Математическая физика
Семестр 1

Тимофей Николаевич Шилкин
(ПОМИ РАН)

8 декабря 2019 г.

Аннотация

Обязательный курс математической физики для студентов–математиков факультета МКН СПбГУ состоит из двух семестров.

Основная цель первого семестра — научиться отличать те задачи математической физики, решения которых можно найти в явном виде (в том или ином смысле), научиться выписывать формулы представления решений в тех задачах, где это возможно, и извлекать из этих формул информацию о свойствах решений различных типов уравнений в частных производных.

Во втором семестре на примере эллиптического оператора второго порядка общего вида (т.е. с переменными коэффициентами) будет изложена общая теория краевых задач. Основным объектом изучения во втором семестре являются т.н. слабые решения (из энергетического класса). Ключевыми вопросами будут вопросы существования, единственности и регулярности слабых решений. Для изучения этих вопросов будет развит необходимый математический аппарат (в частности, теория пространств Соболева).

Теория начально-краевых задач для уравнений эволюционного типа не поместилась в двухсеместровый общий курс математической физики и будет предолжена слушателям в качестве спецкурса по выбору на 4-ом курсе или в магистратуре (первый семестр — “Параболические уравнения”, второй семестр — “Уравнения Навье–Стокса”).

Содержание

Список литературы

Лекции

[1] Л.К. Эванс, “Уравнения с частными производными”, Новосибирск, Изд Т. Рожковской, 2003.

[2] А.М. Ильин, “Уравнения математической физики”, Москва, Физматлит, 2009.

Практические занятия

[3] В.П. Пикулин, С.И. Похожаев, “Практический курс по уравнениям математической физики”, Москва, МЦНМО, 2004.

[4] “Сборник задч по уравнениям математической физики”, под ред. В.С. Владимирова, Издание 3-е, М., Физматлит, 2001.

1 Уравнение Лапласа

1.1 Фундаментальное решение уравнения Лапласа

1. **Оператор Ласпласа**

   Определение. *Оператором Лапласа* (или *лапласианом*) функции $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется дифференциальный оператор второго порядка

   $$\Delta u \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div} \nabla u$$

   В декартовых координатах $(x_1, \ldots, x_n)$ на $\mathbb{R}^n$ лапласиан задается формулой

   $$\Delta u \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

2. **Уравнение Лапласа и гармонические функции**

   Определение. *Уравнением Лапласа* в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется дифференциальное уравнение в частных производных

   $$\Delta u \;=\; 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

   Будем говорить, что функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ является *гармонической* в области Ω, если $u \in C^2(\Omega)$ и u удовлетворяет уравнению Лапласа в области Ω.

3. **Радиально–симметричное "решение" уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$**

   Наводящие соображения. Пусть $\mathcal{E}(x) = f(|x|)$. Тогда

   $$\Delta \mathcal{E} = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = 0$$

   $$f(r) \sim \frac{c}{r^{n-2}}, \quad \text{при} \quad n \geq 3, \qquad f(r) \sim c \ln r, \quad \text{при} \quad n = 2.$$

4. **Фундаментальное решение уравнения Лапласа**

   Определение. *Фундаментальным решением для оператора* $-\Delta$ в $\mathbb{R}^n$ мы будем называть функцию $\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

   $$\mathcal{E}(x) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)|S_1|} \cdot \dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x|}, & n = 2 \end{cases}$$

   где $|S_1|$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$ $\;(|S_1| = 4\pi$ при $n = 3)$.

5. **Свойства функции $\mathcal{E}(x)$**

   Теорема.

   1) $\mathcal{E} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$
   2) $\mathcal{E}$ — гармоническая функция в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
   3) $\mathcal{E}$, $\nabla \mathcal{E} \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$

4) $\int\limits_{S_1} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x_i \partial x_j}(x)\; ds_x \;=\; 0, \quad \forall\, i,j = 1,\ldots,n, \quad S_1 := \{\; x \in \mathbb{R}^n :\; |x| = 1 \;\}$

6. **Первое тождество Грина**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса C^1. Тогда для любых u, $v \in C^2(\bar\Omega)$ выполняется *первое тождество Грина*:

$$\int\limits_{\Omega} \Big(v\Delta u - u\Delta v \Big)\; dx \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} \Big(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \Big)\; ds.$$

7. **Потенциалы**

Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса C^1, $f \in C(\bar\Omega)$, σ, $\mu \in C(\partial\Omega)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$. Тогда

$$u^f(x) \;:=\; \int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(x-y) f(y)\; dy \qquad \text{— потенциал Ньютона с плотностью } f$$

$$v^\sigma(x) \;:=\; \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{E}(x-y)\sigma(y)\; ds_y \qquad \text{— потенциал простого слоя с плотностью } \sigma$$

$$w^\mu(x) \;:=\; -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu_y}(x-y)\mu(y)\; ds_y \qquad \text{— потенциал двойного слоя с плотностью } \mu$$

8. **Некоторые свойства потенциалов**

Теорема. Пусть $u \in C(\bar B_R(x))$. Тогда

$$\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \mathcal{E}(x-y)u(y)\; ds_y \;\underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow}\; 0,$$

$$-\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu_y}(x-y)u(y)\; ds_y \;\underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow}\; u(x).$$

Здесь $\nu_y = \nu(y)$ — внешняя нормаль к $B_\varepsilon(x)$ в точке $y \in \partial B_\varepsilon(x)$ и мы обозначили

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu_y}(x-y) \;:=\; \sum_{j=1}^{n} \nu_j(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\mathcal{E}(x-y), \qquad y \in \partial B_\varepsilon(x).$$

Упражнение. Доказать данные свойства для $n = 2$.

9. **Второе тождество Грина**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса C^1. Тогда для любых u, $v \in C^2(\bar\Omega)$ выполняется *второе тождество Грина*:

$$-\int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(x-y)\Delta u(y)\; dy + \int\limits_{\partial\Omega} \Big(\mathcal{E}(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) - u(y)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu_y}(x-y) \Big)\; ds_y \;=\; \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar\Omega \end{cases}$$

10. **Почему $\mathcal{E}(x)$ называют "фундаментальным решением"?**

Теорема. Регулярное распределение на $\mathbb{R}^n$ с плотностью $\mathcal{E} \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет уравнению

$$-\Delta\mathcal{E} \;=\; \delta_0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

то есть $\mathcal{E}$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\forall\ \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x)\Delta\eta(x)\ dx \;=\; \eta(0).$$

1.2 Потенциал Ньютона

1. **Уравнение Пуассона для оператора Лапласа**

   Уравнением Пуассона в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ мы называем дифференциальное уравнение в частных производных

   $$-\Delta u \;=\; f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

   где $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — заданная функция.

