6 Проблема глобальной однозначной разрешимости

6.1 Сильные решения

1. **Сильные решения**

Определение. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$. Функции u и p наз. *сильным решением* ур–ий (NS), если

$$u \in W^{2,1}_2(Q_T), \qquad p \in W^{1,0}_2(Q_T),$$

и u и p удовлетворяют уравнениям (NS) п.в. в Q_T, а начальному и краевому условию — в смысле теории следов.

Замечание.

1) если u и p — сильное решение уравнений (NS), то u является решением Лере–Хопфа
2) если u и p — сильное решение уравнений (NS), то $\nabla u \in C([0,T]; L_2(\Omega))$

2. **Теорема единственности для сильных решений**

Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ и пусть u_1 и u_2 — два решения Лере–Хопфа уравнений (NS), соответствующих начальному данному a. Тогда если

$$\nabla u_1 \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega)) \qquad \text{и} \qquad \nabla u_2 \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega)),$$

то $u_1 \equiv u_2$ в Q_T.

Доказательство.

1. Покажем, что для всякого решения Лере-Хопфа, такого что $\nabla u \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$, справедливо включение

$$\partial_t u \in L_2(0,T; \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)).$$

Действительно из вложения $W^1_2(\Omega) \hookrightarrow L_6(\Omega)$ имеем $u \in L_\infty(0,T; L_6(\Omega))$, откуда $u \otimes u \in L_\infty(0,T; L_3(\Omega))$ и, тем более, $u \otimes u \in L_2(Q_T)$. Следовательно, для u соотношение

$$\langle \partial_t u(t), w\rangle + (\nabla u(t), \nabla w) - (u(t) \otimes u(t), \nabla w) \;=\; 0 \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T)$$

выполняется для любой функции $w \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$.

2. Обозначим $v := u_2 - u_1$. Поскольку $v(t) \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ для п.в. $t \in (0,T)$, в уравнении

$$\langle \partial_t v(t), w\rangle + (\nabla v(t), \nabla w) \;=\; (u_2(t) \otimes u_2(t) - u_1(t) \otimes u_1(t), \nabla w) \;=\; 0 \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T)$$

мы можем взять $w = v(t)$. Аналогично двумерному случаю, при помощи неравенства

$$\|v(t)\|_{L_4(\Omega)} \;\le\; c\, \|v(t)\|^{\frac14}_{L_2(\Omega)} \|\nabla v(t)\|^{\frac34}_{L_2(\Omega)}$$

получаем

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ \le\ c\,\|u_1(t)\|_{L_4(\Omega)}\|v(t)\|^{\frac14}_{L_2(\Omega)}\|\nabla v(t)\|^{\frac74}_{L_2(\Omega)}$$

откуда по неравенству Юнга

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|v(t)|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\,\|\nabla v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ \le\ c\,\|u_1(t)\|^8_{L_4(\Omega)}\|v(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Следовательно, $y(t) := \|v(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$ удовлетворяет оценке

$$y'(t)\ \le\ c\,b(t)\,y(t), \qquad \text{где} \qquad b(t) := \|u_1(t)\|^8_{L_4(\Omega)}.$$

Но из вложении $W^1_2(\Omega) \hookrightarrow L_4(\Omega)$ $(n=3)$ вытекает

$$u_1 \in L_\infty(0,T; W^1_2(\Omega)) \quad\Longrightarrow\quad u_1 \in L_\infty(0,T; L_4(\Omega)) \quad\Longrightarrow\quad b \in L_\infty(0,T)$$

По лемме Гронуолла получаем

$$y(t)\ \le\ y(0)\,e^{c\int_0^t b(\tau)\,d\tau}, \qquad \forall\ t\in(0,T),$$

и поскольку $y(0) = \|u_2(0) - u_1(0)\|^2_{L_2(\Omega)} = 0$, заключаем, что $y(t) = 0$ при всех $t \in (0,T)$. $\square$

3. Оценка решений регуляризованной задачи

Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $u^\varepsilon \in W^{2,1}_2(Q_T)$ и $p^\varepsilon \in W^{1,0}_2(Q_T)$ сильное решение регуляризованной задачи

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t u^\varepsilon \ -\ \Delta u^\varepsilon \ +\ (T_\varepsilon u^\varepsilon\cdot\nabla)u^\varepsilon \ +\ \nabla p^\varepsilon \ =\ 0 \\ \operatorname{div} u^\varepsilon \ =\ 0 \\ u^\varepsilon|_{t=0}\ =\ a, \qquad u^\varepsilon|_{\partial\Omega\times(0,T)}\ =\ 0 \end{array}\right. \qquad \text{в} \qquad Q_T$$

Тогда для п.в. $t\in(0,T)$ выполняется неравенство

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla^2 u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ \le\ c_\Omega\,\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^4_{L_2(\Omega)}\Big(1 + \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)$$

Доказательство.

