Математическая физика
Практика, семестр 1, осень 2019

Тимофей Николаевич Шилкин (ПОМИ РАН)

6 декабря 2019 г.

Содержание

1 Занятие 1

1.1 Метод разделения переменных

1. **Некоторые уравнения математической физики**

   Уравнение Лапласа

   Уравнение теплопроводности

   Волновое уравнение

2. **Постановка краевых задач**

   Условия Дирихле

   Условия Неймана

   Условия Робена (3-я краевая задача)

   Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности

   Начально-краевая задача для волнового уравнения

3. **"Наивный" метод разделения переменных**

4. **Метод разделения переменных "по-взрослому"**

5. **Собственный базис задачи Штурма–Лиувилля**

6. **Различные краевые условия на отрезке**

7. **Примеры**

1.2 Разбор некоторых задач из HW-01

1. **Ортогональный базис из собственных функций задачи Штурма-Лиувилля**

   Найдите ортогональную и полную в $L_2(0,\pi)$ систему собсвенных функций задачи Штурма–Лиувилля с третьими краевыми условиями (т.н. *условиями Робена*):

   $$\begin{cases} -y''(x) = \lambda\, y(x), \quad x \in (0,\pi) \\ y'(0) - y(0) = 0, \quad y'(\pi) - y(\pi) = 0 \end{cases}$$

   Ответ:

   $\lambda_{-1} = -1, \quad y_{-1}(x) = e^x$

   $\lambda_0 = 0, \quad y_0(x) = 1$

   $\lambda_k = k^2, \quad y_k(x) = \cos kx + \frac{1}{k}\sin kx$

2. **Метод разделения переменных для уравнения Лапласа**

   $$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x,y) \in (0,\pi)\times(0,1) \\ u(0,y) = 0, \quad u(\pi,y) = 0 \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = f(x) \end{cases}$$

   (обсуждали на занятиях).

   Ответ:

   $$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx \,\mathrm{sh}\, ky,$$

   $$A_k = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\mathrm{sh}\, k}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\; dx$$

3. **Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности**

   $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (x,t) \in (0,\pi)\times(0,+\infty) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

   Ответ:

   $$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{-k^2 t}\, \cos kx$$

   $$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\; dx$$

4. **Ответ с конечным числом ненулевых слагаемых (что типично для контрольной)**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin t \sin 2x \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

Решение:

1. Ищем решение в виде ряда

$$u(x,t) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(t) X_k(x), \qquad f(x,y) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t) X_k(x)$$

по собственным функциям $\{X_k\}$ некоторой задачи Штурма–Лиувилля.

2. Решаем задачу Штурма–Лиувилля по переменной x:

$$\begin{cases} -X''(x) \;=\; \lambda\, X(x) \\ X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_k = k^2, \qquad X_k(x) = \sin kx$$

3. Раскладываем правую часть в ряд Фурье по ортогональной системе $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\|X_k\|^2_{L_2(0,\pi)} \;=\; \int_0^{\pi} \sin^2 kx \; dx \;=\; \frac{\pi}{2}$$

$$\sin t \sin 2x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t)\, \sin kx \qquad F_2(t) = \sin t, \quad k = 2, \quad F_k(t) = 0, \quad k \neq 2$$

4. Решаем ODE по переменной t:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(Y_k'(t) X_k(x) + \lambda_k Y_k(t) X_k(x) \Big) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t) X_k(x)$$

$$Y_k(t) \equiv 0 \quad k \neq 2$$

$$\begin{cases} Y_2'(t) + 4Y_2(t) \;=\; \sin t \\ Y_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$Y_2(t) \;=\; \operatorname{Im} \frac{e^{it}}{4+i} \;+\; A\, e^{-4t} \;=\; \frac{4\sin t - \cos t}{17} \;+\; Ae^{-4t}$$

$$Y_2(0) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{1}{17}$$

Ответ:

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{17} \left(4\sin t - \cos t + e^{-4t} \right) \, \sin 2x$$

5. **Уравнение Лапласа в полубесконечной области**

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x,y) \in (0,\pi) \times (0,+\infty) \\ u(0,y) = 0, \quad u(\pi,y) = 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u(x,+\infty) = 0 \end{cases}$$

Ответ:

$$u(x,y) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kx \; e^{-ky},$$

$$B_k \;=\; \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \; dx$$

6. **Что делать, если краевые условия не являются однородными?**

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi) \\ u|_{x=0} = \sin y, \quad u|_{x=\pi} = 0 \\ u|_{y=0} = \sin x, \quad u|_{y=\pi} = 0 \end{cases}$$

Решение: В этой задаче краевые условия по каждой переменной неоднородны, поэтому ни по одной переменной с ходу у нас нет задачи Штурма–Лиувилля, которая дала бы нам ортогональную систему собственных функций, по которой мы бы могли разложить решение. Но, поскольку уравнение линейно, мы можем найти его решение в виде суммы

$$u \;=\; v \;+\; w,$$

где v и w — решения двух краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=\pi} = 0 \\ v|_{y=0} = \sin x, \quad v|_{y=\pi} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \\ w|_{x=0} = \sin y, \quad w|_{x=\pi} = 0 \\ w|_{y=0} = 0, \quad w|_{y=\pi} = 0 \end{cases}$$

Функцию $v(x,y)$ ищем в виде ряда по собственным функциям $V_k(x)$ задачи Штурма–Лиувилля по переменной x

$$\begin{cases} -V''(x) = \lambda V(x) \\ V(0) = V(\pi) = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_k = k^2, \qquad V_k(x) = \sin kx$$

Получаем

$$v(x,y) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} C_k(y) \sin kx \qquad \Longrightarrow \qquad C_k''(y) - k^2 C_k(y) = 0, \quad y \in (0,\pi)$$

$$C_k(y) = A_k \operatorname{ch} ky + B_k \operatorname{sh} ky$$

$$v(x,0) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx \;=\; \sin x \qquad \Longrightarrow \qquad A_1 = 1, \quad A_k = 0, \quad k \neq 1$$

$$v(x,\pi) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \operatorname{ch} k\pi + B_k \operatorname{sh} k\pi)\sin kx \;=\; 0 \qquad\Longrightarrow\qquad B_k = -A_k\frac{\operatorname{ch} k\pi}{\operatorname{sh} k\pi}$$

$$B_k = 0, \quad k \neq 1, \qquad B_1 = -\frac{\operatorname{ch}\pi}{\operatorname{sh}\pi}$$

Следовательно,

$$v(x,y) \;=\; \Big(\operatorname{ch} y - \frac{\operatorname{ch}\pi}{\operatorname{sh}\pi}\operatorname{sh} y\Big)\sin x \;=\; \frac{\operatorname{sh}\pi\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y\operatorname{ch}\pi}{\operatorname{sh}\pi}\sin x \;=\; \frac{\operatorname{sh}(\pi - y)}{\operatorname{sh}\pi}\sin x$$