2. **Физический смысл потенциала Ньютона**

   “Теорема”. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область и $f \in L_\infty(\Omega)$. Пусть $\mathcal{E}$ — фундаментальное решение для оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$. Обозначим через u потенциал Ньютона с плотностью f в области Ω:

   $$u(x) \;:=\; \int\limits_\Omega \mathcal{E}(x-y)f(y)\;dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

   Тогда $-u$ есть (с точностью до постоянного множителя) потенциал гравитационного поля, создаваемого телом формы Ω и плотностью массы f. Другими словами, сила гравитационного притяжения, действующая со стороны тела Ω на материальную точку с массой m и координатой x, выражается по формуле

   $$F \;=\; \gamma m \nabla u(x)$$

3. **Гладкость потенциала Ньютона в случае гладкой финитной плотности**

   Тееорема. Пусть $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Обозначим

   $$u(x) \;:=\; (\mathcal{E} * f)(x) \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x-y)f(y)\;dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

   Тогда $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

   $$D^\alpha u \;=\; \mathcal{E} * D^\alpha f$$

4. **Непрерывность потенциала Ньютона во всем пространстве**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и $f \in L_\infty(\Omega)$. Пусть u — потенциал Ньютона с плотностью f. Тогда функция u непрерывна в $\mathbb{R}^n$:

   $$u \in C(\mathbb{R}^n).$$

5. **Первые производные потенциала Ньютона**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и $f \in L_\infty(\Omega)$. Пусть u — потенциал Ньютона с плотностью f. Тогда функция ∇u непрерывна в $\mathbb{R}^n$ и

   $$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \;=\; \int\limits_\Omega \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_j}(x-y)\; f(y)\;dy, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

6. **Гармоничность потенциала Ньютона вне области**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и $f \in L_\infty(\Omega)$. Пусть u — потенциал Ньютона с плотностью f. Тогда $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega})$ и функция u является гармонической в области $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}.$$

7. **Теорема о вторых производных потенциала Ньютона**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область класса C^1 и $f \in C^1(\bar{\Omega})$. Обозначим через u потенциал Ньютона с плотностью f в области Ω. Тогда для любого $x \in \Omega$ функция u дважды дифференцируема в точке x и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(x) \;=\; -\frac{1}{n}\,\delta_{jk}\, f(x) \;+\; \text{p.v.}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x_j \partial x_k}(x-y)\; f(y)\; dy,$$

где δ_{jk} — символ Кронекера и

$$\text{p.v.}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x_j \partial x_k}(x-y)\; f(y)\; dy \;:=\; \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x_j \partial x_k}(x-y)\; f(y)\; dy \;=$$

$$= \int\limits_{\Omega\setminus B_r(x)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x_j \partial x_k}(x-y)\; f(y)\; dy \;+\; \int\limits_{B_r(x)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x_j \partial x_k}(x-y)\; (f(y)-f(x))\; dy$$

для любого $r < \operatorname{dist}\{x, \partial\Omega\}$.

8. **Локальная оценка Шаудера для потенциала Ньютона**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и $f \in C^1(\bar{\Omega})$. Обозначим через u потенциал Ньютона с плотностью f в области Ω. Тогда для любого $\mu \in (0,1)$ и любой $\Omega' \Subset \Omega$ существует постоянная $C(n,\mu,\Omega,\Omega') > 0$, такая что для любых $j,k = 1,\dots,n$ справедлива оценка

$$\Big\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \Big\rangle_{C^\mu(\bar{\Omega}')} \;\le\; C(n,\mu,\Omega,\Omega')\left(\langle f \rangle_{C^\mu(\bar{\Omega})} + \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \right),$$

где

$$\langle f \rangle_{C^\mu(\bar{\Omega})} \;:=\; \sup_{x,y\in\Omega\, x\ne y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\mu}.$$

Доказательство: Без доказательства. □

Следствие. $\quad f \in C^1(\bar{\Omega}) \quad \Longrightarrow \quad u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$

9. **Решение уравнения Пуассона**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничена, $f \in C^1(\bar{\Omega})$, и пусть $u = u^f$ — потенциал Ньютона с плотностью f. Тогда

$$u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega),$$

и u является (частным) решением уравнения Пуассона в Ω

$$-\Delta u(x) \;=\; f(x), \qquad x \in \Omega.$$

Если же $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$, то $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и

$$-\Delta u(x) = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

10. Поведение потенциала Ньютона на бесконечности

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничена, $\Omega \subset B_d$, $f \in L_\infty(\Omega)$, и пусть $u = u^f$ — потенциал Ньютона с плотностью f. Тогда

1) $n \geq 3 \quad \Longrightarrow \quad u \in L_\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_\Omega \; \|f\|_{L_\infty(\Omega)}$ и

$$|u(x)| \; \leq \; \frac{C(\Omega, f)}{|x|^{n-2}}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| \geq 2d$$

2) $n = 2 \quad \Longrightarrow \quad |u(x)| \; \leq \; C(\Omega, f) \; \ln(1 + |x|), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^2 : \quad |x| \geq 2d$

$$u \in L_\infty(\mathbb{R}^2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int\limits_\Omega f(y)\; dy \; = \; 0$$

3) $n \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, C(\Omega, k, f) > 0$:

$$|\nabla^k u(x)| \; \leq \; \frac{C(\Omega, k, f)}{|x|^{n-2+k}}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| \geq 2d$$

Следствие. $\quad n = 3 \quad \Longrightarrow \quad u \notin L_2(\mathbb{R}^3), \quad \nabla u \in L_2(\mathbb{R}^3)$

1.3 Функция Грина задачи Дирихле

1. **Краевые задачи для оператора Лапласа**

   Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открыто. Для *однозначного* определения решения уравнения

   $$-\Delta u(x) \;=\; f(x), \qquad \forall\, x \in \Omega,$$

   в области Ω, помимо самого уравнения, как правило, необходимо накладывать на u еще каких-то дополнительные условия. Типичным примером являются *краевые* условия, так или иначе фиксирующие требуемое поведение u на границе $\partial\Omega$ области Ω. В этом случае говорят о решении *краевой задачи*. Наиболее распространенными (важными для приложений) являются следующие краевые условия:

   - *Условие Дирихле:*

     $$u|_{\partial\Omega} = \varphi, \qquad \varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R} \quad \text{— заданная функция}$$

   - *Условие Неймана:*

     $$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = \varphi, \qquad \varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R} \quad \text{— заданная функция}$$

     Здесь $\nu_x \in \mathbb{R}^n$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке x и $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) := \nu_x \cdot \nabla u(x)$.

   - *Третье краевое условие (условие Робена):*

     $$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x) u\right)\Big|_{\partial\Omega} = \varphi, \qquad \sigma,\, \varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R} \quad \text{— заданные функции}$$

2. **Классические решения задачи Дирихле**

   Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открыто, $f \in C(\Omega)$ и $\varphi \in C(\partial\Omega)$. *Классическим решением* задачи

   $$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{$*$}$$

   называется функция

   $$u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega),$$

   удовлетворяющая соотношениям $(*)$.

3. **Функция Грина задачи Дирихле**

   Определение. Предположим, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такова, что для любой точки $x \in \Omega$ существует функция $g_x \in C^2(\bar{\Omega})$, такая что

   $$\begin{cases} \Delta g_x = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \\ g_x|_{\partial\Omega} \;=\; -\mathcal{E}(x-y)|_{y\in\partial\Omega} \end{cases}$$

   Тогда функция $G : (\Omega \times \bar{\Omega}) \setminus \Sigma \to \mathbb{R}$, $\Sigma := \{x = y\}$, определенная по формуле

   $$G(x,y) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \mathcal{E}(x-y) \;+\; g_x(y)$$

   называется *функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в* Ω.

4. **Ядро Пуассона**

Определение. Пусть для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ класса C^1 существует функция Грина $G(x,y)$ задачи Дирихле. Тогда функция

$$K(x,y) \ := \ -\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y), \qquad x \in \Omega, \qquad y \in \partial\Omega$$

называется *ядром Пуассона в* Ω. Здесь

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) \ := \ \nu_y \cdot \nabla_y G(x,y)$$

и ν_y — внешняя нормаль к области Ω в точке $y \in \partial\Omega$.

5. **Представление решения задачи Дирихле через функцию Грина**

Теорема. Пусть для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ существует функция Грина $G(x,y)$ задачи Дирихле. Предположим, что $f \in C(\bar{\Omega})$ и $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$ (в случае неограниченной области Ω предположим также, что носители f и φ компактны). Тогда если $u \in C^2(\bar{\Omega})$ — решение краевой задачи $(*)$, то справедливо тождество:

$$u(x) \ = \ \int\limits_{\Omega} G(x,y)\ f(y)\ dy \ + \int\limits_{\partial\Omega} K(x,y)\ \varphi(y)\ ds_y, \qquad x \in \Omega,$$

где $G(x,y)$ и $K(x,y)$ — функция Грина и ядро Пуассона соответственно.

