ = \ 0 \qquad \text{п.в.} \quad t\in (0,T)$$

выполняется для любой функции $w \in \overset{\circ}{J}{}^1_{\frac52}(\Omega)$. В частности, справедлива оценка

$$\|\partial_t u\|_{L_{\frac53}(0,T;J_{\frac53}^{-1}(\Omega))} \ \le \ \|\nabla u\|_{L_2(Q_T)} + \|u\|^2_{L_{\frac{10}{3}}(Q_T)}.$$

5.6 Двумерный случай

1. **Свойства конвективного члена в 2D**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — произвольная область (огр. или неогр.). Тогда для любой функции $u \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap L_2(0,T; \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega))$ имеет место включение

   $$u \otimes u : \nabla u \in L_1(Q_T)$$

   и при п.в. $t \in (0,T)$

   $$\int\limits_\Omega u(t) \otimes u(t) : \nabla u(t) \; dx \;=\; 0.$$

   Доказательство: Из неравенства О.А. Ладыженской при $n = 2$ вытекает, что $u \in L_4(Q_T)$, откуда $u \otimes u \in L_2(Q_T)$ и, следовательно, $u \otimes u : \nabla u \in L_1(Q_T)$.

   С другой стороны, из $u \in L_2(0,T; \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega))$ вытекает, что при п.в. $t \in (0,T)$ $u(t) \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$. Но для любой $v \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ при помощи интегрирования по частям мы получаем

   $$\int\limits_\Omega v \otimes v : \nabla v \, dx \;=\; \int\limits_\Omega v_j v_k v_{j,k} \, dx \;=\; \frac{1}{2} \int\limits_\Omega v \cdot \nabla |v|^2 \, dx \;=\; -\frac{1}{2} \int\limits_\Omega \underbrace{\operatorname{div} v}_{=0} |v|^2 \, dx \;=\; 0$$

   □

2. **Энергетическое тождество в 2D**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$, u — решение Лере–Хопфа уравнений (NS). Тогда

   $$\forall\, t \in [0,T] \qquad \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u(x,t)|^2 \; dx \;+\; \int\limits_0^t \int\limits_\Omega |\nabla u(x,\tau)|^2 \; dx d\tau \;=\; \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |a(x)|^2 \; dx$$

   Доказательство: При $n = 2$ выполняется $\partial_t u \in L_2(0,T; J_2^{-1}(\Omega))$ и для п.в. $\tau \in (0,T)$

   $$\langle \partial_t u(\tau), w \rangle + (\nabla u(\tau), \nabla w) - (u(\tau) \otimes u(\tau), \nabla w) \;=\; 0 \qquad \forall\, w \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega).$$

   Полагая в этом тождестве $w = u(\tau) \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$, получаем

   $$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|u(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)} \;=\; 0 \qquad \text{п.в.} \quad \tau \in (0,T)$$

   откуда интегрированием по $\tau \in (0,t)$ получаем требуемое тождество. □

3. **Теорема единственности в 2D**

Следующая теорема доказана:

- 1958, О.А. Ладыженская — для случая $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$
- 1959, J.L. Lions & Prodi — для случая $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$. Предположим, что u_1 и u_2 — два решения Лере–Хопфа системы уравнений Навье–Стокса (NS), соответствующих начальному данному a. Тогда $u_1 = u_2$ п.в. в Q_T.

Доказательство: Обозначим $v := u_2 - u_1$. Тогда при п.в. $t \in (0,T)$

$$\langle \partial_t v(t), w\rangle + (\nabla v(t), \nabla w) \;=\; (u_2(t)\otimes u_2(t) - u_1(t)\otimes u_1(t), \nabla w) \qquad \forall\, w \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega).$$

Положим $w = v(t)$ и воспользуемся тождеством

$$(u_2(t)\otimes u_2(t) - u_1(t)\otimes u_1(t), \nabla v(t)) \;=\; \underbrace{(v(t)\otimes u_2(t), \nabla v(t))}_{=0} + (u_1(t)\otimes v(t), \nabla v(t))$$

С помощью неравенства Гельдера получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;\le\; \|u_1(t)\|_{L_4(\Omega)}\|v(t)\|_{L_4(\Omega)}\|\nabla v(t)\|_{L_2(\Omega)}$$

при помощи неравенства Ладыженской $\|v(t)\|_{L_4(\Omega)} \le \|v(t)\|^{\frac12}_{L_2(\Omega)}\|\nabla v(t)\|^{\frac12}_{L_4(\Omega)}$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;\le\; c\,\|u_1(t)\|_{L_4(\Omega)}\|v(t)\|^{\frac12}_{L_2(\Omega)}\|\nabla v(t)\|^{\frac32}_{L_2(\Omega)}$$