Решая аналогичную задачу для функции $w(x,y)$, находим

$$w(x,y) \;=\; \frac{\operatorname{sh}(\pi - x)}{\operatorname{sh}\pi}\sin y$$

Ответ: $\frac{\operatorname{sh}(\pi-x)}{\operatorname{sh}\pi}\sin y + \frac{\operatorname{sh}(\pi-y)}{\operatorname{sh}\pi}\sin x$

7. **Метод разделения переменных для волнового уравнения**

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (x,t) \in (0,\pi)\times(0,+\infty) \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Ответ:

$$u(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} B_k \;\sin kt\; \sin kx$$

$$B_k \;=\; \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{k}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\; dx$$

8. **Волновое уравнение с ненулевой правой частью**

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin\omega t \quad (x,t) \in (0,\pi)\times(0,+\infty) \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

Решение:

1. Ищем решение в виде ряда

$$u(x,t) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(t)X_k(x), \qquad f(x,y) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t)X_k(x)$$

по собственным функциям $\{X_k\}$ некоторой задачи Штурма–Лиувилля.

2. Решаем задачу Штурма–Лиувилля по переменной x:

$$\begin{cases} -X''(x) \;=\; \lambda\, X(x) \\ X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_k = k^2, \qquad X_k(x) = \sin kx$$

3. Раскладываем правую часть в ряд Фурье по ортогональной системе $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\|X_k\|^2_{L_2(0,\pi)} \;=\; \int\limits_0^\pi \sin^2 kx\; dx \;=\; \tfrac{\pi}{2}$$

$$\sin\omega t \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t)\,\sin kx \qquad F_k(t) = \tfrac{2}{k}\sin\omega t$$

4. Решаем ODE по переменной t:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(Y_k''(t)X_k(x) + \lambda_k Y_k(t)X_k(x)\Big) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t)X_k(x)$$

$$Y_k''(t) + k^2 Y_k(t) \;=\; \frac{2}{k}\;\sin\omega t$$

$$Y_k(t) \;=\; \frac{2}{k}\cdot\frac{1}{k^2-\omega^2}\sin\omega t \;+\; A_k\cos kt + B_k\sin kt$$

$$Y_k(0) = 0 \qquad\Longrightarrow\qquad A_k = 0$$

$$Y_k'(t) \;=\; \frac{2}{k}\cdot\frac{\omega}{k^2-\omega^2}\cos\omega t \;+\; B_k k\cos kt$$

$$Y_k'(0) = 0 \qquad\Longrightarrow\qquad B_k = -\frac{2}{k^2}\cdot\frac{\omega}{k^2-\omega^2}$$

Ответ:

$$u(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\cdot\frac{1}{k^2-\omega^2}\,\Big(\sin\omega t - \frac{\omega}{k}\sin kt\Big)\,\sin kx, \qquad \omega \neq k$$

2 Занятие 2

2.1 Решение уравнения Пуассона "из физических соображений"

1. **Потенциальные векторные поля**

   Примеры потенциальных полей: гравитационные и электростатические поля

2. **Физический смысл дивергенции векторного поля**

3. **Физический смысл уравнения Пуассона**

4. **Плотность распределения источников**

   Заряд, масса — мера на $\mathbb{R}^3$

5. **Уравнение Пуассона в классе обобщенных функций**

   Потенциал точечного источника

6. **Теорема Гаусса**

   Тогда поток электрического поля, создаваемого системой всех зарядов (как внутри, так и вне области Ω), через замкнутую поверхность $\partial\Omega$, пропорционален суммарному заряду, заключенному в Ω:

$$\int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{E}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}(x)\ dS_x \;=\; 4\pi\ q(\Omega)$$

7. **Решение уравнения Пуассона "из физических соображений"**

   Задача. Найти функцию $u \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющую соотношениям

$$\begin{cases} -\Delta u \;=\; 4\pi\left(q\delta_0 - \dfrac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\chi_{B_R}\right) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ u\big|_{|x|\to\infty} \;=\; 0 \end{cases}$$

   Здесь $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ — дельта-функция, сосредоточенная в точке 0, χ_{B_R} — характеристическая функция шара $B_R := \{\, x \in \mathbb{R}^3 :\ |x| < R \,\}$.

   Решение:

   1. "Переводим" задачу на "физический" язык: нам надо найти потенциал электростатического поля, создаваемого точечным зарядом q в начале координат и отрицательным зарядом, непрерывно распределенным с постоянной плотностью $\rho := \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ в шаре радиуса R.

   2. В силу линейности уравнения $u = u_1 - u_2$, где

$$\begin{cases} -\Delta u_1 \;=\; 4\pi q\delta_0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ u\big|_{|x|\to\infty} \;=\; 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta u_2 \;=\; 4\pi\rho\chi_{B_R} \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ u\big|_{|x|\to\infty} \;=\; 0 \end{cases}$$

3. Потенциал u_1 точечного источника мы знаем (хотя бы из школьного курса физики):

$$u_1(x) \;=\; \frac{q}{|x|}$$

4. Чтобы найти потенциал u_2, сначала прикинем, какими симметриями будет обладать наше поле. Во-первых, поскольку система зарядов вращательно симметрично (при вращении пространства переходит в тауе же систему зарядов), то таким же будет и создаваемое этими зарядами поле. Поэтому модуль напряженности поля зависит только от $|x|$. Во-вторых, система зарядов разбивается на "парочки" точечных зарядов, таких что суммарное поле, создаваемое каждой парочкой, направленно вдоль вектора $\mathbf{e}_r$ (а остальные компоненты поля каждой парочки взаимно компенсируются). Поэтому

$$\mathbf{E}(x) = E(r)\,\mathbf{e}_r, \qquad r = |x|, \qquad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla u_2(x)$$

5. Теперь мы можем найти $E(r)$ из теоремы Гаусса. Возьмем $\Omega := B_r$ и предположим сначала, что $r < R$. Тогда поскольку $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{e}_r$, получаем

$$\int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{E}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}(x)\;dS_x \;=\; \int\limits_{\partial B_r} E(r)\;dS_x \;=\; E(r)\;|\partial B_r| \;=\; 4\pi r^2 E(r)$$

С другой стороны,

$$q(\Omega) \;=\; \int\limits_{B_r} \rho\;dx \;=\; \rho|B_r| \;=\; \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\;|B_r| \;=\; q\;\frac{r^3}{R^3}$$

Таким образом,

$$4\pi r^2 E(r) \;=\; 4\pi q\;\frac{r^3}{R^3} \qquad \Longrightarrow \qquad E(r) \;=\; \frac{q}{R^3}\;r$$

При $r \geq R$ аналогично получаем

$$4\pi r^2 E(r) \;=\; 4\pi q \qquad \Longrightarrow \qquad E(r) \;=\; \frac{q}{r^2}$$

Итак,

$$E(r) \;=\; \begin{cases} \frac{q}{R^3}\;r, & r < R \\ \frac{q}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

Так как

$$\mathbf{E}(x) = -\nabla u_2(x), \qquad u_2(x) \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty,$$

нетрудно видеть, что $u_2(x) = u_2(r)$, где

$$u_2(r) \;=\; \begin{cases} C - \frac{q}{2R^3}\;r^2, & r < R \\ \frac{q}{r}, & r \geq R \end{cases}$$

6. Нам осталось определить значение постоянной C. Но из лекций мы знаем, что потенциал Ньютона с ограниченной плотностью (с компактным носителем) является непрерывной в $\mathbb{R}^3$ функцией. Следовательно, $C = \frac{3q}{2R}$.