6. **Физический смысл функции Грина**

Теорема. Пусть $n = 3$. Тогда значение функции Грина $G(x,y)$ задачи Дирихле — это (с точностью до множителя 4π) потенциал электростатического поля, создаваемого в точке $y \in \Omega$ системой зарядов, состоящей из единичного точечного заряда в точке $x \in \Omega$ и заземленной проводящей поверхности $\partial\Omega$:

$$\varphi_x(y) \ = \ \underbrace{\frac{1}{|y-x|}}_{\substack{\text{потенциал, порожденный в точке } y \\ \text{единичным зарядом в точке } x}} \ + \ \underbrace{g_x(y)}_{\substack{\text{потенциал, порожденный в точке } y \\ \text{поверхностным зарядом на } \partial\Omega \\ = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\sigma_x(z)}{|y-z|}\, dS_z \ \in \ C^\infty(\bar{\Omega})}}$$

Доказательство: Курс физики в следующем семестре. $\square$

7. **Свойства функции Грина**

Теорема. Пусть для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ существует функция Грина $G(x,y)$ задачи Дирихле. Тогда

1) $\forall\ x \in \Omega, \quad G(x,y)|_{y \in \partial\Omega} = 0$
2) $\forall\ x,\, y \in \Omega, \quad x \neq y \quad \Longrightarrow \quad G(x,y) = G(y,x)$
3) $\Delta_x G(x,y) = 0, \quad \forall\ x,\, y \in \Omega\colon \quad x \neq y$
4) $\Delta_x K(x,y) = 0, \quad \forall\ x \in \Omega, \quad \forall\ y \in \partial\Omega$

1.4 Функция Грина для полупространства

1. **Метод электрических изображений**

   Обозначим

   $$\mathbb{R}^n_+ := \{\ x \in \mathbb{R}^n :\ x_n > 0\ \}, \qquad \Gamma := \partial\mathbb{R}^n_+ = \{\ x \in \mathbb{R}^n :\ x_n = 0\ \}$$

   В этом параграфе для любой $x \in \mathbb{R}^n$ через x^* мы обозначаем точку, симметричную точке x относительно гиперплоскости Γ:

   $$x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^* = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$$

   Теорема. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^3_+$. Тогда система зарядов

   $$\{\text{ точечный заряд } q \text{ в точке } x_0\ \} \ + \ \{\text{ точечный заряд } -q \text{ в точке } x_0^*\ \}$$

   создает в пространстве потенциал, тождественно равный нулю на гиперплоскости $\Gamma := \{x_n = 0\}$, то есть

   $$\left.\frac{q}{|x - x_0|} - \frac{q}{|x - x_0^*|}\,\right|_{x\in\Gamma} \ = \ 0$$

2. **Функция Грина для полупространства**

   Теорема. Функция

   $$G(x, y) \ := \ \mathcal{E}(x - y) \ - \ \mathcal{E}(x^* - y), \qquad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad y \in \bar{\mathbb{R}}^n_+, \quad y \neq x$$

   является функцией Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n_+$.

3. **Ядро Пуассона для полупространства**

   Теорема. Ядро Пуассона $K : \mathbb{R}^n_+ \times \Gamma \to \mathbb{R}$ для полупространства $\mathbb{R}^n_+$ имеет вид

   $$K(x, y) \ = \ \frac{2}{|S_1|}\,\frac{x_n}{|x - y|^n}, \qquad x \in \mathbb{R}^n_+, \qquad y \in \Gamma$$

4. **Свойства ядра Пуассона**

   Теорема.

   1) $K \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+ \times \Gamma)$
   2) $K(x, y) \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+, \quad \forall\, y \in \Gamma$
   3) $\Delta_x K(x, y) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+, \quad \forall\, y \in \Gamma$
   4) $\int\limits_\Gamma K(x, y)\, dy = 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+$

5. **Формула Пуассона в полупространстве**

   Теорема. Пусть $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Определим функцию $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ по формуле

   $$u(x) \ = \ \frac{2\,x_n}{|S_1|} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\varphi(y')}{(\,|x' - y'|^2 + x_n^2\,)^{\frac{n}{2}}}\, dy', \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+ \qquad (*)$$

   Тогда $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ и $\Delta u = 0$ в $\mathbb{R}^n_+$.

6. **Непрерывность интеграла Пуассона вплоть до границы**

Теорема. Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ и определим функцию $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ по формуле $(*)$. Тогда для любых точек $x_m \in \mathbb{R}^n_+$ и $x_0 \in \Gamma$

$$x_m \to x_0 \qquad \Longrightarrow \qquad u(x_m) \to \varphi(x_0).$$

7. **Классическое решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве**

Теорема. Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Определим функцию $u : \bar{\mathbb{R}}^n_+ \to \mathbb{R}$

$$u(x) := \begin{cases} \int\limits_\Gamma K(x,y)\varphi(y)\, ds_y, & x \in \mathbb{R}^n_+ \\ \varphi(x), & x \in \Gamma \end{cases}$$

Тогда $u \in C(\bar{\mathbb{R}}^n_+) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ и

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n_+ \\ u|_{x_n=0} = \varphi \end{cases}$$

1.5 Функция Грина для шара

1. **Свойство инверсии относительно сферы**

   Теорема. Пусть $x \in B_R$, $x \neq 0$, и рассмотрим точку x^*, получающуюся инверсией точки x относительно сферы $S_R = \{\, x \in \mathbb{R}^n : \, |x| = R \,\}$, то есть

   $$x^* \;=\; \frac{R^2}{|x|^2}\, x$$

   Тогда

   $$\forall\ y \in S_R \qquad \frac{1}{|y-x|} = \frac{1}{|y-x^*|}\,\frac{R}{|x|}$$

2. **Метод электрических изображений**

   Теорема. Пусть $x_0 \in B_R \subset \mathbb{R}^3$. Тогда система зарядов

   $$\{\ \text{точечный заряд } q \text{ в точке } x_0\ \}\ +\ \{\ \text{точечный заряд } -\tfrac{R}{|x_0|}\, q \text{ в точке } x_0^*\ \}$$

   создает в пространстве потенциал, тождественно равный нулю на сфере S_R, т.е.

   $$\left.\frac{q}{|x-x_0|} \;-\; \frac{q\,\frac{R}{|x_0|}}{|x-x_0^*|}\,\right|_{x\in S_R} \;=\; 0$$

3. **Функция Грина для шара**

   Теорема. Пусть $B_R := \{\ x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < R\ \}$. Тогда функция

   $$G(x,y) \;=\; \begin{cases} \mathcal{E}(x-y) - \mathcal{E}\left(\dfrac{|x|}{R}(x^*-y)\right), \quad \text{где} \quad x^* := \dfrac{R^2}{|x|^2}\, x, & \text{если} \ \ x \neq 0, \\ \qquad \mathcal{E}(y) - \mathcal{E}(R), & \text{если} \ \ x = 0 \end{cases}$$

   является функцией Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в B_R.