1. Умножим уравнение на $\tilde\Delta u^\varepsilon = P_J\Delta u^\varepsilon$ и проинтегрируем результат по Ω. С учетом

$$(\partial_t u^\varepsilon, \tilde\Delta u^\varepsilon)\ =\ (\partial_t u^\varepsilon, \Delta u^\varepsilon)\ =\ -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)}$$

получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\,\|\tilde\Delta u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\ \le\ c\int\limits_\Omega |T_\varepsilon u^\varepsilon(t)|^2|\nabla u^\varepsilon(t)|^2\,dx$$

2. По неравенству Каттабрига–Солонникова

$$\|\nabla^2 w\|_{L_2(\Omega)} \le \ c_\Omega \, \|\tilde{\Delta} w\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall \ w \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega) \cap W^2_2(\Omega)$$

мы получаем

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla^2 u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ \le \ c_\Omega \int\limits_\Omega |T_\varepsilon u^\varepsilon(t)|^2 |\nabla u^\varepsilon(t)|^2 \, dx$$

3. Пользуясь свойством оператора усреднenея $\|T_\varepsilon u^\varepsilon(t)\|_{L_6(\Omega)} \le \|u^\varepsilon(t)\|_{L_6(\Omega)}$, оцениваем

$$\int\limits_\Omega |T_\varepsilon u^\varepsilon(t)|^2 |\nabla u^\varepsilon(t)|^2 \, dx \ \le \ \|T_\varepsilon u^\varepsilon(t)\|^2_{L_6(\Omega)} \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_3(\Omega)} \ \le \ \|u^\varepsilon(t)\|^2_{L_6(\Omega)} \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_3(\Omega)}$$

По теореме вложения $W^1_2(\Omega) \hookrightarrow L_6(\Omega)$ $(n=3)$ получаем

$$\|u^\varepsilon(t)\|^2_{L_6(\Omega)} \ \le \ c \, \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Используя мультипликативное неравенство, получаем

$$\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_3(\Omega)} \ \le \ c_\Omega \, \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{W^1_2(\Omega)}$$

то есть

$$\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_3(\Omega)} \ \le \ c_\Omega \, \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{L_2(\Omega)} \Big(\|\nabla^2 u^\varepsilon(t)\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{L_2(\Omega)} \Big)$$

Следовательно,

$$\int\limits_\Omega |T_\varepsilon u^\varepsilon(t)|^2 |\nabla u^\varepsilon(t)|^2 \, dx \ \le \ c_\Omega \, \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^3_{L_2(\Omega)} \Big(\|\nabla^2 u^\varepsilon(t)\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{L_2(\Omega)} \Big)$$

Теперь при помощи неравенства $ab \le \varepsilon a^2 + c_\varepsilon b^2$ мы приходим к оценке

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla^2 u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ \le \ c_\Omega \, \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^4_{L_2(\Omega)} \Big(1 + \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \Big)$$

4. **Глобальное существование сильных решений при малых начальных данных**

Теорема. Существует постоянная $c_\Omega > 0$, такая что для любого $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$, такого что

$$\operatorname{arctg} \|\nabla a\|^2_{L_2(\Omega)} \ + \ c_\Omega \ \|a\|^2_{L_2(\Omega)} \ < \ \frac{\pi}{2},$$

и для любого $T > 0$ существует сильное решение u и p уравнений (NS) в Q_T.

Доказательство.

1. Обозначим $y_\varepsilon(t) := \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$. Тогда из предыдущего пункта вытекает оценка

$$y'_\varepsilon(t) \ \le \ c_\Omega \, y^2_\varepsilon(t) \left(1 + y_\varepsilon(t)\right)$$

С учетом неравенств $y_\varepsilon(1+y_\varepsilon) \le y_\varepsilon(2+y_\varepsilon) \le 1+2y_\varepsilon^2 \le 2(1+y_\varepsilon^2)$ мы получаем

$$y_\varepsilon'(t) \;\le\; 2c_\Omega\, y_\varepsilon(t)\,\big(1+y_\varepsilon^2(t)\big)$$

откуда

$$\frac{y_\varepsilon'(t)}{1+y_\varepsilon^2(t)} \;\le\; 2c_\Omega\, y_\varepsilon(t), \qquad \forall\; t\in(0,T)$$

Интегрируя эту оценку, для любого $t\in(0,T)$ получаем

$$\operatorname{arctg} y_\varepsilon(t) \;\le\; \operatorname{arctg} y_\varepsilon(0) \;+\; 2c_\Omega \int\limits_0^T y_\varepsilon(\tau)\,d\tau$$

2. Из энергетического тождества для u^ε получаем

$$\int\limits_0^T y_\varepsilon(\tau)\,d\tau \;=\; \int\limits_0^T \|\nabla u^\varepsilon(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}\,d\tau \;\le\; \tfrac{1}{2}\,\|a\|^2_{L_2(\Omega)}$$

что с учетом $y_\varepsilon(0)=\|\nabla a\|^2_{L_2(\Omega)}$ дает нам

$$\operatorname{arctg} y_\varepsilon(t) \;\le\; \|\nabla a\|^2_{L_2(\Omega)} \;+\; c_\Omega\,\|a\|^2_{L_2(\Omega)}$$

3. Обозначим

$$\gamma_a \;:=\; \|\nabla a\|^2_{L_2(\Omega)} \;+\; c_\Omega\,\|a\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Тогда по условию $\gamma_a < \frac{\pi}{2}$ и, следовательно,

$$\sup_{t\in(0,T)} y_\varepsilon(t) \;\le\; \operatorname{tg}\gamma_a \;<\; +\infty$$

Поэтому

$$\{u^\varepsilon\} \quad \text{ограничена в} \quad L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)).$$

4. Интегрируя по $t\in(0,T)$ соотношение

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla^2 u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;\le\; c_\Omega\,\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^4_{L_2(\Omega)}\Big(1+\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\Big),$$

получим

$$\|\nabla^2 u^\varepsilon\|^2_{L_2(Q_T)} \;\le\; \|\nabla a\|^2_{L_2(\Omega)} \;+\; c_\Omega\, T\,\|\nabla u^\varepsilon\|^4_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\Big(1+\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\Big)$$

что с учетом уже установленной оценки

$$\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \;\le\; \operatorname{tg}\gamma_a$$