Ответ:

$$u(x) \;=\; \begin{cases} \frac{q}{|x|} - \frac{3q}{2R} + \frac{q}{2R^3}\;|x|^2, & |x| \leq R \\ 0, & |x| > R \end{cases}$$

2.2 Разбор некоторых задач из HW-02

1. $-\Delta u \;=\; 4\pi\chi_{B_R}(x)\,|x|^2 \quad$ в $\quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

   Ответ: $\quad u(x) = \begin{cases} \pi\left(R^4 - \frac{|x|^4}{5}\right) & |x| < R \\ \frac{4}{5}\pi\frac{R^5}{|x|}, & |x| \geq R \end{cases}$

2. $-\Delta u \;=\; 4\pi\Big(2\delta_0 - \frac{1}{4\pi R^2}\delta_{S_R}\Big) \quad$ в $\quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

   Ответ: $\quad u(r) = \begin{cases} \frac{2}{|x|} - \frac{2}{R}, & |x| < R \\ \frac{1}{|x|}, & |x| \geq R \end{cases}$

3. $-\Delta u \;=\; 4\pi\,\left(\delta_0 - \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\chi_{B_R}\right) \quad$ в $\quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

4. $-\Delta u \;=\; -4\pi\,\frac{\partial\delta_0}{\partial x_3} \quad$ в $\quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

   Ответ: $\quad u(x) = \frac{x_3}{|x|^3}$

5. $-\Delta u \;=\; 4\pi\Big(\frac{1}{4\pi r^2}\delta_{S_r} - \frac{1}{4\pi R^2}\delta_{S_R}\Big) \quad$ в $\quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \qquad (0 < r < R)$

   Ответ: $\quad u(x) = \begin{cases} \frac{1}{r} - \frac{1}{R}, & |x| \leq r \\ \frac{1}{|x|} - \frac{1}{R}, & r < |x| < R \\ 0, & |x| \geq R \end{cases}$

6. $-\Delta u \;=\; 4\pi\chi_\Omega \quad$ в $\quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \quad \Omega := B_2 \setminus B_{\frac{1}{2}}(x_0), \quad x_0 := (1,0,0)^T$

7. Даны: точка x_0, кривая Γ, поверхности Σ_1 и Σ_2, область Ω. (Все объекты являются гладкими, компактными и непересекающимися). Функция $u \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^3)$ удовлетворяет следующему соотношению в смысле теории обобщенных функций

   $$-\Delta u \;=\; 4\pi\,(\delta_{x_0} + \delta_\Gamma + \delta_{\Sigma_1} + \frac{\partial}{\partial\nu}\delta_{\Sigma_2} + \chi_\Omega) \qquad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

   Укажите, какова гладкость функции u и опишите ее асимптотическое поведение вблизи x_0, Γ, Σ_1, Σ_2 и $\partial\Omega$. Здесь

   $$\left\langle \frac{\partial}{\partial\nu}\delta_{\Sigma_2}, \eta \right\rangle \;:=\; -\int\limits_{\Sigma_2} \frac{\partial\eta}{\partial\nu}\,dS, \qquad \forall\,\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$$

   ν — поле нормали к гладкой ориентированной поверхности Σ_2.

Источник	Гладкость	Особенность	Энергия	Плотность
Точечный заряд $(q, \mathbf{x}_0)$	$u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x}_0\})$	$u(x) \sim \frac{1}{\lvert x-x_0\rvert}$ $\mathbf{E}(x) \sim \frac{1}{\lvert x-x_0\rvert^2}$	$=\infty$	$q\delta_{x_0} \in D'(\mathbb{R}^3)$
Линейный контур Γ	$u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$	$u(x) \sim \ln \frac{1}{\mathrm{dist}(x,\Gamma)}$ $\mathbf{E}(x) \sim \frac{1}{\mathrm{dist}(x,\Gamma)}$	$=\infty$	$\lambda\delta_\Gamma \in D'(\mathbb{R}^3)$
Двойной слой на поверхности Σ	$u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma)$ $u \in L_\infty(\mathbb{R}^3)$	$(u_2 - u_1)\rvert_\Sigma = 4\pi\mu$ скачок на Σ	$<\infty$	$-\frac{\partial}{\partial\nu}(\mu\delta_\Sigma) \in D'(\mathbb{R}^3)$
Простой слой на поверхности Σ	$u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma)$ $u \in C(\mathbb{R}^3)$	u непр. на Σ $(\mathbf{E}_{2\nu} - \mathbf{E}_{1\nu})\rvert_\Sigma = 4\pi\sigma$ скачок на Σ	$<\infty$	$\sigma\delta_\Sigma \in W_2^{-1}(\mathbb{R}^3)$
Объемный заряд ρ	$u \in C^1(\mathbb{R}^3)$	нет особенностей	$<\infty$	$\rho\chi_{B_R} \in L_\infty(\mathbb{R}^3)$

3 Занятие 3

3.1 Фундаментальные решения и функции Грина

1. **Фундаментальные решения ODE**

   Теорема. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами:
   $$\mathcal{L}u(t) = u''(t) + bu'(t) + cu(t)$$
   Обозначим через $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ решение задачи Коши:
   $$\begin{cases} \mathcal{L}w(t) = 0 \qquad t \in \mathbb{R} \\ w(0) = 0, \quad w'(0) = 1 \end{cases}$$
   Тогда регулярная обобщенныя функция
   $$u(t) \ := \ \chi(t)w(t), \qquad \chi(t) := \chi_{(0,+\infty)}(t) \ \text{ — функция Хевисайда}$$
   является фундаментальным решением для оператора $\mathcal{L}$.

   Замечание. Данный "рецепт" построения фундаментальных решений ODE без изменений переносится на дифференциальные операторы любого порядка, а также на операторы с гладкими переменными коэффициентами.