4. **Ядро Пуассона для шара**

   Теорема. Ядро Пуассона $K : B_R \times \partial B_R \to \mathbb{R}$ для шара B_R имеет вид

   $$K(x,y) \;=\; \frac{R^2 - |x|^2}{|S_1|\ R} \cdot \frac{1}{|x-y|^n}$$

5. **Свойства ядра Пуассона**

   Теорема. Справедливы соотношения

   1) $K \in C^\infty(B_R \times \partial B_R)$
   2) $K(x,y) \geq 0, \quad \forall\ x \in B_R, \quad \forall\ y \in \partial B_R$
   3) $\Delta_x K(x,y) = 0, \quad \forall\ x \in B_R, \quad \forall\ y \in \partial B_R$
   4) $u \in C^2(\bar{B}_R),\ \ \Delta u = 0$ в $B_R \quad \Longrightarrow \quad u(x) = \int\limits_{\partial B_R} K(x,y) u(y) ds_y, \ \ \forall\ x \in B_R$
   5) $\int\limits_{\partial B_R} K(x,y)\ ds_y = 1, \quad \forall\ x \in B_R$

6. **Формула Пуассона в шаре**

Теорема. Пусть $\varphi \in L_\infty(\partial B_R)$. Определим функцию $u : B_R \to \mathbb{R}$ по формуле

$$u(x) \;=\; \frac{R^2 - |x|^2}{|S_1|\; R} \int\limits_{\partial B_R} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, ds_y, \qquad \forall\, x \in B_R \tag{$*$}$$

Тогда $u \in C^\infty(B_R)$ и $\Delta u = 0$ в B_R.

7. **Непрерывность интеграла Пуассона вплоть до границы**

Теорема. Пусть $\varphi \in C(\partial B_R)$ и определим функцию $u : B_R \to \mathbb{R}$ по формуле $(*)$. Тогда для любых точек $x_m \in B_R$ и $x_0 \in \partial B_R$

$$x_m \to x_0 \qquad \Longrightarrow \qquad u(x_m) \to \varphi(x_0).$$

8. **Классическое решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре**

Теорема. Пусть $\varphi \in C(\partial B_R)$. Определим функцию $u : \bar{B}_R \to \mathbb{R}$

$$u(x) \;:=\; \begin{cases} \int\limits_{\partial B_R} K(x,y)\varphi(y)\, ds_y, & x \in B_R \\ \varphi(x), & x \in \partial B_R \end{cases}$$

Тогда $\quad u \in C(\bar{B}_R) \cap C^\infty(B_R) \quad$ и

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{в} \quad B_R \\ u|_{\partial B_R} = \varphi \end{cases}$$

1.6 Принцип максимума для гармонических функций

1. **Гармонические функции**

   Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открыто. Напомним (см. §1.1), что функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *гармонической* в области Ω, если

   $$u \in C^2(\Omega) \quad \text{и} \quad \Delta u \ = \ 0 \quad \text{в} \quad \Omega$$

2. **Свойство среднего**

   Определение. Будем говорить, что функция $u \in C(\Omega)$ обладает *свойством среднего* в области Ω, если

   $$\forall\ B_R(x) \Subset \Omega \qquad u(x) = \fint\limits_{B_R(x)} u(y)\ ds_y$$

   Теорема. Функция $u \in C(\Omega)$ обладает свойством среднего в области Ω тогда и только тогда, когда

   $$\forall\ B_R(x) \Subset \Omega \qquad u(x) = \fint\limits_{S_R(x)} u(y)\ ds_y$$

   Здесь мы обозначили $S_R(x) := \partial B_R(x)$,

   $$\fint\limits_{S_R(x)} u(y)\ ds_y \ := \ \frac{1}{|S_R|} \int\limits_{S_R(x)} u(y)\ ds_y, \qquad \fint\limits_{B_R(x)} u(y)\ dy \ := \ \frac{1}{|B_R|} \int\limits_{B_R(x)} u(y)\ dy$$

3. **Теорема о среднем**

   Теорема. Если u гармоническая в Ω, то u обладает свойством среднего в Ω.

4. **Сильный принцип максимума**

   Теорема. Пусть Ω открыто и связно и $u \in C(\Omega)$ обладает свойством среднего в Ω. Тогда если существует $x_0 \in \Omega$, такая что

   $$u(x) \ \le \ u(x_0), \qquad \forall\ x \in \Omega,$$

   то $u \equiv const$ в Ω.

5. **Слабый принцип максимума**

   Теорема. Пусть Ω ограничена и $u \in C(\bar{\Omega})$ обладает свойством среднего в Ω. Тогда

   $$\forall\ x \in \bar{\Omega} \qquad \inf_{\partial\Omega} u \ \le \ u(x) \ \le \ \sup_{\partial\Omega} u$$

6. **Теорема сравнения**

   Теорема. Пусть Ω ограничена и $u, v \in C(\bar{\Omega})$ обладают свойством среднего в Ω. Тогда

   $$u|_{\partial\Omega} \ \le \ v|_{\partial\Omega} \qquad \Longrightarrow \qquad u \ \le \ v \quad \text{в} \quad \Omega$$

7. **Теорема единственности для классических решений задачи Дирихле**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограничена и $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Предположим, что u_1, $u_2 \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ — два классических решения задачи

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{$\mathcal{D}$}$$

Тогда $u_1 \equiv u_2$ в Ω.

1.7 Свойства гармонических функций

1. **Неравенство Харнака**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открыто, u — гармоническая в Ω, $u \geq 0$ в Ω. Тогда

   $$\forall\ B_{4R}(x_0) \Subset \Omega \qquad \sup_{B_R(x_0)} u \ \leq\ 3^n \inf_{B_R(x_0)} u$$

   Следствие. Пусть $\Omega' \Subset \Omega$ и Ω' — связна. Тогда существует $c(\Omega, \Omega') > 0$, такая что для любой $u \in C^2(\Omega)$ — гармонической в Ω и $u \geq 0$ в Ω, справедлива оценка

   $$\sup_{\Omega'} u \ \leq\ c(\Omega, \Omega')\ \inf_{\Omega'} u$$

2. **Обратная теорема о среднем и гладкость гармонических функций**

   Теорема. Пусть функция $u \in C(\Omega)$ обладает свойством среднего в Ω. Тогда

   $$u \in C^\infty(\Omega), \qquad \Delta u \ =\ 0 \quad \text{в} \quad \Omega$$

3. **Локальная оценка производных гармонической функции**

   Теорема. Пусть u — гармоническая в $\Omega \quad \Longrightarrow \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_+ \quad \exists\ C(n, \alpha) > 0$:

   $$\forall\ B_{2R}(x_0) \Subset \Omega, \qquad \sup_{x \in B_R(x_0)} |D^\alpha u(x)| \ \leq\ \frac{C}{R^{n+|\alpha|}} \int\limits_{B_{2R}(x_0)} |u(x)|\ dx$$

4. **Теорема Лиувилля**

   Теорема. Пусть u — гармоническая в $\mathbb{R}^n$. Тогда

   1) если $u \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, то $u = const$
   2) если существуют $C \geq 0$ и $\nu \geq 0$, такие что

   $$|u(x)| \ \leq\ C(1 + |x|^\nu), \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$$

   то u — полином степени не выше $[\nu]$ (целая часть числа ν).

5. **Теорема об устранимой особенности**

   Теорема. Пусть $B_R \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\bar{B}_R \setminus \{0\})$, $\Delta u = 0$ в $B_R \setminus \{0\}$. Предположим, что

   $$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{1}{|\ln r|} \sup\limits_{x \in \partial B_r} |u(x)|, & \text{если} \quad n = 2 \\ r^{n-2} \sup\limits_{x \in \partial B_r} |u(x)|, & \text{если} \quad n \geq 3 \end{array}\right\} \ \to \quad 0 \quad \text{при} \quad r \to 0.$$

   Тогда существует функция $v \in C^\infty(B_R) \cap C(\bar{B}_R)$, такая что $\Delta v = 0$ в B_R и

   $$v|_{B_R \setminus \{0\}} \ =\ u \quad \text{в} \quad B_R \setminus \{0\}.$$

2 Сферические функции

2.1 Оператор Лапласа в сферических координатах

1. **Инвариантность оператора Лапласа относительно вращений**

   Теорема. Пусть $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $QQ^T = Q^TQ = \mathbb{I}$. Определим функцию
   $$v(x) \;=\; u(Qx), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$
   Тогда
   $$\Delta v(x) \;=\; \Delta u(Qx), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