и энергетического неравенсва для u^ε означает, что

$$\{u^\varepsilon\} \quad \text{ограничена в} \quad L_2(0,T;W_2^2(\Omega)).$$

5. Обозначим

$$f^\varepsilon \;:=\; -(T_\varepsilon u^\varepsilon\cdot\nabla)u^\varepsilon$$

Тогда

$$\|f^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;\le\; \int\limits_\Omega |T_\varepsilon u^\varepsilon(t)|^2|\nabla u^\varepsilon(t)|^2\,dx$$

и с учетом уже установленной оценки

$$\|f^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;\le\; c_\Omega\,\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^3_{L_2(\Omega)}\Big(\|\nabla^2 u^\varepsilon(t)\|_{L_2(\Omega)}+\|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{L_2(\Omega)}\Big)$$

Так как $\{u^\varepsilon\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;W^1_2(\Omega))\cap L_2(0,T;W^2_2(\Omega))$, получаем

$$\{f^\varepsilon\}\quad\text{ограничена в}\quad L_2(Q_T).$$

Но поскольку u^ε и p^ε являются сильным решением задачи Стокса

$$\left\{\begin{array}{ll}\partial_t u^\varepsilon \;-\; \Delta u^\varepsilon \;+\; \nabla p^\varepsilon \;=\; f^\varepsilon & \\ \operatorname{div} u^\varepsilon \;=\; 0 & \text{в}\qquad Q_T\\ u^\varepsilon|_{t=0} \;=\; a, \qquad u^\varepsilon|_{\partial\Omega\times(0,T)} \;=\; 0 & \end{array}\right.$$

справедлива оценка

$$\|u^\varepsilon\|_{W^{2,1}_2(Q_T)} \;+\; \|p^\varepsilon\|_{W^{1,0}_2(Q_T)} \;\le\; c\Big(\|a\|_{W^1_2(\Omega)}+\|f^\varepsilon\|_{L_2(Q_T)}\Big)$$

Следовательно,

$$\{u^\varepsilon\}\quad\text{ограничена в}\quad W^{2,1}_2(Q_T),\qquad \{p^\varepsilon\}\quad\text{ограничена в}\quad W^{1,0}_2(Q_T).$$

6. Выделяя подпоследовательности, такие что

$$u^\varepsilon\rightharpoonup u\quad\text{в}\quad W^{2,1}_2(Q_T),\qquad p^\varepsilon\rightharpoonup p\quad\text{в}\quad W^{2,1}_2(Q_T),$$

нетрудно показать, что u и p — сильное решение (NS) в Q_T. $\square$

5. Локальное по времени существование сильных решений и оценка Лере

Теорема. Пусть $a\in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$, $a\not\equiv 0$, и обозначим

$$T_0 \;:=\; \frac{c(\Omega)}{\|\nabla a\|^4_{L_2(\Omega)}}\qquad (\textit{время Лере}),$$

где $c(\Omega)>0$ — некоторая фиксированная постоянная. Тогда в области $Q_{T_0}=\Omega\times(0,T_0)$ существует сильное решение уравнений (NS).

Доказательство.

1. По неравенству Cattabriga-Solonnikov при п.в. $t \in (0,T)$ получаем

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{W_2^2(\Omega)} \;\le\; c_\Omega\, \|\tilde\Delta u^\varepsilon(t)\|_{L_2(\Omega)}, \qquad u^\varepsilon(t) \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega),$$

откуда

$$\lambda_1\, \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;\le\; \|\tilde\Delta u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

с некоторой положительной постоянной $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega) > 0$.

2. Обозначим $y_\varepsilon(t) := \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$. Из оценки решений регуляризованной задачи получаем

$$y_\varepsilon'(t) + \lambda_1 y_\varepsilon(t) \;\le\; c_\Omega\, y_\varepsilon^2(t)\,\big(1 + y_\varepsilon(t)\big)$$

С учетом неравенств $c_\Omega\, y_\varepsilon^2 \le \frac{\lambda_1}{2}\, y_\varepsilon + \tilde c_\Omega\, y_\varepsilon^3$ мы получаем

$$y_\varepsilon'(t) \;\le\; c_\Omega\, y_\varepsilon^3(t), \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T)$$

откуда

$$\frac{y_\varepsilon'(t)}{y_\varepsilon^3(t)} \;\le\; c_\Omega, \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{y_\varepsilon^2(0)} - \frac{1}{y_\varepsilon^2(t)} \;\le\; 2 c_\Omega\, t, \qquad \forall\; t \in (0,T),$$

то есть

$$y_\varepsilon^2(t)\,\big(1 - 2c_\Omega\, t\, y_\varepsilon^2(0)\big) \;\le\; y_\varepsilon^2(0)$$

3. Положим

$$T_0 \;:=\; \frac{1}{4c_\Omega\, y_\varepsilon^2(0)} \;=\; \frac{1}{4c_\Omega\, \|\nabla a\|^4_{L_2(\Omega)}}$$

Тогда

$$y_\varepsilon^2(t) \;\le\; 2\, y_\varepsilon^2(0), \qquad \forall\; t \in (0,T_0),$$

откуда

$$\{u^\varepsilon\} \quad \text{ограничена в} \;\; L_\infty(0,T_0; W_2^1(\Omega)).$$

4. Аналогично доказательтсву предыдущей теоремы, получаем

$$\{u^\varepsilon\} \quad \text{ограничена в} \;\; L_2(0,T_0; W_2^2(\Omega)),$$

и далее

$$\{u^\varepsilon\} \quad \text{ограничена в} \;\; W_2^{2,1}(Q_{T_0}), \qquad \{p^\varepsilon\} \quad \text{ограничена в} \;\; W_2^{1,0}(Q_{T_0}).$$

5. Выделяя подпоследовательности, такие что

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad W_2^{2,1}(Q_{T_0}), \qquad p^\varepsilon \rightharpoonup p \quad \text{в} \quad W_2^{2,1}(Q_{T_0}),$$

нетрудно показать, что u и p — сильное решение (NS) в Q_{T_0}. $\square$

6.2 “Weak-strong” теорема единственности

1. **“Слабая–сильная” теорема единственности**

   Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$. Пусть u и p — сильное решение уравнений (NS) в Q_T, а v — решение Лере–Хопфа уравнений (NS) в Q_T, соответствующее тому же начальному данному a. Тогда $u = v$ п.в. в Q_T.