откуда по неравенству Юнга

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;\le\; c\,\|u_1(t)\|^4_{L_4(\Omega)}\|v(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Следовательно, $y(t) := \|v(t)|^2_{L_2(\Omega)}$ удовлетворяет оценке

$$y'(t) \;\le\; c\, b(t)\, y(t), \qquad \text{где} \qquad b(t) := \|u_1(t)\|^4_{L_4(\Omega)}.$$

Из неравенства Ладыженской при $n = 2$ мы получаем

$$u_1 \in L_{2,\infty}(Q_T)\cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)) \quad\Longrightarrow\quad u_1 \in L_4(Q_T) \quad\Longrightarrow\quad b \in L_1(0,T)$$

По лемме Гронуолла получаем

$$y(t) \;\le\; y(0)\, e^{c\int_0^t b(\tau)\,d\tau}, \qquad \forall\, t \in (0,T),$$

и поскольку $y(0) = \|u_2(0) - u_1(0)\|^2_{L_2(\Omega)} = 0$, заключаем, что $y(t) = 0$ при всех $t \in (0,T)$. $\square$

5.7 Существование давления

1. **Суммируемость конвективного члена в трехмерном случае**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — произвольная область (огр. или неогр.). Тогда для любой функции $u \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$ справедливы оценки

$$\|(u\cdot\nabla)u\|_{L_{\frac{5}{4}}(Q_T)} \;\le\; c\,\Big(\, \|u\|^2_{L_{2,\infty}(Q_T)} \;+\; \|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)} \Big)$$

Более того, для любых $s \in (1,\frac{3}{2})$, $l \in (1,2)$, таких что

$$\frac{3}{s} \;+\; \frac{2}{l} \;=\; 4,$$

$$\|(u\cdot\nabla)u\|_{L_{s,l}(Q_T)} \;\le\; c\,\Big(\, \|u\|^2_{L_{2,\infty}(Q_T)} \;+\; \|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)} \Big)$$

Доказательство.

1. Пусть $s = l = \frac{5}{4}$. Тогда $L_{2,\infty}(Q_T) \cap W^{1,0}_2(Q_T) \hookrightarrow L_{\frac{10}{3}}(Q_T)$ и по неравенству Гельдера

$$\|(u\cdot\nabla)u\|_{L_{\frac{5}{4}}(Q_T)} \;\le\; \|u\|_{L_{\frac{10}{3}}(Q_T)} \|\nabla u\|_{L_2(Q_T)} \;\le\; c\,\|u\|^{\frac{2}{5}}_{L_{2,\infty}(Q_T)} \|\nabla u\|^{\frac{8}{5}}_{L_2(Q_T)}$$

2. Произвольные $\frac{3}{s} + \frac{2}{l} = 4$ — аналогично самостоятельно.

□

2. **Существование вторых производных из $L_{\frac{5}{4}}(Q_{\delta,T})$ и давления из $L_{\frac{5}{3}}(Q_{\delta,T})$**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$. Пусть u — решение Лере–Хопфа уравнений (NS). Тогда для любых s, $l \in (1,+\infty)$, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{3}{s} \;+\; \frac{2}{l} \;=\; 4,$$

имеет место включение

$$\forall\ \delta \in (0,T) \qquad u \in W^{2,1}_{s,l}(Q_{\delta,T}), \qquad Q_{\delta,T} := \Omega \times (\delta, T) \tag{$*$}$$

и существует единственная функция $p : Q_T \to \mathbb{R}$, $[p(t)]_\Omega = 0$ п.в. $t \in (0,T)$, такая что для любых s, $l \in (1,+\infty)$, удовлетворяющих $(*)$, имеет место включение

$$\forall\ \delta \in (0,T) \qquad p \in W^{1,0}_{s,l}(Q_{\delta,T})$$

и при этом функции u и p удовлетворяют системе Навье–Стокса п.в. в Q_T.

Доказательство.