2. **Лапласиан в полярных координатах**

   Теорема. Пусть (r,φ) — полярные координаты на $\mathbb{R}^2$
   $$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi \\ x_2 = r\sin\varphi \end{cases}$$
   Тогда если $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $u(x) = \tilde{u}(r,\varphi)$, то
   $$\Delta u(x)\big|_{x=\Phi(r,\varphi)} \;=\; \tilde{u}_{,rr} + \frac{\tilde{u}_{,r}}{r} + \frac{\tilde{u}_{,\varphi\varphi}}{r^2}$$
   или
   $$\Delta u(x)\big|_{x=\Phi(r,\varphi)} \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\varphi^2}$$

3. **Лапласиан в сферических координатах**

   Теорема. Пусть (r,φ,θ) — сферические координаты на $\mathbb{R}^3$
   $$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi\sin\theta \\ x_2 = r\sin\varphi\sin\theta \\ x_3 = r\cos\theta \end{cases}$$
   Тогда если $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ и $u(x) = \tilde{u}(r,\varphi,\theta)$, то
   $$\Delta u(x)\big|_{x=\Phi(r,\varphi,z)} \;=\; \tilde{u}_{,rr} + 2\,\frac{\tilde{u}_{,r}}{r} + \frac{\tilde{u}_{,\varphi\varphi}}{r^2\sin^2\theta} + \frac{\tilde{u}_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{u_{,\theta}}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
   или
   $$\Delta u(x)\big|_{x=\Phi(r,\varphi,z)} \;=\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\varphi^2}\right]$$

4. **Оператор Бельтрами–Лапласа на сфере**

   Определение. Пусть $S := \{\; x \in \mathbb{R}^3 : \; |x| = 1 \;\}$ и $u \in C^2(S)$, $u(x) = \tilde{u}(\varphi,\theta)$. Тогда дифференциальный оператор, определенный по формуле
   $$\Delta_S\, u(x)\big|_{x=\Phi(\varphi,\theta)} \;=\; \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\varphi^2}$$
   называется *оператором Бельтрами–Лапласа* на сфере.

5. **Свойства оператора Бельтрами–Лапласа**

Теорема. Для любых U, $V \in C^2(S)$ выполняются соотношения

$$-(\Delta_S U, U)_{L_2(S)} \ \geq \ 0,$$

$$(\Delta_S U, V)_{L_2(S)} \ = \ (U, \Delta_S V)_{L_2(S)},$$

где

$$(U, V)_{L_2(S)} \ := \ \int\limits_S U(x)\overline{V(x)}\, ds_x$$

— скалярное произведение в $L_2(S)$. Здесь и всюду далее $S \ := \ \{\, x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1 \,\}$.

Следствие. Собственные числа оператора $-\Delta_S$ вещественны и неотрицательны.

6. **Сферические функции**

Определение. *Сферическими функциями* называются гладкие собственные функции оператора Бельтрами–Лапласа на сфере

$$Y \in C^\infty(S), \quad Y \not\equiv 0: \quad \exists\, \mu \geq 0: \quad -\Delta_S Y = \mu Y \quad \text{на} \quad S.$$

где

$$\Delta_S Y \ := \ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}, \qquad Y = Y(\varphi, \theta)$$

2.2 Однородные гармонические полиномы и сферические функции

1. **Пространство однородных гармонических полиномов**

   Определение. Обозначим

$$\mathscr{P}_l \ := \ \Big\{ \text{однородные полиномы степени } l \text{ в } \mathbb{R}^3 \Big\}$$

$$\mathscr{H}_l \ := \ \Big\{ \ u \in \mathscr{P}_l : \ \Delta u = 0 \ \text{ в } \ \mathbb{R}^3 \ \Big\}$$

   Линейное пространство $\mathscr{H}_l$ называется пространством *однородных гармонических полиномов* степени l.

2. **Сужение однородного гармонического полинома на сферу является сферической функцией**

   Теорема. Пусть $u \in \mathscr{H}_l$. Определим функцию $Y \in C^\infty(S)$ как сужение гармонического полинома u на сферу S:

$$Y \ := \ u|_S$$

   Тогда

$$-\Delta_S Y \ = \ l(l+1)\,Y \quad \text{на} \quad S$$

3. **Собственные числа и собственные функции оператора Бельтрами–Лапласа на сфере**

   Теорема. Собственные числа $\mu \in \mathbb{R}$ задачи

$$-\Delta_S Y \ = \ \mu Y \quad \text{на} \quad S$$

   имеют вид

$$\mu \ = \ l(l+1), \qquad l = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

   а всякая сферическая функция $Y \in C^\infty(S)$, соответствующаяя собственному числу $l(l+1)$, является сужением на S некоторого однородного гармонического полинома степени l:

$$\exists \ u \in \mathscr{H}_l : \qquad u|_S = Y \quad \text{на} \quad S$$

4. **Подпространство сферических гармоник порядка l**

   Определение. *Подпространством сферических гармоник* порядка l называется сужние множества однородных гармонических полиномов порядка l на единичную сферу:

$$\mathcal{H}_l \ := \ \mathscr{H}_l\big|_S \ \equiv \ \{ \ Y \in C^\infty(S) \mid \exists \ u \in \mathscr{H}_l : \ Y = u|_S \ \}$$

5. **Свойства подпространств сферических гармоник**

   Теорема. Пусть $\mathcal{H}_l \subset L_2(S)$ — п/пр–во сферических гармоник порядка l. Тогда

   1) $\mathcal{H}_l$ — собственное п/пр–во оп–ра $-\Delta_S$, отвечающее собств. числу $l(l+1)$
   2) $l \neq m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}_l \ \perp \ \mathcal{H}_m$ в $L_2(S)$

6. **Разложение пространства однородных полиномов**

Теорема.
$$\mathscr{P}_l \;=\; \mathscr{H}_l \;+\; |x|^2\, \mathscr{P}_{l-2}, \qquad \forall\; l \geq 2$$

7. **Размерность пространства однородных гармонических полиномов**

Теорема.
$$\dim \mathscr{H}_l = 2l + 1, \qquad \operatorname{div} \mathcal{H}_l = 2l + 1$$

8. **Сужение однородного полинома на сферу представимо в виде линейной комбинации сферических гармоник**

Теорема. Для любого $u \in \mathcal{P}_l$ существуют $\{Y_k\}_{k \leq l}$, $Y_k \in \mathcal{H}_k$, такие что
$$u(x) \;=\; \sum_{k \leq l} Y_k(x), \qquad \forall\; x \in S.$$

Более того,
$$\mathscr{P}_l|_S \;=\; \mathcal{H}_l \;+\; \mathcal{H}_{l-2} \;+\; \mathcal{H}_{l-4} \;+ \ldots$$

9. **Полнота сферических функций в $L_2(S)$**

Теорема. Сферические функции образуют в $L_2(S)$ полную систему:
$$L_2(S) \;=\; \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_l$$

2.3 Разделение переменных в сферических координатах

1. **Гармонические функции с переменными, разделяющимися в сферических координатах**

   Теорема. Пусть гармоническая в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ функция $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ в сферических координатах (r, φ, θ) представима в виде

   $$u(r, \varphi, \theta) \;=\; U(r)Y(\varphi, \theta).$$

   Тогда существует $l \in \mathbb{Z}_+$, такое что функция $U \in C^\infty((0, +\infty))$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

   $$r^2 U''(r) + 2rU'(r) - l(l+1)U(r) = 0 \qquad r \in (0, +\infty)$$

   а функция $Y \in C^\infty(S)$ является сферической:

   $$\Delta_S Y(\varphi, \theta) + l(l+1)\, Y(\varphi, \theta) \;=\; 0, \qquad \varphi \in (0, 2\pi), \quad \theta \in (0, \pi)$$

   Здесь $S := \{\; x \in \mathbb{R}^3 : \; |x| = 1 \;\}$ и Δ_S — оператор Бельтрами–Лапласа на S.