2. **Ингредиенты доказательства**

   - формулы для разности квадратов:

$$\|u(t) - v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} - 2(u(t), v(t))_{L_2(\Omega)} \qquad (1)$$

$$2\|\nabla u - \nabla v\|^2_{L_2(Q_t)} = 2\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_t)} + 2\|\nabla v\|^2_{L_2(Q_t)} - 4(\nabla u, \nabla v)_{L_2(Q_t)} \qquad (2)$$

   - энергетические тождество для u и неравенство для v:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_t)} &= \|a\|^2_{L_2(\Omega)} \\ \|v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|\nabla v\|^2_{L_2(Q_t)} &\le \|a\|^2_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

   - обоснование возможности использования в качестве тестовых функций:
     – гладкой u в уравнении для негладкой v
     – негладкой v в уравнении для гладкой u

     и вытекающие из этого тождества для скалярных произведений

$$(u(t), v(t))_{L_2(\Omega)} + 2(\nabla u, \nabla v)_{L_2(Q_t)} = \|a\|^2_{L_2(\Omega)} + (u \otimes u, \nabla v)_{L_2(Q_t)} \qquad (3)$$

$$(v(t), u(t))_{L_2(\Omega)} + 2(\nabla v, \nabla u)_{L_2(Q_t)} = \|a\|^2_{L_2(\Omega)} + (v \otimes v, \nabla u)_{L_2(Q_t)} \qquad (4)$$

   - $(1) + (2) + (3) + (4) \quad \Longrightarrow$

$$\|u(t) - v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|\nabla u - \nabla v\|^2_{L_2(Q_t)} \le -(u \otimes u, \nabla v)_{L_2(Q_t)} - (v \otimes v, \nabla u)_{L_2(Q_t)}$$

   - свойство взаимной компенсации конвективных членов:

$$(u \otimes u, \nabla v)_{L_2(Q_t)} + (v \otimes v, \nabla u)_{L_2(Q_t)} = ((u - v) \otimes (u - v), \nabla u)_{L_2(Q_t)}$$

   - неравенство Гельдера и мультипликативное неравенство

$$|((u - v) \otimes (u - v), \nabla u)_{L_2(Q_t)}| \le \|\nabla u\|_{L_{2,\infty}(Q_t)} \int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\|^2_{L_4(\Omega)}\, d\tau \le$$

$$\le \|\nabla u\|_{L_{2,\infty}(Q_t)} \Big(\int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}\, d\tau \Big)^{1/4} \|\nabla u - \nabla v\|^{3/2}_{L_2(Q_t)}$$

- лемма Гронуолла

$$\|u(t)-v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ \le\ c\,\|\nabla u\|^4_{L_{2,\infty}(Q_T)} \int\limits_0^t \|u(\tau)-v(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}\,d\tau$$

3. **Начало доказательства**

Для u и v при любом $t\in(0,T)$ справедливы соотношения

$$\frac12 \int\limits_\Omega |u|^2\,dx \ +\ \int\limits_0^t\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dxd\tau \ =\ \frac12\int\limits_\Omega |a|^2\,dx$$

$$\frac12 \int\limits_\Omega |v|^2\,dx \ +\ \int\limits_0^t\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\,dxd\tau \ \le\ \frac12\int\limits_\Omega |a|^2\,dx$$

Кроме того, при п.в. $t\in(0,T)$ имеют место интегральные тождества

$$\langle \partial_t u(t), w\rangle \ +\ (\nabla u(t),\nabla w) \ =\ (u(t)\otimes u(t),\nabla w), \qquad \forall\ w\in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega), \tag{1}$$

$$\langle \partial_t v(t), w\rangle \ +\ (\nabla v(t),\nabla w) \ =\ (v(t)\otimes v(t),\nabla w), \qquad \forall\ w\in \overset{\circ}{J}{}^1_{\frac52}(\Omega). \tag{2}$$

Поскольку при п.в. $t\in(0,T)$ $\ v(t)\in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$, в тождестве (1) мы можем взять $w=v(t)$. С другой стороны, так как при $n=3$

$$W^{2,1}_2(Q_T)\hookrightarrow W^{1,0}_{\frac{10}{3}}(Q_T), \qquad \frac{10}{3}>\frac52,$$

для сильного решения при п.в. $t\in(0,T)$ мы имеем $u(t)\in \overset{\circ}{J}{}^1_{\frac52}(\Omega)$, и поэтому в (2) мы можем взять $w=u(t)$. В итоге мы получим тождества

$$\langle \partial_t u(t), v(t)\rangle \ +\ (\nabla u(t),\nabla v(t)) \ =\ (u(t)\otimes u(t),\nabla v(t)),$$

$$\langle \partial_t v(t), u(t)\rangle \ +\ (\nabla v(t),\nabla u(t)) \ =\ (v(t)\otimes v(t),\nabla u(t)).$$