2. **Вывод формул фундаментальных решений методом преобразования Фурье**

3. **Преобразования Фурье некоторых обобщенных функций**

4. **Метод электрических изображений**

3.2 Разбор некоторых задач из HW-03

1. **Фундаментальные решения ODE**

   Пусть $a > 0$. Найдите какое-либо фундаментальное решение для следующих дифференциальных операторов:

   (a) u'

   (b) $u' + au$

   (c) $u' - au$

   (d) u''

   (e) $u'' + a^2 u$

   (f) $u'' - a^2 u$

   (g) $\frac{d^4 u}{dx^4} - u$

   (h) $\frac{d^4 u}{dx^4} - 2\frac{d^2 u}{dx^2} + u$

2. **Преобразование Фурье некоторых обобщенных функций**

   Докажите формулы для обратных преобразований Фурье следующих регулярных распределений ($\xi \in \mathbb{R}^n$):

   (a) $F^{-1}\left[\frac{1}{|\xi|^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{|x|}, \quad n = 3$

   (b) $F^{-1}\left[e^{-\xi^2 t}\right] = \frac{1}{\sqrt{2t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad n = 1$

   (c) $F^{-1}\left[\frac{\sin a\xi}{\xi}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \chi_{(-a,a)}, \quad n = 1$

   (d) $F^{-1}\left[\frac{\sin a|\xi|}{|\xi|}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{1}{a}\, \delta_{S_a}, \quad n = 3$

3. **Фундаментальные решения некоторых PDE**

   Используя метод преобразования Фурье, найдите фундаментальные решения для следующих дифференциальных операторов ($x \in \mathbb{R}^n$):

   (a) $-\Delta u, \quad n = 3$

   (b) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad n = 1$

   (c) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad n = 1$

   (d) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u, \quad n = 3$

4. **Построение функции Грина задачи Дирихле. Метод электрических изображений**

   Найдите функцию Грина задачи Дирихле для следующих областей:

   (a) $\Omega := \{\ x \in \mathbb{R}^2 :\ x_2 > 0\ \}$

(b) $\Omega := \{\ x \in \mathbb{R}^3 :\ x_3 > 0\ \}$

(c) $\Omega := \{\ x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 > 0,\ x_2 > 0\ \}$

(d) $\Omega := \{\ x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 < 1\ \}$

(e) $\Omega := \{\ x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\ \}$

(f) $\Omega := \{\ x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > R^2\ \}$

(g) $\Omega := \{\ x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2,\ x_3 > 0\ \}$

5. **Решение краевых задач в неограниченных областях**

Найдите решение следующих задач.

(a) $$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x,y) \in (-\infty,+\infty) \times (0,+\infty) \\ u(-\infty, y) = 0, \quad u(+\infty, y) = 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u(x,+\infty) = 0 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x,y) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty) \\ u(0, y) = 0, \quad u(+\infty, y) = 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u(x,+\infty) = 0 \end{cases}$$

4 Занятие 4

4.1 Оператор Лапласа в цилиндрических и сферических координатах

1. **Криволинейные координаты**

   Путь в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ определена замена координат

   $$x = \Phi(y), \qquad y \in \omega$$

   Замена координат $\Phi : \omega \to \Omega$ нназывается невырожденной в точке $y \in \omega$, если

   $$\det \nabla\Phi(y) \neq 0.$$

2. **Ковариантный и контравариантный базисы криволинейной системы координат**

   Для замены координат $x = \Phi(y)$, невырожденной в точке y, мы можем определить *ковариантный* базис $\{\underline{\mathbf{e}}_j\}_{j=1}^n$ и *контравариантный* (дуальный) базис $\{\bar{\mathbf{e}}^k\}_{k=1}^n$ в точке y:

   $$\underline{\mathbf{e}}_j(y) := \frac{\partial\Phi}{\partial y_j}(y), \qquad \bar{\mathbf{e}}^k(y) \cdot \underline{\mathbf{e}}_j(y) = \delta_{kj}$$

3. **Ортогональные системы координат и физический базис**

   Система координат $x = \Phi(y)$ называется *ортогональной* в области ω, если

   $$\forall\ y \in \omega \qquad \underline{\mathbf{e}}_j(y) \cdot \underline{\mathbf{e}}_k(y) = 0, \qquad \forall\ j \neq k$$

   Для ортогональной системы координат $\underline{\mathbf{e}}_j(y) \parallel \bar{\mathbf{e}}^j(y)$ при любых $j = 1, \ldots, n$, $y \in \omega$, и поэтому можно определить ортонормированный *физический* базис $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ ортогональной системы координат:

   $$\mathbf{e}_j(y) = \frac{\underline{\mathbf{e}}_j(y)}{|\underline{\mathbf{e}}_j(y)|} = \frac{\bar{\mathbf{e}}^j(y)}{|\bar{\mathbf{e}}^j(y)|}$$

   Символы Кристофеля:

   $$\partial_k \mathbf{e}_j = \Gamma^s_{kj} \mathbf{e}_s$$

4. **Дифференциальные операции в криволинейных координатах**

   Пусть $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — гладкое векторное поле. Пусть $x = \Phi(y)$ — гладкая ортогональная система координат на $\mathbb{R}^n$ и

   $$\tilde{u}(y) = u(x)|_{x=\Phi(y)}, \qquad \tilde{w}(y) = w(x)|_{x=\Phi(y)}, \qquad \tilde{w}(y) = \tilde{w}^j(y)\mathbf{e}_j(y)$$

   Тогда

   $$\nabla u(x)|_{x=\Phi(y)} = \partial_j \tilde{u}(y) \bar{\mathbf{e}}^j(y), \qquad \partial_j \tilde{u} := \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}$$

   $$\nabla w(x)|_{x=\Phi(y)} = \partial_j \tilde{w}(y) \otimes \bar{\mathbf{e}}^j(y), \qquad \partial_j \tilde{w}(y) := \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}(\tilde{w}^k \mathbf{e}_k)$$

   $$\operatorname{div} w(x)|_{x=\Phi(y)} = \operatorname{tr} \nabla w(x)|_{x=\Phi(y)} = \partial_j \tilde{w}(y) \cdot \bar{\mathbf{e}}^j(y),$$

5. **Цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$**

Определение. Цилиндрическими координатами в $\mathbb{R}^3$ наз. система координат

$$(r, \varphi, z) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times (-\infty, +\infty),$$

заданная соотношениями

$$x = \Phi(y), \qquad y = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi \\ x_2 = r\sin\varphi \\ x_3 = z \end{cases}$$

Базисы:

$$\underline{\mathbf{e}}_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_r = \bar{\mathbf{e}}^r$$

$$\underline{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\partial\Phi}{\partial \varphi} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\,\underline{\mathbf{e}}_\varphi = r\,\bar{\mathbf{e}}^\varphi$$

$$\underline{\mathbf{e}}_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_z = \bar{\mathbf{e}}^z$$