2. **Зависимость решения от** r

   Теорема. Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$ и функция $U \in C^\infty((0, +\infty))$ удовлетворяет ODE

   $$r^2 U''(r) + 2rU'(r) - l(l+1)U(r) = 0 \qquad r \in (0, +\infty)$$

   Тогда существуют постоянные A_l, $B_l \in \mathbb{R}$, такие что

   $$U(r) \;=\; A_l\, r^l \;+\; \frac{B_l}{r^{l+1}} \qquad r \in (0, +\infty)$$

3. **Шаровые функции**

   Определение. *Шаровыми функциями порядка* $l \in \mathbb{Z}_+$ называются гармонические в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ функции вида

   $$u(r, \varphi, \theta) \;=\; \Big(A_l\, r^l \;+\; \frac{B_l}{r^{l+1}}\Big)\, Y_l(\varphi, \theta),$$

   где A_l, $B_l \in \mathbb{R}$ и $Y_l \in C^\infty(S)$ — это некоторая сферическая функция, отвечающая собственному числу $\mu = l(l+1)$:

   $$-\Delta_S Y_l \;=\; l(l+1)\, Y_l \qquad \text{на} \quad S.$$

4. **Разделение переменных для оператора Бельтрами-Лапласа на сфере**

   Теорема. Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$ и предположим, что сферическая функция Y, отвечающая собственному числу $\mu = l(l+1)$ оператора $-\Delta_S$, имеет вид

   $$Y(\varphi, \theta) \;=\; V(\theta)W(\varphi)$$

   Тогда существует $\varkappa \in \mathbb{R}$, такое что функция W является решением уравнения

   $$W''(\varphi) \;+\; \varkappa W(\varphi) \;=\; 0, \qquad \varphi \in (0, 2\pi),$$

   а функция V удовлетворяет соотношению

   $$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\Big(\sin\theta \frac{dV}{d\theta}(\theta)\Big) \;+\; \Big(l(l+1) - \frac{\varkappa}{\sin^2\theta}\Big)V(\theta) \;=\; 0, \qquad \theta \in (0, \pi)$$

5. **Зависимость сферической функции от φ**

Теорема. Пусть $Y(\varphi, \theta) = V(\theta)W(\varphi)$ — сферическая функция, причем

$$W''(\varphi) + \varkappa W(\varphi) = 0, \qquad \varphi \in (0, 2\pi)$$

Тогда если $W \not\equiv 0$, то существуют $m \in \mathbb{Z}_+$ и C_m, $D_m \in \mathbb{R}$, такие что

$$\varkappa = m^2, \qquad W = W_m, \qquad W_m(\varphi) = C_m\, e^{im\varphi} + D_m\, e^{-im\varphi}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

6. **Зависимость сферической функции от θ**

Теорема. Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$ и пусть $Y(\varphi, \theta) = V(\theta)e^{im\varphi}$, $m \in \mathbb{Z}$ — сферическая функция, отвечающая собственному числу $\mu = l(l+1)$ оператора $-\Delta_S$. Тогда

$$V(\theta) = P(\cos\theta), \qquad \theta \in (0, \pi),$$

где $P(s)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}\Big((1-s^2)\dfrac{dP}{ds}(s)\Big) + \Big(l(l+1) - \dfrac{m^2}{1-s^2}\Big)P(s) = 0, \qquad s \in (-1, 1) \\ P(s) \ \text{ ограничена в окрестности } s = \pm 1 \end{cases}$$

Последнее уравнение называется *модифицированным уравнением Лежандра.*

2.4 Полиномы Лежандра

1. **Задача Штурма–Лиувилля для уравнения Лежандра**

   Теорема. Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля для *уравнения Лежандра*

   $$\begin{cases} -\dfrac{d}{ds}\Big((1-s^2)\dfrac{dP}{ds}(s)\Big) \;=\; \mu\, P(s), \qquad s\in(-1,1) \\ \qquad P(s) \;\text{ ограничена в окрестности } s=\pm 1 \end{cases} \tag{$*$}$$

   Тогда

   1) задача ($*$) имеет нетривиальные решения только счетном количестве значений параметра μ

   $$\mu=\mu_l, \qquad \mu_l = l(l+1), \qquad l=0,1,2,\ldots$$

   2) значению параметра $\mu_l = l(l+1)$ соответствует единственная с точностью до множителя ограниченная на $[-1,1]$ собственная функция $P_l(s)$ задачи ($*$)

   $$P_l(s) \;=\; \frac{1}{2^l\, l!}\,\frac{d^l}{ds^l}\big(s^2-1\big)^l, \qquad l=0,1,2,\ldots$$

   Функции $P_l(s)$ называются *полиномами Лежандра.*

2. **Ортогональность и полнота системы полиномов Лежандра**

   Теорема. Система полиномов Лежандра $\{P_l\}_{l=0}^{\infty}$ образует ортогональный базис в гильбертовом пространстве $L_2(-1,1)$. При этом

   $$\|P_l\|^2_{L_2(-1,1)} \;=\; \frac{2}{2l+1}$$

3. **Модифицированное уравнение Лежандра**

   Теорема. Пусть $P\in C^\infty((-1,1))$ — какое-то решение уравнения Лежандра

   $$\frac{d}{ds}\Big((1-s^2)\frac{dP}{ds}(s)\Big) \;+\mu\, P(s) \;=\; 0, \qquad s\in(-1,1)$$

   и пусть $m\in\mathbb{N}$. Обозначим

   $$\tilde P_m(s) \;=\; \big(1-s^2\big)^{\frac{m}{2}}\;\frac{d^m P}{ds^m}(s), \qquad s\in(-1,1)$$

   Тогда $\tilde P_m(s)$ является решением *модифицированного уравнения Лежандра*

   $$\frac{d}{ds}\Big((1-s^2)\frac{d\tilde P}{ds}(s)\Big) \;+\Big(\mu-\frac{m^2}{1-s^2}\Big)\,\tilde P(s) \;=\; 0, \qquad s\in(-1,1)$$

4. **Задача Штурма–Лиувилля для модифицированного уравнения Лежандра**

   Теорема. Пусть $m\in\mathbb{Z}_+$ фиксировано. Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля для *модифицированного уравнения Лежандра*

   $$\begin{cases} -\dfrac{d}{ds}\Big((1-s^2)\dfrac{dP}{ds}(s)\Big) \;+\dfrac{m^2}{1-s^2}\,P(s) \;=\; \mu\, P(s), \qquad s\in(-1,1) \\ \qquad P(s) \;\text{ ограничена в окрестности } s=\pm 1 \end{cases} \tag{$**$}$$

   Тогда

1) задача (**) имеет нетривиальные решения только счетном количестве значений параметра μ

$$\mu = \mu_l, \qquad \mu_l = l(l+1), \qquad l \geq |m|$$

2) каждому значению параметра $\mu_l = l(l+1)$, $l \geq |m|$, соответствует единственная с точностью до множителя ограниченная на $[-1,1]$ собственная функция $P_{lm}(s)$ задачи (**)

$$P_{lm}(s) \;=\; \left(1-s^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_l}{ds^m}(s), \qquad s \in (-1,1)$$

где $P_l(s)$ — полином Лежандра степени l. Функции $P_{lm}(s)$, $m = 0, 1, \ldots, l$, называются *присоединенными функциями Лежандра.*

5. **Ортогональность и полнота системы присоединенных функций Лежандра**

Теорема. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$. Система присоединенных полиномов Лежандра $\{P_{lm}\}_{l=m}^{\infty}$ образует ортогональный базис в гильбертовом пространстве $L_2(-1,1)$. При этом

$$\|P_{lm}\|^2_{L_2(-1,1)} \;=\; \frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

2.5 Ортогональный базис в L_2 на сфере

1. **Явный вид сферических функций Y_{lm}**

   Определение. *Сферической функцией* $Y_{lm}(\varphi,\theta)$ называется функция

   $$Y_{lm}(\varphi,\theta) \ := \ P_{lm}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}, \qquad l=0,1,2,\ldots, \quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm l$$

   где $P_{lm}(s)$ — присоединенная функция Лежандра.