Наша цель — показать, что функция $t\mapsto (u(t),v(t))$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$ и

$$\frac{d}{dt}(u(t),v(t)) \ =\ \langle \partial_t u(t), v(t)\rangle\ +\langle \partial_t v(t), u(t)\rangle\,, \qquad \textit{п.в.}\quad t\in I.$$

Это утверждение вытекает из следующей абстрактной теоремы при

$$H=\overset{\circ}{J}_2(\Omega), \qquad V=\overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega), \qquad V_1=\overset{\circ}{J}{}^1_{\frac52}(\Omega)$$

4. **Вспомогательная лемма**

Теорема. Пусть V, V_1 — рефлексивные сеперабельные банаховы пространства, H — гильбертово пространство, причем

$$V_1 \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} V \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} H \hookrightarrow V^* \hookrightarrow V_1^*$$

Предположим, что функции u и v таковы, что

$$u \in L_{\frac{5}{2}}(I;V_1): \qquad \exists\ \frac{du}{dt} \in L_2(I;V^*),$$

$$v \in L_2(I;V): \qquad \exists\ \frac{dv}{dt} \in L_{\frac{5}{3}}(I;V_1^*).$$

Тогда функция $t \mapsto (u(t),v(t))$ является абсолютно непрерывной на $\bar{I}$ и

$$\frac{d}{dt}(u(t),v(t)) \ = \ \left\langle \frac{du}{dt}(t), v(t) \right\rangle + \left\langle \frac{dv}{dt}(t), u(t) \right\rangle, \qquad \textit{п.в.} \quad t \in I.$$

5. **Продолжение доказательства**

Итак, складывая полученные тождества, получаем соотношение

$$\frac{d}{dt}(u(t),v(t)) \ + \ 2(\nabla u(t), \nabla v(t)) \ = \ (u(t)\otimes u(t), \nabla v(t)) \ + \ (v(t)\otimes v(t), \nabla u(t)).$$

Интегрируя данное тождетсво по t, получаем соотношение

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega} u(x,t)\cdot v(x,t)\ dx \ + \ 2\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} \nabla u : \nabla v\ dxd\tau \ = \ \int\limits_{\Omega} |a(x)|^2\ dx \ + \\ + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} (u\otimes u : \nabla v + v\otimes v : \nabla u)\ dxd\tau\end{gathered} \tag{3}$$

Складывая (1) и (2) и вычитая из этого (3), получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u(x,t)-v(x,t)|^2\ dx \ + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} |\nabla(u-v)|^2\ dxd\tau \ \le \ -\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} (u\otimes u : \nabla v + v\otimes v : \nabla u)\ dxd\tau$$

Пользуясь соотношением

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u\otimes u : \nabla v\ dxd\tau \ = \ -\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} v\otimes u : \nabla u\ dxd\tau$$

преобразуем

$$I \ := \ \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (u \otimes u : \nabla v + v \otimes v : \nabla u) \ dx d\tau \ = \ \int\limits_0^t \int\limits_\Omega v \otimes (v-u) : \nabla u \ dx d\tau$$

Далее, поскольку

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega u \otimes (v-u) : \nabla u \ dx d\tau \ = \ 0,$$

находим

$$I \ := \ \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (v-u) \otimes (v-u) : \nabla u \ dx d\tau$$

Следовательно,

$$|I| \ \leq \ \int\limits_0^t \|v-u\|^2_{L_4(\Omega)} \ \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \ d\tau \ \leq \ \|\nabla u\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \ \int\limits_0^t \|v-u\|^2_{L_4(\Omega)} \ d\tau$$

Пользуясь мультипликативным неравенством и неравентсвом Гельдера, находим

$$\int\limits_0^t \|v-u\|^2_{L_4(\Omega)} \ d\tau \ \leq \ \int\limits_0^t \|v-u\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(\Omega)} \ \|\nabla(v-u)\|^{\frac{3}{2}}_{L_2(\Omega)} \ d\tau \ \leq$$

$$\leq \ \Big(\int\limits_0^t \|v-u\|^2_{L_2(\Omega)} \ d\tau \Big)^{\frac{1}{4}} \ \Big(\int\limits_0^t \|\nabla(v-u)\|^2_{L_2(\Omega)} \ d\tau \Big)^{\frac{3}{4}}$$

Объединяя полученные оценки и пользуясь неравенством Юнга, находим

$$\frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u-v|^2 \ dx \ + \ \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega |\nabla(u-v)|^2 \ dx d\tau \ \leq \ C \ \|\nabla u\|^4_{L_{2,\infty}(Q_T)} \ \int\limits_0^t \|v-u\|^2_{L_2(\Omega)} \ d\tau,$$

откуда для функции

$$y(t) \ := \ \int\limits_\Omega |u(x,t)-v(x,t)|^2 \ dx$$

получаем неравенство

$$y(t) \ \leq \ C \ \|\nabla u\|^4_{L_{2,\infty}(Q_T)} \ \int\limits_0^t y(\tau) \ d\tau, \qquad \forall \ t \in (0,T).$$

Следовательно, $y(t) = 0$ для всех $t \in (0,T)$. Теорема доказана. $\square$

6.3 Blow up time

1. **Эквивалентная характеризация сильных решений**

Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ и u — решение Лере-Хопфа уравнений (NS) в Q_T, и пусть p — ассоциированное с ним давление. Тогда если

$$\nabla u \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$$

то u и p является сильным решением уравнений (NS) в Q_T.

Доказательство.