1. Функция u удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_{Q_T} (-u \cdot \partial_t \tilde{\eta} + \nabla u : \nabla \tilde{\eta})\, dxdt \;=\; -\int\limits_{Q_T} (u\cdot\nabla)u \cdot \tilde{\eta}\, dxdt, \qquad \forall\ \tilde{\eta} \in J_0^\infty(Q_T).$$

2. Пусть $\chi \in C_0^\infty((0,T])$, $\chi(t) = 1$ при $t \in [\delta, T]$, и пусть

$$\eta \in W_2^{2,1}(Q_T) \quad \text{такова, что} \quad \operatorname{div} \eta = 0 \quad \text{п.в. в} \quad Q_T, \quad \eta|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \quad \eta|_{t=T} = 0$$

Положим $\tilde{\eta} := \chi\eta$. Заметим, что при $n = 3$ справедливо параболическое вложение

$$W_2^{2,1}(Q_T) \hookrightarrow W_2^{1,1}(Q_T) \cap L_5(Q_T)$$

Следовательно, функция $\tilde{\eta} \in W_2^{1,1}(Q_T) \cap L_5(Q_T)$, $\operatorname{div} \tilde{\eta} = 0$ п.в. в Q_T, $\tilde{\eta}|_{\partial Q_T} = 0$ может быть аппроксимирована в $W_2^{1,1}(Q_T) \cap L_5(Q_T)$ функциями $\tilde{\eta}_m \in J_0^\infty(Q_T)$. Поэтому тождество

$$\int\limits_{Q_T} (-u \cdot \partial_t \tilde{\eta} + \nabla u : \nabla \tilde{\eta})\, dxdt \;=\; -\int\limits_{Q_T} (u\cdot\nabla)u \cdot \tilde{\eta}\, dxdt$$

выполняется для любой функции вида $\tilde{\eta} = \chi\eta$, где

$$\eta \in W_2^{2,1}(Q_T): \quad \operatorname{div} \eta = 0 \ \text{ п.в. в } \ Q_T, \quad \eta|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \quad \eta|_{t=T} = 0$$

3. Обозначим

$$v(x,t) := \chi(t) u(x,t), \qquad f := \chi (u\cdot\nabla)u + \chi' u$$

Тогда

$$f \in L_{\frac{5}{4}}(Q_T)$$

и v удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_{Q_T} (-v \cdot \partial_t \eta + \nabla v : \nabla \eta)\, dxdt \;=\; \int\limits_{Q_T} f \cdot \eta\, dxdt,$$

$$\forall\ \eta \in W_2^{2,1}(Q_T): \quad \operatorname{div} \eta = 0 \ \text{ п.в. в } \ Q_T, \quad \eta|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \quad \eta|_{t=T} = 0$$

Интегрированием по частям получаем

$$\int\limits_{Q_T} v \cdot (\partial_t \eta + \Delta\eta)\, dxdt \;=\; \int\limits_{Q_T} f \cdot \eta\, dxdt,$$

$$\forall\ \eta \in W_2^{2,1}(Q_T): \quad \operatorname{div} \eta = 0 \ \text{ п.в. в } \ Q_T, \quad \eta|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \quad \eta|_{t=T} = 0$$

то есть, другими словами, v является *very weak solution* задачи Стокса с правой частью $f \in L_{\frac{5}{4}}(Q_T)$ и нулевым начальным данным.

4. По теореме В.А. Солонникова, для $f \in L_{\frac{5}{4}}(Q_T)$ существует единственное решение

$$\bar{v} \in W^{2,1}_{\frac{5}{4}}(Q_T), \qquad \bar{p} \in W^{1,0}_{\frac{5}{4}}(Q_T), \qquad [p(t)]_\Omega = 0 \quad \text{п.в.} \quad t \in (0,T)$$

задачи Стокса

$$\begin{cases} \partial_t \bar{v} - \Delta \bar{v} + \nabla \bar{p} \ = \ -f \\ \operatorname{div} \bar{v} \ = \ 0 \\ \bar{v}|_{\partial\Omega\times(0,T)} \ = \ 0 \\ \bar{v}|_{t=0} \ = \ 0 \end{cases} \qquad \text{п.в. в} \quad Q_T$$

5. Заметим, что в случае $n=3$ благодаря параболическим вложениям

$$\begin{cases} W^{2,1}_{\frac{5}{4}}(Q_T) \hookrightarrow W^{1,0}_{\frac{5}{3}}(Q_T), \qquad W^{2,1}_{\frac{5}{4}}(Q_T) \hookrightarrow L_5(Q_T) \\ W^{2,1}_{2}(Q_T) \hookrightarrow W^{1,0}_{\frac{10}{3}}(Q_T), \qquad W^{2,1}_{2}(Q_T) \hookrightarrow L_{10}(Q_T) \end{cases}$$

мы можем заключить, что для функций

$$\begin{cases} \bar{v} \in W^{2,1}_{\frac{5}{4}}(Q_T): \quad \operatorname{div} \bar{v} = 0 \ \text{ п.в. в } \ Q_T, \quad \bar{v}|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \quad \bar{v}|_{t=0} = 0 \\ \eta \in W^{2,1}_{2}(Q_T): \quad \operatorname{div} \eta = 0 \ \text{ п.в. в } \ Q_T, \quad \eta|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \quad \eta|_{t=T} = 0 \end{cases}$$