   Замечание. При $m<0$ мы по определению полагаем $P_{lm} := P_{l|m|}$.

2. **Свойства сферических функций Y_{lm}**

   Теорема.

   1) Для любого $l=0,1,2,\ldots$ и любого $|m|\le l$

   $$-\Delta_S Y_{lm} \ = \ l(l+1)\, Y_{lm} \quad \text{на} \quad S$$

   2) Для любых $(l,m)\ne(l',m')$

   $$(Y_{lm}, Y_{l'm'})_{L_2(S)} \ = \ 0$$

   3) Для любого $l=0,1,2,\ldots$ и любого $|m|\le l$

   $$\|Y_{lm}\|^2_{L_2(S)} \ = \ \frac{4\pi}{2l+1}\cdot\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}$$

3. **Спектр оператора Бельтрами–Лапласа**

   Теорема. Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора Бельтрами–Лапласа на сфере:

   $$-\Delta_S Y \ = \ \mu Y \quad \text{на} \quad S \tag{$*$}$$

   Тогда

   1) задача $(*)$ имеет нетривиальные решения $Y\in C^\infty(S)$ только для счетного количества значений параметра μ:

   $$\mu=\mu_l, \qquad \mu_l = l(l+1), \qquad l=0,1,2,\ldots$$

   2) собственное значение $\mu_l = l(l+1)$, $l=0,1,2,\ldots$, имеет кратность $2l+1$ и ему соотвествует $2l+1$ линейно независимых собственных функций

   $$Y_{lm}(\varphi,\theta), \qquad m=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm l,$$

   образующих ортогональный базис пространства $\mathcal{H}_l$

   3) сферические функции $\{Y_{lm}\}_{l=0}^{\infty}{}_{m=-l}^{m=\ l}$ образуют ортогональный базис в $L_2(S)$.

4. **Разложение $L_2(S)$ в суммы ортогональных подпространств**

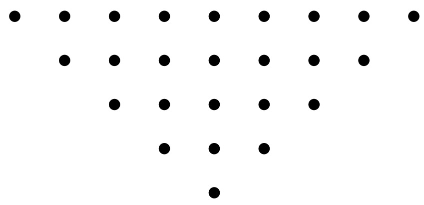
   Теорема. Напомним, что через $\mathcal{H}_l$ мы обозначили подпространство сферических гармоник порядка l. Обозначим также

   $$\mathcal{H}_{lm} \ := \ \mathrm{Lin}\{Y_{lm}\}, \qquad \dim\mathcal{H}_{lm} = 1$$

Тогда

$$\mathcal{H}_l = \bigoplus_{m=-l}^{l} \mathcal{H}_{lm}$$

$$L_2(S^2) = \bigoplus_{l=0}^{+\infty} \mathcal{H}_l = \bigoplus_{l=0}^{+\infty} \bigoplus_{m=-l}^{l} \mathcal{H}_{lm} = \bigoplus_{m=-\infty}^{+\infty} \bigoplus_{l=|m|}^{+\infty} \mathcal{H}_{lm}$$



3 Уравнение теплопроводности

3.1 Фундаментальное решение

1. **Наводящие соображения**

   Пусть
   $$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t u - \Delta u &=& 0 \qquad \text{в} \qquad \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) \\ u|_{t=0} &=& a \end{array}\right.$$
   Обозначим через $\hat{u}$ преобразоование Фурье функции u по переменной x:
   $$u(\xi,t) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}\, u(x,t)\, dx, \qquad \text{если} \qquad u(\cdot,t) \in L_1(\mathbb{R}^n)$$
   Получим для $\hat{u}$ алгебраическую систему
   $$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u} &=& 0 \qquad \text{в} \qquad \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) \\ \hat{u}|_{t=0} &=& \hat{a} \end{array}\right.$$
   Следовательно,
   $$\hat{u}(\xi,t) \;=\; e^{-|\xi|^2 t}\, \hat{a}(\xi), \qquad t>0$$
   откуда
   $$u(t) \;=\; \Gamma(t) * a,$$
   где
   $$\Gamma(x,t) \;:=\; (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x} e^{-|\xi|^2 t}, \qquad t>0.$$

2. **Обратное преобразование Фурье от функции** $e^{-|\xi|^2 t}$

   Теорема. Для любого $t>0$ функция $\xi \mapsto e^{-|\xi|^2 t}$ принадлежит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и
   $$\forall\ t>0, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n \qquad (\mathcal{F}^{-1} e^{-|\xi|^2 t})(x) \;=\; \frac{1}{(2t)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

3. **Фундаментальное решение уравнения теплопроводности**

   Определение. *Фундаментальным решением* для оператора теплопроводности в $\mathbb{R}^n$ называется функция $\Gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
   $$\Gamma(x,t) \;=\; \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n \\ 0, & t\le 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \end{array}\right.$$

4. **Свойства функции** $\Gamma(x,t)$

   Теорема. Пусть $\Gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — фундаментальное решение для оператора теплопроводности в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\Gamma \in C^\infty\big((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\}\big)$ и для любого $t>0$

   1) $\Gamma(\cdot,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

   2) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,t)\, dx \;=\; 1$

3) $\partial_t\Gamma(x,t) \;=\; \left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t}\right)\,\Gamma(x,t), \qquad \frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_j \partial x_k}(x,t) \;=\; \left(\frac{x_j x_k}{4t^2} - \frac{\delta_{jk}}{2t}\right)\,\Gamma(x,t)$

4) $\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(x,t) - \Delta\Gamma(x,t) = 0$

5) $\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta} \Gamma(x,t)\,dx \;\le\; C_n e^{-\frac{\delta^2}{8t}}$

5. **Почему $\Gamma(x,t)$ называют "фундаментальным решением"?**

Теорема. Регулярное распределение на $\mathbb{R}^{n+1}$ с плотностью $\Gamma \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t} - \Delta\Gamma \;=\; \delta_0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}),$$

то есть Γ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\forall\,\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \qquad -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x,t)\Big(\frac{\partial\eta}{\partial t}(x,t)+\Delta\eta(x,t)\Big)\,dxdt \;=\; \eta(0,0)$$

3.2 Задача Коши

1. **Тепловой потенциал**

   Определение. Тепловым потенциалом, соответствующим начальному данному $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, мы будем называть функцию

   $$u(x,t) \ := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t)\ a(y)\ dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

2. **Свойства теплового потенциала**

   Теорема. Обозначим через u тепловой потенциал, соответствующий начальному данному $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда

   1) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty))$ и $\partial_t^l D_x^\alpha u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t^l D_x^\alpha \Gamma(x-y,t) a(y)\ dy, \quad t > 0$

   2) $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ в $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$

   3) $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \Longrightarrow \quad \forall\ t > 0 \quad u(\cdot,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

   4) $a \in L_p(\mathbb{R}^n),\ 1 \le p \le +\infty \quad \Longrightarrow \quad \forall\ t > 0 \quad u(\cdot,t) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ и

   $$\sup_{t\in(0,+\infty)} \|u(\cdot,t)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \ \le\ \|a\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

3. **Классические решения задачи Коши**

   Теорема. Пусть $a \in C(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$, и пусть $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty))$ — тепловой потенциал, соответствующий начальному данному a. Тогда

   $$\forall\ x_0 \in \mathbb{R}^n \qquad \exists \lim_{(x,t)\to(x_0,+0)} u(x,t) = a(x_0).$$