1. Обозначим $M := \|\nabla u\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}$. Можно выбрать $t_k \to +0$ так, что

$$\|\nabla u(t_k)\|_{L_2(\Omega)} \le M, \qquad u(t_k) \rightharpoonup a \ \text{ в } \ W^1_2(\Omega) \qquad \Longrightarrow \qquad \|\nabla a\|_{L_2(\Omega)} \le M$$

2. Положим

$$T_M \ := \ \frac{c(\Omega)}{M^4}$$

где $c(\Omega) > 0$ — постоянная из определения времени Лере для сильного решения.

$$m \in \mathbb{N}: \qquad m \ge \frac{T}{T_M}, \qquad m = m\left(T, \|\nabla a\|_{L_2(\Omega)}, \Omega\right)$$

3. Разобьем промежуток $[0,T]$ на маленькие промежутки $[t_j, t_{j+1}]$ каждый длины $\frac{1}{2}T_M$

$$t_0 := 0, \qquad t_j = t_{j-1} + \frac{1}{2}\,T_M = \frac{T_M}{2}\,j, \qquad j = 1, 2, \dots, 2m$$

4. Докажем, что для любого $j = 2, \dots, 2m$ имеют место включения

$$u \in W^{2,1}_2(Q_{t_j}), \qquad p \in W^{1,0}_2(Q_{t_j}), \qquad \text{где} \qquad Q_{t_j} := \Omega \times (0, t_j)$$

5. База при $j = 2$. Поскольку

$$t_2 = T_M \ \le \ \frac{c(\Omega)}{\|\nabla a\|^4_{L_2(\Omega)}} \ = \ T_0 \quad \text{— время Лере для начального данного } a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega),$$

в области $Q_{t_2} := \Omega \times (0, t_2)$ существует сильное решение $u_1 \in W^{2,1}_2(Q_{t_2})$ и $p_1 \in W^{1,0}_2(Q_{t_2})$ уравнений (NS), соответствующее начальному данному a. Но тогда по weak–strong теореме единственности $u = u_1$ и $p = p_1$ в Q_{t_2}. Следовательно,

$$u \in W^{2,1}_2(Q_{t_2}), \qquad p \in W^{2,1}_2(Q_{t_2})$$

и u и p являются сильным решением (NS) в Q_{t_2}.

6. Переход $j \to j+1$. Предположим, что

$$u \in W_2^{2,1}(Q_{t_j}), \qquad p \in W_2^{2,1}(Q_{t_j})$$

и u и p являются сильным решением (NS) в Q_{t_j}. В силу вложения $W_2^{2,1}(Q_{t_j}) \hookrightarrow C([0,t_j]; W_2^1(\Omega))$

$$u \in C([0,t_j]; \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)),$$

и поэтому

$$a_{j-1} := u(t_{j-1}) \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega), \qquad \|\nabla a_{j-1}\|_{L_2(\Omega)} \le M.$$

7. Поскольку

$$t_{j+1} - t_{j-1} = T_M \le \frac{c_\Omega}{\|\nabla a_{j-1}\|_{L_2(\Omega)}^4} \quad \text{— время Лере для начального данного } a_{j-1} \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega),$$

в области $Q_{t_{j-1},t_{j+1}} := \Omega \times (t_{j-1}, t_{j+1})$ существует сильное решение

$$u_j \in W_2^{2,1}(Q_{t_{j-1},t_{j+1}}), \qquad p_j \in W_2^{1,0}(Q_{t_{j-1},t_{j+1}})$$

уравнений (NS), соответствующее начальному данному a_{j-1}.

8. Теперь у нас есть

$$\left\{ \begin{array}{l} u \text{ и } p \qquad \text{— сильное решение в области } Q_{t_{j-1},t_j}, \ \text{соответствующее } u|_{t=t_{j-1}} = a_{j-1} \\ u \text{ и } p \text{ — решение Лере–Хопфа в области } Q_{t_{j-1},t_{j+1}}, \text{ соответствующее } u|_{t=t_{j-1}} = a_{j-1} \\ u_j \text{ и } p_j \qquad \text{— сильное решение в области } Q_{t_{j-1},t_{j+1}}, \text{ соответствующее } u|_{t=t_{j-1}} = a_{j-1} \end{array} \right.$$

и по weak–strong теореме единственности $u = u_j$, $p = p_j$ в $Q_{t_{j-1},t_{j+1}}$. Следовательно,

$$\left. \begin{array}{c} u \in W_2^{2,1}(Q_{t_{j-1},t_{j+1}}), \quad p \in W_2^{2,1}(Q_{t_{j-1},t_{j+1}}) \\ u \in W_2^{2,1}(Q_{t_j}), \quad p \in W_2^{2,1}(Q_{t_j}) \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad u \in W_2^{2,1}(Q_{t_{j+1}}), \quad p \in W_2^{2,1}(Q_{t_{j+1}})$$

и u и p являются сильным решением (NS) в $Q_{t_{j+1}}$.

2. Blow up time

Определение. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$. Определим $T_* \in (0, +\infty]$

$$T_* = \sup \Big\{ \, T > 0 \, \Big| \, \exists \ u \text{ и } p \text{ — сильное решение (NS) в } Q_T = \Omega \times (0,T) \, \Big\}$$

Число T_*, зависящее от a, мы будем называть *blow up time* для начального даннного a.

3. **Замечания**

   1) $T_* = +\infty$ означает, что для начального данного a уравнение (NS) имеет сильное решение на любом конечном промежутке веремени $(0, T)$.

   2) $T_* > 0$, поскольку $T_* \geq T_0 = \frac{c(\Omega)}{\|\nabla a\|^4_{L_2(\Omega)}}$ — время Лере для нач. данного $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$.

   3) если $\|a\|_{W^1_2(\Omega)} \ll 1$, то $T_* = +\infty$.