Производные векторов физического базиса:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_{r,r} = 0 & \mathbf{e}_{r,\varphi} = \ \ \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_{r,z} = 0 \\ \mathbf{e}_{\varphi,r} = 0 & \mathbf{e}_{\varphi,\varphi} = -\mathbf{e}_r & \mathbf{e}_{\varphi,z} = 0 \\ \mathbf{e}_{z,r} = 0 & \mathbf{e}_{z,\varphi} = \ \ 0 & \mathbf{e}_{z,z} = 0 \end{array}$$

6. **Лапласиан в цилиндрических координатах**

Теорема. Если $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ и $u(x) = \tilde{u}(r, \varphi, z)$, то

$$\Delta u(x)\big|_{x=\Phi(r,\varphi,z)} \ = \ \tilde{u}_{,rr} + \frac{\tilde{u}_{,r}}{r} + \frac{\tilde{u}_{,\varphi\varphi}}{r^2} + \tilde{u}_{,zz}$$

или

$$\Delta u(x)\big|_{x=\Phi(r,\varphi,z)} \ = \ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial z^2}$$

7. **Сферические координаты в $\mathbb{R}^3$**

Определение. Сферическими координатами в $\mathbb{R}^3$ наз. система координат

$$(r, \varphi, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi],$$

заданная соотношениями

$$x = \Phi(y), \qquad y = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi\sin\theta \\ x_2 = r\sin\varphi\sin\theta \\ x_3 = r\cos\theta \end{cases}$$

Базисы:

$$\underset{\sim}{\mathbf{e}}_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \underset{\sim}{\mathbf{e}}_r = \bar{\mathbf{e}}^r$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r\sin\theta}\ \underset{\sim}{\mathbf{e}}_\varphi = r\sin\theta\ \bar{\mathbf{e}}^\varphi$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\,\underset{\sim}{\mathbf{e}}_\theta = r\,\bar{\mathbf{e}}^\theta$$

Производные векторов физического базиса:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_{r,r} = 0 & \mathbf{e}_{r,\varphi} = \ \sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi & & \mathbf{e}_{r,\theta} = \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_{\varphi,r} = 0 & \mathbf{e}_{\varphi,\varphi} = -\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin\theta\,\mathbf{e}_r - \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta & & \mathbf{e}_{\varphi,\theta} = 0 \\ \mathbf{e}_{\theta,r} = 0 & \mathbf{e}_{\theta,\varphi} = \ \cos\theta\,\mathbf{e}_\varphi & & \mathbf{e}_{\theta,\theta} = -\mathbf{e}_r \end{array}$$

8. **Лапласиан в сферических координатах**

Теорема. Если $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ и $u(x) = \tilde{u}(r, \varphi, \theta)$, то

$$\Delta u(x)\big|_{x=\Phi(r,\varphi,z)} \ = \ \tilde{u}_{,rr} + 2\,\frac{\tilde{u}_{,r}}{r} + \frac{\tilde{u}_{,\varphi\varphi}}{r^2\sin^2\theta} + \frac{\tilde{u}_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{u_{,\theta}}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

или

$$\Delta u(x)\big|_{x=\Phi(r,\varphi,z)} \ = \ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\varphi^2}\right]$$

9. **Оператор Бельтрами–Лапласа на сфере**

Определение. Пусть $S := \{\ x \in \mathbb{R}^3 :\ \ |x| = 1\ \}$ и $u \in C^2(S)$, $u(x) = \tilde{u}(\varphi, \theta)$. Тогда дифференциальный оператор, определенный по формуле

$$\Delta_S\, u(x)\big|_{x=\Phi(\varphi,\theta)} \ = \ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\varphi^2}$$

называется *оператором Бельтрами–Лапласа* на сфере.

4.2 Разбор некоторых задач из HW-04

5 Занятие 5

5.1 Репетиция контрольной

1. Пусть $\Omega = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}$. Найдите решение $u(x,t)$ следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + 2\sin 2x \sin x \qquad \text{в} \quad \Omega \times (0, +\infty) \\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

2. Найдите функцию $u \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^3)$, такую что

$$\begin{cases} -\Delta u \ = \ 4\pi\ \chi_{B_{2R}\setminus B_R} \qquad \text{в} \qquad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ u|_{|x|\to\infty} \ = \ 0 \end{cases}$$

где χ_Ω обозначает характеристическую функцию множества $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

3. Найти фундаментальное решение для дифференциального оператора $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y$

4. Пусть функция $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ в сферических координатах представима в виде

$$u(r, \varphi, \theta) = U(r)V(\theta)W(\varphi).$$

Пусть $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ и u является гармонической в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Напишите обыкновенные дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $U(r)$, $V(\theta)$ и $W(\varphi)$ соответственно.

5.2 Вариант от 26.11.19

1. Пусть $\Omega = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}$. Найдите решение $u(x,t)$ следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + 2\sin 2x \cos x \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, +\infty) \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \\ u\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

2. Найдите функцию $u \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^3)$, такую что

$$\begin{cases} -\Delta u \ = \ 4\pi \left(|x|\, \chi_{B_2} - \delta_{S_1}\right) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ u\big|_{|x|\to\infty} \ = \ 0 \end{cases}$$

где χ_Ω обозначает характеристическую функцию множества $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

3. Найти фундаментальное решение для дифференциального оператора $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx}$

4. Напишите выражение в полярных координатах для лапласиана векторного поля

$$\mathbf{u} = u_r(r,\varphi)\mathbf{e}_r + u_\varphi(r,\varphi)\mathbf{e}_\varphi$$

5. Пусть $\Omega = B_2 \setminus B_1 \subset \mathbb{R}^3$. Найдите решение $u(r,\varphi,\theta)$ следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \\ u\big|_{|x|=1} = \sin\theta \sin\varphi \\ u\big|_{|x|=2} = 0 \end{cases}$$

Ответы:

1. $u(x,t) = t\,\sin x + \frac{1}{8}(1 - e^{-8t})\sin 3x$

2. $u(r) = u_1(r) - u_2(r) \qquad u_1(r) = \begin{cases} \frac{\pi}{3}(32 - r^3), & r < 2 \\ \frac{16\pi}{r}, & r \geq 2 \end{cases} \qquad u_2(r) = \begin{cases} 4\pi, & r < 1 \\ \frac{4\pi}{r}, & r \geq 1 \end{cases}$

3. $\frac{1}{4}\,\chi(x)\,(1 - e^{-4x})$

4. $\Delta\mathbf{u} \ = \ \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}u_{\varphi,\varphi}\right)\mathbf{e}_r \ + \ \left(\Delta u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}u_{r,\varphi}\right)\mathbf{e}_\varphi$

   Здесь $\Delta\psi :=$ лапласиан скалярной функции $\psi \ = \psi_{,rr} + \frac{\psi_{,r}}{r} + \frac{\psi_{,\varphi\varphi}}{r^2}$

5. $u(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{7}(-r + \frac{8}{r^2})\sin\varphi\sin\theta$

6 Занятие 6

6.1 Метод разделения переменных в круге и шаре

1. **Метод разделения переменных в круге**

   Задача. Пусть $B_R := \{ x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 < R^2 \}$. Найдите решения следующей краевой задачи:
$$\begin{cases} -\Delta u = x_1 x_2 \quad \text{в} \quad B_R \\ u|_{\partial B_R} = 0 \end{cases}$$

   Решение: Для любого $r \in (0, R)$ функция $u(r, \cdot) \in L_2(S^1)$.