и $\bar{p} \in W^{1,0}_{\frac{5}{4}}(Q_T)$ справедливы формулы интегрирования по частям

$$\int\limits_{Q_T} \partial_t \bar{v} \cdot \eta \, dxdt \ = \ -\int\limits_{Q_T} \bar{v} \cdot \partial_t \eta \, dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_T} \Delta \bar{v} \cdot \eta \, dxdt \ = \ -\int\limits_{Q_T} \nabla \bar{v} \cdot \nabla \eta \, dxdt \ = \ \int\limits_{Q_T} \bar{v} \cdot \Delta \eta \, dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_T} \nabla \bar{q} \cdot \eta \, dxdt \ = \ 0$$

Поэтому функция $\bar{v}$ удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_{Q_T} \bar{v} \cdot (\partial_t \eta + \Delta \eta) \, dxdt \ = \ \int\limits_{Q_T} f \cdot \eta \, dxdt,$$

$$\forall \ \eta \in W^{2,1}_{2}(Q_T): \quad \operatorname{div} \eta = 0 \ \text{ п.в. в } \ Q_T, \quad \eta|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \quad \eta|_{t=T} = 0$$

то есть, другими словами, $\bar{v}$ также является *very weak solution* задачи Стокса с правой частью $f \in L_{\frac{5}{4}}(Q_T)$ и нулевым начальным данным.

6. Функция $w := v - \bar{v} \in L_2(Q_T)$ удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_{Q_T} w \cdot (\partial_t \eta + \Delta \eta) \, dxdt \ = \ 0,$$

$$\forall \ \eta \in W^{2,1}_{2}(Q_T): \quad \operatorname{div} \eta = 0 \ \text{ п.в. в } \ Q_T, \quad \eta|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \quad \eta|_{t=T} = 0$$

и по теореме единственности О.А. Ладыженской в классе very weak solutions мы заключаем, что $w \equiv 0$ п.в. в Q_T, т.е.

$$v = \bar v \quad \text{в} \quad Q_T$$

7. Вспоминая, что $v \equiv u$ на $Q_{\delta,T}$, и $\bar v \in W^{2,1}_{\frac54}(Q_T)$, мы заключаем, что

$$u \in W^{2,1}_{\frac54}(Q_{\delta,T}), \qquad \exists \text{ ассоциированное давление } p = \bar p \in W^{1,0}_{\frac54}(Q_{\delta,T})$$

□

3. **Комментарии**

1) По параболической теореме вложения при $n = 3$ вытекает

$$u \in W^{2,1}_{\frac54}(Q_{\delta,T}) \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla u \in L_{\frac53}(Q_{\delta,T}),$$

но не $\nabla u \in L_2(Q_{\delta,T})$. Так что в случае $n = 3$ из коэрцитивной оценки для старших производных не удается восстановить даже той информации о гладкости решения, которая у нас была изначально из энергетической оценки. Поэтому коэрцитивную оценку для решений Лере-Хопфа нужно воспринимать как очень слабенькую.

2) Из полученного нам включения $p \in W^{1,0}_{\frac54}(Q_{\delta,T})$ и вложения

$$W^{1,0}_{\frac54}(Q_{\delta,T}) \hookrightarrow L_{\frac{15}{7},\frac54}(Q_{\delta,T})$$

вытекает принадлежность p анизотропному пространству $p \in L_{\frac{15}{7},\frac54}(Q_{\delta,T})$.

3) Однако если на шаге **3** вместо $f \in L_{\frac54}(Q_T)$ мы заметим, что f принадлежит анизотропному пространству

$$f \in L_{\frac{15}{14},\frac53}(Q_T), \qquad \frac{3}{\frac{15}{14}} + \frac{2}{\frac53} = 4,$$

и далее на шаге **4** воспользуемся коэрцитивной оценкой в анизотропных пространствах Соболева, то мы получим

$$\bar v \in W^{2,1}_{\frac{15}{14},\frac53}(Q_T), \qquad \bar p \in W^{1,0}_{\frac{15}{14},\frac53}(Q_T)$$

откуда мы получим $p \in W^{1,0}_{\frac{15}{14},\frac53}(Q_{\delta,T})$. И по параболическому вложению

$$W^{1,0}_{\frac{15}{14},\frac53}(Q_{\delta,T}) = L_{\frac53}(\delta,T;W^1_{\frac{15}{14}}(\Omega)) \;\hookrightarrow\; L_{\frac53}(\delta,T;L_{\frac53}(\Omega)) = L_{\frac53}(Q_{\delta,T})$$

мы получим

$$p \in L_{\frac53}(Q_{\delta,T}).$$