Вопросы к теорзачету по курсу
“Математическая физика”, семестр 1
Осень 2019, Т.Н. Шилкин

Список вопросов тестового характера (определения, формулировки). На эти вопросы нужно уметь отвечать с ходу.

1. Уравнение Лапласа и гармонические функции. Фундаментальное решение уравнения Лапласа, его свойства. Первое и второе тождества Грина. Потенциалы и их простейшие свойства. Тождество $-\Delta\mathcal{E} = \delta$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (записать его в “развернутом” виде).

2. Уравнение Пуассона для оператора Лапласа. Потенциал Ньютона, его свойства. Решение уравнения Пуассона в области. Поведение потенциала Ньютона на бесконечности.

3. Краевые задачи Дирихле и Неймана для оператора Лапласа. Классические решения задачи Дирихле. Функция Грина задачи Дирихле. Ядро Пуассона. Представление решения задачи Дирихле через функцию Грина. Свойства функции Грина.

4. Функция Грина для полупространства. Ядро Пуассона для полупространства, его свойства. Формула Пуассона в полупространстве. Непрерывность интеграла Пуассона вплоть до границы. Классическое решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве.

5. Свойство инверсии относительно сферы. Функция Грина для шара. Ядро Пуассона для шара, его свойства. Формула Пуассона в шаре. Непрерывность интеграла Пуассона вплоть до границы. Классическое решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.

6. Гармонические функции. Свойство среднего. Теорема о среднем для гармонических функций. Сильный и слабый принципы максимума для гармонических функций. Теорема сравнения. Теорема единственности для классических решений задачи Дирихле для оператора Лапласа.

7. Неравенство Харнака для гармонических функций. Обратная теорема о среднем и гладкость гармонических функций. Оценка производных гармонической функции. Теорема Лиувилля. Теорема об устранимой особенности.

8. Инвариантность оператора Лапласа относительно вращений. Представление оператора Лапласа в полярных и сферических координатах. Оператор Бельтрами–Лапласа на сфере, его свойства. Сферические функции.

9. Пространство однородных гармонических полиномов. Теоремы о сужении однородного гармонического полинома на сферу (прямая и обратная). Подпространства сферических гармоник, ортогональность сферических гармоник разного порядка.

10. Разложение пространства однородных гармонических полиномов. Размерность пространства однородных гармонических полиномов. Представление сужения однородного полинома на сферу в виде линейной комбинации сферических гармоник. Полнота сферических функций в $L_2(S)$.

11. Гармонические функции с переменными, разделяющимися в сферических координатах. Уравнения для радиальной и сферической компонент. Разделение переменных для оператора Бельтрами-Лапласа на сфере. Зависимость сферической функции от φ. Зависимость сферической функции от θ. Модифицированное уравнение Лежандра.

12. Задача Штурма–Лиувилля для уравнения Лежандра. Полиномы Лежандра. Ортогональность и полнота системы полиномов Лежандра. Присоединенные функции Лежандра. Задача Штурма–Лиувилля для модифицированного уравнения Лежандра. Ортогональность и полнота системы присоединенных функций Лежандра.

13. Сферические функции Y_{lm}, их явный вид и свойства. Ортогональный базис в $L_2(S)$. Спектр оператора Бельтрами–Лапласа.

14. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности, его свойства. Тождество $\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \Delta\Gamma = \delta$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ (записать его в “развернутом” виде).

15. Тепловой потенциал, его свойства. Классические решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Свойства решений задачи Коши: мгновенное сглаживание, бесконечная скорость распространения возмущений, принцип максимума для задачи Коши, сохранение энергии, стабилизация к нулю L_2–нормы.

16. Принцип Дюамеля для уравнения теплопроводности. Объемный тепловой потенциал, его свойства. Классическое решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности.

17. Слабый принцип максимума для классических решений уравнения теплопроводности.

18. Единственность классических решений уравнения теплопроводности в классе ограниченных функций.

19. Задача Коши для одномерного волнового уравнения. Формула Даламбера. Одномерное уравнение на полуоси с условием Дирихле. Принцип Дюамеля. Одномерное волновое уравнение с ненулевой правой частью.

20. Задача Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^n$. Сферические средние, их свойства. Сведение волнового уравнения к одномерному уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу для сферических средних. Специфика трехмерного случая. Формулы Кирхгофа.

21. Формулы для запаздывающих потенциалов, их вывод из формул Кирхгофа при помощи принципа Дюамеля.

22. Классические решения волнового уравнения. Энергетическое неравенство, теорема об области зависимости. Теорема единственности для классических решений задачи Коши для волнового уравнения.

23. Свойства решений волнового уравнения. Конечная скорость распространения возмущений, теоремы о переднем и заднем фронтах волнны. Обоснование этих свойств при помощи явных формул для решений задачи Коши.

Список доказательств, которые необходимо знать во всех деталях

1. Доказательство второго тождества Грина и тождества $-\Delta\mathcal{E} = \delta$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ для фундаментального решения уравнения Лапласа.

2. Теорема о вторых производных потенциала Ньютона: доказать, что если $f \in C^1(\bar{\Omega})$, то
$$\forall\ x \in \Omega \qquad \exists\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(x) = -\frac{1}{n}\delta_{jk} f(x) + \text{p.v.} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x_j \partial x_k}(x-y) f(y)\ dy$$

3. Формула Пуассона в шаре: доказать непрерывность интеграла Пуассона вплоть до границы.

4. Доказательство прямой и обратной теорем о среднем для гармонической функции.

5. Вывод оценки старших производных гармонической функции через ее L_1–норму и доказательство теоремы Лиувилля для гармонических функций.

6. Доказательство теоремы об устранимой особенности для гармонических функций.

7. Доказательство неположительности и симметричности оператора Бельтрами–Лапласа в $L_2(S)$. Доказательство ортогональности сферических функций, отвечающих различным собственным значениям.

8. Доказательство прямой и обратной теорем о том, что сужение однородного гармонического полинома на сферу является сферической функцией.

9. Доказательство разложения $\mathscr{P}_l = \mathscr{H}_l + |x|^2 \mathscr{P}_{l-l}$ для пространств однородных полиномов и доказательство полноты сферических функций в $L_2(S)$.

10. Вычисление преобразования Фурье от функции $f(\xi) := e^{-|\xi|^2 t}$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

11. Доказательство тождества $\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \Delta\Gamma = \delta$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ для фундаментального решения уравнения теплопроводности.

12. Доказательство того, что тепловой потенциал u, соответствующий начальному данному $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$, является классическим решением задачи Коши для уравнения теплопроводности (в частности, $u(x,t) \to a(x)$ при $t \to +0$).

13. Доказательство того, что объемный тепловой потенциал является классическим решением задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности.

14. Доказательство слабого принципа максимума для классических решений уравнения теплопроводности в ограниченной области и доказательство теоремы единственности для классических решений уравнения теплопроводности в классе ограниченных функций.

15. Вывод формулы Даламбера для одномерного волнового уравнения. Вывод формул для решения одномерного волнового уравнения на полуоси с условием Дирихле.

16. Доказательство свойств сферических средних и сведение трехмерного волнового уравнения к уравнению на полуоси для для сферичесих средних. Восстановление функции по ее сферическим средним и вывод формул Кирхгофа для решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$.

17. Доказательство того, что при надлежащей гладкости данных формулы Кирхгофа дают классическое решение задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$ (для простоты можно считать, что $\varphi \equiv 0$).

18. Вывод формулы для запаздывающих потенциалов.

19. Доказательство энергетического неравенства и теоремы об области зависимости для классических решений волнового уравнения.