4. **Поведение нормы $\|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)}$ при приближении к blow up time**

Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$, и пусть T_* — это blow up time для a. Тогда если $T_* < +\infty$, то

$$\|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)} \;\geq\; \frac{c(\Omega)^{1/4}}{(T_* - t)^{1/4}} \qquad \forall\, t \in (0, T_*),$$

где $c(\Omega) > 0$ — это постоянная из определения времени Лере для сильного решения.

Доказательство. От противного, предположим, что существует $t_1 \in (0, T_*)$, такое что

$$\|\nabla u(t_1)\|^4_{L_2(\Omega)} \;<\; \frac{c(\Omega)}{T_* - t_1}$$

Обозначим

$$T_1 = \frac{c(\Omega)}{\|\nabla u(t_1)\|^4_{L_2(\Omega)}} \quad \text{— время Лере для начального данного } u(t_1) \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$$

Тогда в области $Q_{t_1, t_1+T_1} := \Omega \times (t_1, t_1 + T_1)$ существует сильное решение

$$u_1 \in W^{2,1}_2(Q_{t_1,t_1+T_1}), \qquad p_1 \in W^{1,0}_2(Q_{t_1,t_1+T_1})$$

уравнений (NS), соответствующее начальному данному

$$u_1|_{t=t_1} \;=\; u(t_1) \;\in\; \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$$

Но тогда по теореме единственности в классе сильных решений при $T' < T_*$ в области $Q_{t_1,T'} := \Omega \times (t_1, T')$ решения u и u_1 совпадают. Следовательно, сильное решение уравнений (NS) существует в области $Q_{t_1+T_1} = \Omega \times (0, t_1 + T_1)$. Но это противоречит определению blow up time T_*, поскольку мы предположили, что

$$T_* \;<\; t_1 + \frac{c(\Omega)}{\|\nabla u(t_1)\|^4_{L_2(\Omega)}} \;=\; t_1 + T_1$$

$\square$

6.4 Условие Ладыженской–Проди–Серрина

1. **Условие LPS**

Определение. Будем говорить, что функция $u : Q_T \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет *условию Ладыженской-Проди-Серрина*, если существуют s и l, такие что

$$u \in L_{s,l}(Q_T), \qquad \frac{3}{s} + \frac{2}{l} \;=\; 1, \quad s \in (3, +\infty], \quad l \in [2, +\infty). \tag{LPS}$$

2. **Импликация $\boldsymbol{u \in L_{s,l}(Q_T) \implies \nabla u \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega))}$**

Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ и пусть u удовлетворяет условию (LPS). Пусть функции u и p являются сильным решением уравнений (NS) в Q_T. Тогда справедлива оценка

$$\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;\le\; \|\nabla a\|^2_{L_2(\Omega)}\, e^{c\,\|u\|^l_{L_{s,l}(Q_T)}}, \qquad \forall\, t \in (0,T).$$

Доказательство.

1. Умножая уравнение Навье-Стокса на оператор Стокса $\tilde{\Delta} u = P_J \Delta u$ и интегрируя результат по Ω, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\tilde{\Delta} u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;\le\; c\int\limits_\Omega |u(x,t)|^2 |\nabla u(x,t)|^2\, dx \qquad \text{п.в. } t \in (0,T)$$

2. По неравенству Гельдера получаем

$$\int\limits_\Omega |u|^2 |\nabla u|^2\, dx \;\le\; \|u\|^2_{L_s(\Omega)} \|\nabla u\|^2_{L_{\frac{2s}{s-2}}(\Omega)}$$

Поскольку из $\frac{s-2}{2s} = \frac{1-\lambda}{2} + \frac{\lambda}{6}$ вытекает $\lambda = \frac{3}{s}$, получаем

$$\|\nabla u\|_{L_{\frac{2s}{s-2}}(\Omega)} \;\le\; c\,\|\nabla u\|^{1-\frac{3}{s}}_{L_{\frac{2s}{s-2}}(\Omega)} \|\nabla u\|^{\frac{3}{s}}_{W^1_2(\Omega)}$$

С учетом неравенства Cattabriga-Solonnikov получаем

$$\|\nabla u\|_{W^1_2(\Omega)} \;\le\; \|u\|_{W^2_2(\Omega)} \;\le\; c_\Omega\, \|\tilde{\Delta} u\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\; u \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega) \cap W^2_2(\Omega)$$

Объединяя оценки, получаем

$$\int\limits_\Omega |u|^2 |\nabla u|^2\, dx \;\le\; c(\Omega, s)\, \|u\|^2_{L_s(\Omega)} \|\nabla u\|^{2-\frac{6}{s}}_{L_2(\Omega)} \|\tilde{\Delta} u\|^{\frac{6}{s}}_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\; u \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega) \cap W^2_2(\Omega).$$

3. Мы получили

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\tilde\Delta u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\ \le\ c(\Omega,s)\,\|u(t)\|^2_{L_s(\Omega)}\|\nabla u(t)\|^{2-\frac{6}{s}}_{L_2(\Omega)}\|\tilde\Delta u(t)\|^{\frac{6}{s}}_{L_2(\Omega)}$$

Пользуясь неравенством Юнга $ab\le c_\varepsilon a^{\frac{s}{s-3}}+\varepsilon b^{\frac{s}{3}}$, получим

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\tilde\Delta u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\ \le\ c(\Omega,s)\,\|u(t)\|^{\frac{2s}{s-3}}_{L_s(\Omega)}\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)},\qquad \text{п.в.}\quad t\in(0,T).$$