   Рассмотрим ортогональный базис в $L_2(S^1)$:
$$\{Y_k\} \ = \ \{\cos k\varphi, \sin k\varphi\}$$

   Разолжим функцию $u(r, \cdot)$ в ряд по этому базису:
$$u(r,\varphi) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \Big(V_k(r)\cos k\varphi + U_k(r)\sin k\varphi \Big)$$

   Правую часть тоже разложим в ряд по этому базису:
$$f(r,\varphi) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \Big(G_k(r)\cos k\varphi + F_k(r)\sin k\varphi \Big)$$

   Тогда очевидно, что $G_k = 0$, $F_k = 0$ при $k \neq 2$ и $F_2(r) = -\frac{r^2}{2}$

   Для $V_k(r)$ и $U_k(r)$ получаем уравнения
$$r^2 V_k''(r) + rV_k'(r) - k^2 V_k(r) = 0, \qquad |V_k(0)| < +\infty, \qquad V_k(R) = 0$$
$$r^2 U_k''(r) + rU_k'(r) - k^2 U_k(r) = r^2 F_k(r), \qquad |U_k(0)| < +\infty, \qquad U_k(R) = 0$$
   Откуда $V_k \equiv 0$, $U_k \equiv 0$ при $k \neq 2$. Обозначим $U(r) := U_2(r)$. Тогда
$$r^2 U''(r) + rU(r) - 4U(r) = -\frac{r^4}{2}, \qquad |U_k(0)| < +\infty, \qquad U_k(R) = 0$$

   Это однородное уравнение. Его частное и общее решение ищутся в виде степенной функции
$$U_0(r) = Ar^{\beta}, \qquad U_r(r) = Cr^{\alpha}$$

   Тогда
$$U(r) \ = \ Ar^2 + Br^{-2} - \frac{r^4}{24}$$

   Из условий $|U_k(0)| < +\infty$, $U_k(R) = 0$ находим $A = \frac{R^2}{24}$, $B = 0$.

   Ответ: $u(r,\varphi) = \frac{r^2}{24}(R^2 - r^2)\sin 2\varphi$

2. **Таблица присоединенных функций Лежандра**

Напомним, что

$$P_{lm}(s) \ := \ (1-s^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_l}{ds^m}(s), \qquad P_l(s) \ := \ \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{ds^l}(s^2-1)^l$$

l	$P_l(s)$	$P_{lm}(s)$	$P_{lm}(\cos\theta)$
0	$P_0(s)=1$	$P_{00}(s)=1$	$P_{00}(\cos\theta)=1$
1	$P_1(s)=s$	$P_{10}(s)=s$ $P_{11}(s)=(1-s^2)^{1/2}$	$P_{10}(\cos\theta)=\cos\theta$ $P_{11}(\cos\theta)=\sin\theta$
2	$P_2(s)=\frac{1}{2}(3s^2-1)$	$P_{20}(s)=\frac{1}{2}(3s^2-1)$ $P_{21}(s)=3s(1-s^2)^{1/2}$ $P_{22}(s)=3(1-s^2)$	$P_{20}(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$ $P_{21}(\cos\theta)=3\cos\theta\sin\theta$ $P_{22}(\cos\theta)=3\sin^2\theta$
3	$P_3(s)=\frac{1}{2}s(5s^2-3)$	$P_{30}(s)=\frac{1}{2}s(5s^2-3)$ $P_{31}(s)=\frac{3}{2}(5s^2-1)(1-s^2)^{1/2}$ $P_{32}(s)=15s(1-s^2)$ $P_{33}(s)=15(1-s^2)^{3/2}$	$P_{30}(\cos\theta)=\frac{1}{2}\cos\theta(5\cos^2\theta-3)$ $P_{31}(\cos\theta)=\frac{3}{2}(5\cos^2\theta-1)\sin\theta$ $P_{32}(\cos\theta)=15\cos\theta\sin^2\theta$ $P_{33}(\cos\theta)=15\sin^3\theta$

3. **Метод разделения переменных в шаре**

Задача. Пусть $B := \{ \ x \in \mathbb{R}^3 : \ |x| < 1 \ \}$. Найдите решения следующих начально–краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta u = x_1 x_3 \quad \text{в} \quad B \\ \quad u|_{\partial B} = 0 \end{cases}$$

Решение: Будем искать решение в виде:

$$u(r,\varphi,\theta) \ = \ \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{l} U_{lm}(r) Y_{lm}(\varphi,\theta)$$

где $Y_{lm}(\varphi,\theta)$ — собственные функции оператора Бельтрами–Лапласа:

$$-\Delta_S Y_{lm} \ = \ l(l+1) \ Y_{lm}$$

$$Y_{lm}(\varphi,\theta) \ = \ P_{lm}(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi, & m \geq 0 \\ \sin m\varphi, & m < 0 \end{cases}$$

Заметим, что правая часть записывается в виде

$$x_1 x_3 \ = \ r^2 \cos\theta \sin\theta \cos\varphi$$

С учетом таблицы из пункта 2 имеем

$$\sin\theta\cos\theta \ = \ \frac{1}{3} \ P_{21}(\cos\theta)$$

Итак, мы раскладываем решение в ряд Фурье по $Y_{lm}(\varphi, \theta)$:

$$u(r,\varphi,\theta) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\Big(U_{lm}(r)P_{lm}(\cos\theta)\cos m\varphi + V_{lm}(r)P_{lm}(\cos\theta)\sin m\varphi\Big)$$

$$x_1x_3 \;=\; \frac{r^2}{3}\,P_{21}(\cos\theta)\cos\varphi \;=\; \frac{r^2}{3}\,Y_{21}(\varphi,\theta)$$

Отсюда получаем: $V_{lm}(r) \equiv 0$, $U_{lm}(r) = 0$ при $(l,m) \neq (2,1)$. Обозначиим $U_{21}(r) = U(r)$. Тогда

$$\Big(U''(r) + \frac{2}{r}U'(r)\Big)Y_{21}(\varphi,\theta) + \frac{U(r)}{r^2}\;\underbrace{\Delta_S Y_{21}(\varphi,\theta)}_{=-2(2+1)\,Y_{21}(\varphi,\theta)} \;=\; \frac{r^2}{3}Y_{21}(\varphi,\theta)$$