С учетом $\frac{2s}{s-3}=l\ \Leftrightarrow\ 1=\frac{3}{s}+\frac{2}{l}$ получаем

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\tilde\Delta u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\ \le\ c(\Omega,s)\,\|u(t)\|^{l}_{L_s(\Omega)}\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)},\qquad \text{п.в.}\quad t\in(0,T).$$

4. Обозначим $y(t):=\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$. Тогда

$$y'(t)\ \le\ c(\Omega,s)\,\|u(t)\|^l_{L_s(\Omega)}\,y(t),\qquad \text{п.в.}\quad t\in(0,T),$$

и по лемме Гронуола получаем

$$y(t)\ \le\ y(0)\,e^{c\,\|u\|^l_{L_{s,l}(Q_T)}},\qquad \forall\ t\in(0,T)$$

с постоянной c, зависящей только от Ω и s. $\square$

3. Решения Лере-Хопфа, удовлетворяющие условию LPS, являются сильными

Теорема. Пусть $a\in\overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ и u — решение Лере–Хопфа уравнений (NS) в Q_T, а p — ассоциированное с ним давление. Предположим дополнительно, что для некоторых $s\in(3,+\infty]$, $l\in[2,+\infty)$ функция u удовлетворяет условию (LPS). Тогда

$$u\in W^{2,1}_2(Q_T),\qquad p\in W^{1,0}_2(Q_T),$$

и u и p являются сильным решением (NS) в Q_T.

Доказательство.

1. Обозначим через $T_*>0$ blow up time для начального данного a. Докажем, что если условие (LPS) выполняется в цилиндре Q_T, то $T_*>T$. От противного, пусть $T_*\le T$. Тогда, как мы знаем, выполняется оценка

$$\|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)}\ \ge\ \frac{c(\Omega)^{1/4}}{(T_*-t)^{1/4}}\qquad \forall\ t\in(0,T_*),$$

из чего вытекает, что

$$\|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)}\ \to\ +\infty\qquad \text{при}\quad t\to T_*-0.$$

2. С другой стороны, для любого $t < T_*$ решение u и p является сильным в $Q_t := \Omega \times (0,t)$, и поэтому

$$\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ \leq \ \|\nabla a\|^2_{L_2(\Omega)} \, e^{c\,\|u\|^l_{L_{s,l}(Q_T)}}, \qquad \forall\ t \in (0, T_*),$$

Но тогда

$$\limsup_{t\to T-0} \|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)} \ < \ +\infty,$$

что противоречит **1.** $\square$

4. **“Weak–LPS” теорема единственности**

Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$. Если в области Q_T существует решение Лере–Хопфа u уравнений (NS), удовлетворяющее условию Ладыженской–Проди–Серрина (LPS), то оно является единственным в классе всех решений Лере–Хопфа.

6.5 "NSE Millenium Problem"

1. **NSE Millennium Problem**

   Open problem. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей. Требуется

   - либо доказать, что для любых $a \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$ и $T > 0$ существует сильное решение u и p уравнений (NS) в $Q_T = \Omega \times (0, T)$;
   - либо предъявить $a \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$ и $T < +\infty$, такие что сильное решение u и p уравнений (NS) существует в $\bar{\Omega} \times (0, T')$ для любого $T' < T$ и при этом "разрушается" в момент времени $t = T$, т.е.

   $$\|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)} \ \to \ +\infty \qquad \text{при} \quad t \to T - 0$$

2. **Замечания**

   1) Чтобы избежать влияния граничных эффектов на возможное возникновение особенностей у решения, в официальном описании проблемы на сайте института Клэя область Ω предполагается равной либо $\mathbb{R}^3$ (некомпактная область), либо трехмерному тору $\mathbb{T}^3 := \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ (компактная область с периодическими краевыми условиями).
   2) Также в официальном описании проблемы на сайте института Клэя решения предполагаются гладкими ($u \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ и $p \in C^\infty(\bar{Q}_T)$), но можно показать, что при условиях $a \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и $\partial\Omega \subset C^\infty$ сильные решения автоматически обладают этими свойствами.
   3) В терминах blow up time T_* проблему можно сформулировать более лаконично:

   $$\text{либо доказать, что для любого } a \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) \text{ справедливо } T_* = +\infty$$
   $$\text{либо построить } a \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega), \text{ такое что } T_* < +\infty$$

3. **Конечный "зазор" между классами существования и единственности**

   Пусть $a \in J_0^\infty(\Omega)$. При таком a нам известно глобальное (т.е. в Q_T при любом сколь угодно большом T) существование (одного или нескольких) слабых решений Лере–Хопфа уравнений (NS). В силу теоремы вложения все эти решения удовлетворяют условию

   $$u \in L_{s',l'}(Q_T), \qquad \frac{3}{s'} + \frac{2}{l'} \ \geq \ \frac{3}{2}, \qquad s' \in [2, 6], \quad l' \in [2, +\infty].$$

   С другой стороны, для того, чтобы получить единственность, нам необходимо доказать существование хотя бы одного решения в классе

   $$u \in L_{s,l}(Q_T), \qquad \frac{3}{s} + \frac{2}{l} \ \leq \ 1, \qquad s \in [3, +\infty], \qquad l \in [2, +\infty].$$

Как мы видим, между существованием и единственностью решений существует конечный промежуток в диапазоне показателей суммируемости. Например, если $s = l$, то

$$\text{имеем:} \quad u \in L_{\frac{10}{3}}(Q_T), \qquad \text{хотим:} \quad u \in L_5(Q_T).$$

Преодоление этого "конечного зазора" (доказательство регулярности слабых решений) — один из возможных способов решения "Шестой проблемы тысячелетия".