Откуда

$$r^2U''(r) + 2rU'(r) - 6U(r) \;=\; \frac{r^4}{3}$$

Решение этого уравнения

$$U(r) \;=\; Ar^2 + Br^{-3} + \frac{r^4}{42}$$

Из краевых услвий находим

$$|U(0)| < +\infty, \qquad U(1) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad B = 0, \qquad A = -\frac{1}{42}$$

Ответ:

$$u(r,\varphi,\theta) \;=\; \frac{1}{42}\,r^2\,(r^2-1)P_{21}(\cos\theta)\cos\varphi$$

4. **Ненулевые краевые условия**

Задача. Пусть $B := \{\ x \in \mathbb{R}^3 :\ |x| < 1\ \}$. Найдите решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{в} \quad B \\ u|_{\partial B} = \sin 3\theta\cos\varphi \end{cases}$$

Решение: Представим краевое условие в виде линейной комбинации сферических функций:

$$\sin 3\theta = \sin\theta(4\cos^2\theta - 1) = aP_{11}(\cos\theta) + bP_{31}(\cos\theta)$$

$$P_{11}(\cos\theta) = \sin\theta, \qquad P_{31}(\cos\theta) = \frac{3}{2}(5\cos^2\theta - 1)\sin\theta$$

$$a = -\frac{1}{5}, \qquad b = \frac{8}{15}$$

Следовательно,

$$\sin 3\theta\cos\varphi = -\frac{1}{5}P_{11}(\cos\theta)\cos\varphi + \frac{8}{15}P_{31}(\cos\theta)\cos\varphi = -\frac{1}{5}Y_{11}(\varphi,\theta) + \frac{8}{15}Y_{31}(\varphi,\theta)$$

При каждом $r \in (0,1]$ имеем $u(r,\cdot) \in L_2(S)$. Поэтому функцию $u(r,\cdot)$ можно представить в виде ряда по ортогональному базису $\{Y_{lm}\}$ в $L_2(S)$. Обозначим через $U_{lm}(r)$ коэффициенты Фурье функции $u(r,\cdot)$ относительно базиса $\{Y_{lm}\}$:

$$u(r,\varphi,\theta) \;=\; \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{l} U_{lm}(r)Y_{lm}(\varphi,\theta)$$

Подставляя этот ряд в уравнение и дифференцируя почленно, находим

$$\Delta u = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(U''_{lm}(r) Y_{lm}(\varphi, \theta) + \frac{2}{r} U'_{lm}(r) Y_{lm}(\varphi, \theta) + \frac{1}{r^2} U_{lm}(r) \underbrace{\Delta_S Y_{lm}(\varphi, \theta)}_{=-l(l+1)Y_{lm}(\varphi,\theta)} \right) \;=\; 0$$

Функция тождественно равна нулю тогда и только тогда, когда все ее коэффициенты Фурье равны нулю. Следовательно, для любых l, m

$$r^2 U''_{lm}(r) + 2r U'_{lm}(r) - l(l+1) U_{lm}(r) \;=\; 0 \qquad r \in (0,1) \tag{$*$}$$

Кроме того,

$$u|_{r=1} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{l} U_{lm}(1) Y_{lm}(\varphi, \theta) \;=\; -\frac{1}{5} Y_{11}(\varphi, \theta) + \frac{8}{15} Y_{31}(\varphi, \theta)$$

откуда

$$U_{11}(1) = -\frac{1}{5}, \qquad U_{31}(1) = \frac{8}{15}, \qquad U_{lm}(1) = 0 \quad \text{для остальных} \quad l, m$$

Наконец, из того, что $u \in C^\infty(B)$, заключаем, что

$$|U_{lm}(0)| < +\infty.$$

Уравнение ($*$) — это однородное ODE. На практике по ODE нас учили, как его решать. Подставляя в это уравнение $U(r) = r^\alpha$, находим, что $\alpha = l$ или $\alpha = -l-1$. Следовательно, общее решение ($*$) на $(0,1)$ имеет вид

$$U_{lm}(r) = A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}$$

Из условия $|U_{lm}(0)| < +\infty$ заключаем, что $B_{lm} = 0$. Из краевого условия при $r = 1$ заключаем, что $A_{lm} = 0$ при всех (l, m) кроме $(1,1)$ и $(3,1)$. Для них имеем

$$A_{11} = -\frac{1}{5}, \qquad A_{31} = \frac{8}{15}$$

Ответ: $u(r, \varphi, \theta) = -\frac{1}{5} r Y_{11}(\varphi, \theta) + \frac{8}{15} r^3 Y_{31}(\varphi, \theta)$. Можно расписать через синусы и косинусы:

$$u(r, \varphi, \theta) = -\frac{1}{5}\, r \sin\theta \cos\varphi + \frac{4}{5}\, r^3 (5\cos^2\theta - 1) \sin\theta \cos\varphi$$

А можно и не расписывать. :)

6.2 Разбор некоторых задач из HW-06

Некоторые типовые задачи написал в §6.1.

7 Контрольная работа

1. **Варианты 1,2**

№1. Пусть $\Omega = (0,\pi) \subset \mathbb{R}$. Найдите решение $u(x,t)$ следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4u + 2\sin^2 x \qquad \text{в} \quad \Omega\times(0,+\infty) \\ \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=\pi} = 0 \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

№2. Найдите функцию $u \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^3)$, такую что

$$\begin{cases} -\Delta u \;=\; 4\pi\left(\frac{1}{|x|}\,\chi_{B_1} - \delta_0\right) \qquad \text{в} \qquad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ u\big|_{|x|\to\infty} \;=\; 0 \end{cases}$$

где χ_Ω обозначает характеристическую функцию множества $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, B_1 — шар в $\mathbb{R}^3$ радиуса 1 с центром в нуле, δ_0 — дельта–функция в нуле.

№3. Найти фундаментальное решение для дифференциального оператора $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y$

№4. Найдите выражение в сферических координатах для оператора Лапласа от векторного поля, имеющего в сферических координатах вид $\mathbf{u} = \mathbf{e}_\theta$

№5. Пусть $\Omega = B_2 \setminus B_1 \subset \mathbb{R}^3$. Найдите решение $u(r,\varphi,\theta)$ следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \\ u\big|_{|x|=1} = \cos^2\theta \\ u\big|_{|x|=2} = \frac{1}{8}(\cos^2\theta + 1) \end{cases}$$

2. **Ответы к вариантам 1,2**

№1. $u(x,t) = \frac{1}{4}(\operatorname{ch} 2t - 1) - \frac{t^2}{2}\cos 2x$

№2. $u(x) = u_1(x) - u_2(x), \qquad u_1(r) = \begin{cases} 2\pi(2-r), & r<1 \\ \frac{2\pi}{r}, & r \geq 1 \end{cases}, \qquad u_2(r) = \frac{1}{r}$

№3. $\chi(x)(e^{-x} - e^{-2x})$

№4. $\Delta \mathbf{e}_\theta \;=\; -\frac{2\cos\theta}{r^2\sin\theta}\,\mathbf{e}_r - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\mathbf{e}_\theta$

№5. $u(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{3r} + \frac{1}{3r^3}(3\cos^2\theta - 1) = \frac{1}{3r}Y_{00}(\varphi,\theta) + \frac{2}{3r^3}Y_{20}(\varphi,\theta)$

3. **Решение задачи №4**

Никто не знает определения лапласиана вектороноего поля. Студенты массово берут формулу для скалярного лапласиана в сферических координатах и пихают в нее вектор. **Это чепуха.** В лучшем случае представляют векторное поле в декартовых координатах и ошибаются в громоздких вычислениях.

Лапласиан вектороного (любого тензорного) поля инвариантно определяется как дивергенция от градиента. Градиент и дивергенция тензорного поля определяются в дифференциальной геометрии. Градиент тензора — это тензор на единицу большего порядка, для векторного поля это будет "матрица". Дивергенция — это след градиента, т.е. свертка соответствующего тензорного поля по соответствующему индексу.

Это все неважно. Ниже приводится формальный рецепт вычисления лапласиана векторного поля, представленного в сферических координатах, следуя которому всегда приходишь к правильному ответу. (Напомним, что задача практики к первому семестру курса матфизики — научить студетнтов хоть что-то вычислять руками. Во втором семестре студенты будут уже обучаться что-то доказывать). Однако студентам все же рекомндуется осмыслить, что предлагаемый ниже рецепт — это и есть то, чему нас учит дифференциальная геометрия.

Сферические координаты в $\mathbb{R}^3$:

$$x = \Phi(y), \qquad y = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi\sin\theta \\ x_2 = r\sin\varphi\sin\theta \\ x_3 = r\cos\theta \end{cases}$$

Ковариантный $\underline{\mathbf{e}}_i$, контравариантный $\bar{\mathbf{e}}^i$ и физический $\mathbf{e}_i$ (ортонормированный) базисы сферической системы координат:

$$\underline{\mathbf{e}}_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_r = \bar{\mathbf{e}}^r$$

$$\underline{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r\sin\theta}\,\underline{\mathbf{e}}_\varphi = r\sin\theta\,\bar{\mathbf{e}}^\varphi$$

$$\underline{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\,\underline{\mathbf{e}}_\theta = r\,\bar{\mathbf{e}}^\theta$$

Производные векторов физического базиса (символы Кристофеля, коэффициенты Ламэ):

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_{r,r} = 0 & \mathbf{e}_{r,\varphi} = \;\;\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_{r,\theta} = \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_{\varphi,r} = 0 & \mathbf{e}_{\varphi,\varphi} = -\sin\theta\,\mathbf{e}_r - \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_{\varphi,\theta} = 0 \\ \mathbf{e}_{\theta,r} = 0 & \mathbf{e}_{\theta,\varphi} = \;\;\cos\theta\,\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_{\theta,\theta} = -\mathbf{e}_r \end{array}$$

Определение градиента векторного поля $\mathbf{u} = u_r\mathbf{e}_r + u_\varphi\mathbf{e}_\varphi + u_\theta\mathbf{e}_\theta$:

$$\begin{aligned} \nabla\mathbf{u} = \mathbf{u}_{,r}\otimes\bar{\mathbf{e}}^r + \mathbf{u}_{,\varphi}\otimes\bar{\mathbf{e}}^\varphi + \mathbf{u}_{,\theta}\otimes\bar{\mathbf{e}}^\theta \;= \\ = \;\frac{\partial}{\partial r}\Big(u_r\mathbf{e}_r + u_\varphi\mathbf{e}_\varphi + u_\theta\mathbf{e}_\theta\Big)\otimes\mathbf{e}_r \;+ \\ +\;\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(u_r\mathbf{e}_r + u_\varphi\mathbf{e}_\varphi + u_\theta\mathbf{e}_\theta\Big)\otimes\frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\varphi \;+ \\ +\;\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(u_r\mathbf{e}_r + u_\varphi\mathbf{e}_\varphi + u_\theta\mathbf{e}_\theta\Big)\otimes\frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

Тензорное поле ранга 2 представляется в базисе $\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$. Работая в физическом базисе, мы пишем индексы снизу, пренебрегая принятыми в дифференциальной геометрии обозначениями (верхние индексы — для компонент тензора в ковариантном базисе, нижние индексы — в контравариантном):

$$
\begin{gathered}
T = T_{rr}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + T_{r\varphi}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi + T_{r\theta}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta \; + \\
+ \; T_{\varphi r}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r + T_{\varphi\varphi}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + T_{\varphi\theta}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta \; + \\
+ \; T_{\theta r}\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + T_{\theta\varphi}\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi + T_{\theta\theta}\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta
\end{gathered}
$$

Определение дивергенции тензорного поля T:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} T \;&=\; \frac{\partial}{\partial r}T \cdot \bar{\mathbf{e}}^r + \frac{\partial}{\partial \varphi}T \cdot \bar{\mathbf{e}}^\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta}T \cdot \bar{\mathbf{e}}^\theta \;= \\
&=\; \frac{\partial}{\partial r}T \cdot \mathbf{e}_r + \frac{\partial}{\partial \varphi}T \cdot \frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta}T \cdot \frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta
\end{aligned}
$$

Определение скалярного произведения тензора $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ на вектор $\mathbf{e}_k$:

$$
(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \;=\; \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})
$$

Поскольку физический базис является ортонормированным, скалярные произведения обладают свойством $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Поэтому в полученной огромной сумме куча слагаемых обнуляется и ответ записывается в красивой и компактной форме.

Вычислим теперь лапласиан векторного поля $\mathbf{u} = \mathbf{e}_\theta$:

$$
\nabla \mathbf{e}_\theta \;=\; \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}\,\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{r}\,\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta
$$

$$
\begin{gathered}
\Delta \mathbf{e}_\theta \;=\; \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}\,\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{r}\,\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta\Big) \cdot \mathbf{e}_r \; + \\
+ \; \frac{\partial}{\partial \varphi}\Big(\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}\,\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{r}\,\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta\Big) \cdot \frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\varphi \; + \\
+ \; \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}\,\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{r}\,\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta\Big) \cdot \frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta \\
\Delta \mathbf{e}_\theta \;=\; -\frac{\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}(\sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta) - \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\,\mathbf{e}_r \; - \frac{1}{r^2}\,\mathbf{e}_\theta
\end{gathered}
$$

Ответ: $\quad \Delta \mathbf{e}_\theta \;=\; -\frac{2\cos\theta}{r^2\sin\theta}\,\mathbf{e}_r - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\mathbf{e}_\theta$