   Другими словами,

   $$u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty)) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty))$$

   является классическим решением задачи Коши

   $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{в} \quad \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) \\ \qquad\qquad u|_{t=0} \ = \ a & \end{cases}$$

4. **Свойства решений задачи Коши**

   Теорема. Тепловой потенциал u, соответствующий начальному данному $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, обладает следующими свойствами:

   1) <u>мгновенное сглаживание</u>:

   $$a \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \qquad \Longrightarrow \qquad u(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \forall\ t > 0$$

2) бесконечная скорость распространения возмущений:

$$\left. \begin{array}{c} a \in L_\infty(\mathbb{R}^n), \quad a \not\equiv 0 \\ a \geq 0 \quad \text{п.в. в} \quad \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \qquad \Longrightarrow \qquad u(x,t) > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, t > 0$$

Другими словами, даже если в начальный момент мы подвели тепло только к малому участку среды в окрестности начала координат (то есть у неотрицательного начального данного носитель компактен), то в *любой* (сколь угодно малый) последующий момент времени *любая* точка среды (находящаяся сколь угодно далеко от начала координат) тоже начнет нагреваться. Это свойство означает *бесконечную скорость распространения возмущений.*

3) принцип максимума для задачи Коши:

$$a \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \qquad \Longrightarrow \qquad \forall\, t > 0 \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x,t)| \;\leq\; \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |a(x)|.$$

4) сохранение энергии:

$$a \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n) \qquad \Longrightarrow \qquad \forall\, t > 0 \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\; dx \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x)\; dx.$$

Если $u(x,t)$ — температура среды в точке x в момент времени t, то величина

$$W(t) \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\; dx$$

имеет физический смысл *полной внутренней энергии среды.*

5) стабилизация к нулю L_p–нормы:

$$a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)\cap L_1(\mathbb{R}^n) \quad \Longrightarrow \quad \forall\, p \in (1,+\infty) \quad \|u(\cdot,t)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty$$

3.3 Объемный тепловой потенциал

1. **Принцип Дюамеля**

   Пусть $f : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — гладкая функция с компактным носителем. *Принцип Дюамеля* (применимый широкому классу линейных эволюционных уравнений) гласит, что, если мы умем решать задачу Коши, то решение неоднородной задачи можно построить следующим образрм: для любого $\tau \in [0, +\infty)$ обозначим через w_τ решение следующей задачи Коши:

   $$\begin{cases} \partial_t w_\tau - \Delta w_\tau \ = \ 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \times (\tau, +\infty), \\ \quad w_\tau|_{t=\tau} \ = \ f|_{t=\tau} \end{cases}$$

   Предположим, что w_τ — гладкая, и построим функцию

   $$u(x,t) \ = \ \int\limits_0^t w_\tau(x,t)\ d\tau.$$

   Принцип Дюамеля утверждает, что построенная таким образом функция u является решением неоднородной задачи:

   $$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u \ = \ f \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ \quad u|_{t=0} \ = \ 0 \end{cases}$$

   Принцип Дюамеля подсказывает нам, как должно выглядеть решение неоднородной задачи:

   $$w_\tau(t) \ = \ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y, t-\tau)\ f(y,\tau)\ dy,$$

   $$\int\limits_0^t w_\tau(x,t)\ d\tau \ = \ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y, t-\tau)\ f(y,\tau)\ dy.$$

   Разумеется, принцип Дюамеля (применительно к PDE, которые мы в данном случае интерпретируем как ODE для функции $u(t) \in X$ со значениями в некотором банаховом пространстве X) не доказан нами строго. Мы привели его просто как эвистический способ "угадать" решение, но полученная при этом формула еще нуждается в строгом обосновании.

2. **Объемный тепловой потенциал**

   Определение. *Объемным тепловым потенциалом* с плотностью $f : \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ мы будем называть функцию

   $$u(x,t) \ := \ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y, t-\tau)\ f(y,\tau)\ dyd\tau, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

3. **Свойства свертки с ядром из L_1**

   Теорема. Пусть $T > 0$, $\Pi_T := \mathbb{R}^n \times (0, T)$, $K \in L_1(\Pi_T)$, $f \in L_\infty(\Pi_T)$. Обозначим

   $$w(x,t) \ := \ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t-\tau) f(y,\tau)\ dyd\tau, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0,T)$$

Тогда $w \in L_\infty(\Pi_T) \cap C(\bar{\Pi}_T)$ и справедлива оценка

$$\|w\|_{L_\infty(\Pi_T)} \ \le \ \|K\|_{L_1(\Pi_T)} \ \|f\|_{L_\infty(\Pi_T)}$$

4. **Непрерывность объемного теплового потенциала**

Теорема. Пусть $T > 0$, $\Pi_T := \mathbb{R}^n \times (0, T)$, $f \in L_\infty(\Pi_T)$, и пусть u — объемный тепловой потенциал с плотностью f. Тогда $u \in L_\infty(\Pi_T) \cap C(\bar{\Pi}_T)$ и

$$|u(x,t)| \ \le \ t \sup_{\mathbb{R}^n \times (0,t)} |f|, \qquad \forall\ (x,t) \in \Pi_T$$

5. **Уравнение теплопроводности с ненулевой правой частью**

Теорема. Пусть $T > 0$, $\Pi_T := \mathbb{R}^n \times (0, T)$ и $f \in C^{2,1}(\Pi_T)$ такова, что $\operatorname{supp} f$ — компакт, то есть $\operatorname{supp} f \subset \bar{B}_R \times [0, T]$ для некоторого $R > 0$. Здесь и далее

$$C^{2,1}(\Pi_T) \ := \ \left\{ \ v \in C(\Pi_T) : \ \exists \ \nabla v, \ \nabla^2 v, \ \frac{\partial v}{\partial t} \in C(\Pi_T) \ \right\}$$

Пусть u — объемный тепловой потенциал с плотностью f:

$$u(x,t) \ = \ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y, t-\tau) f(y,\tau)\, dy d\tau, \qquad (x,t) \in \Pi_T.$$

Тогда $u \in C^{2,1}(\Pi_T) \cap C(\bar{\Pi}_T)$ и u является классическим решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \ = \ f \quad \text{в} \quad \Pi_T \\ \quad u|_{t=0} \ = \ 0 \end{cases}$$

3.4 Принцип максимума

1. **Слабый принцип максимума для субрешений**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $T > 0$, $Q_T := \Omega \times (0,T)$. Предположим, что $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ удовлетворяет неравенству

$$\partial_t u - \Delta u \ \le\ 0 \quad \text{в} \quad Q_T.$$

   Тогда

$$\sup_{\bar{Q}_T} u \ =\ \sup_{\partial' Q_T} u$$

   где $\partial' Q_T$ — *параболическая граница* области Q_T:

$$\partial' Q_T \ :=\ (\partial\Omega \times [0,T]) \cup (\Omega \times \{t = 0\})$$

   и

$$C^{2,1}(Q_T) \ :=\ \Big\{ \ v \in C(Q_T) : \ \exists \ \nabla v, \nabla^2 v, \frac{\partial v}{\partial t} \in C(Q_T) \ \Big\}.$$

2. **Слабый принцип максимума для решений**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $T > 0$, $Q_T := \Omega \times (0,T)$. Предположим, что $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t u - \Delta u \ =\ 0 \quad \text{в} \quad Q_T.$$

   Тогда

$$\forall \ (x,t) \in \bar{Q}_T \qquad \inf_{\partial' Q_T} u \ \le\ u(x,t) \ \le\ \sup_{\partial' Q_T} u$$

3. **Теорема сравнения**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $T > 0$, $Q_T := \Omega \times (0,T)$, и предположим, что u_1, $u_2 \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ — два решения уравнения теплопроводности

$$\partial_t u - \Delta u \ =\ 0 \quad \text{в} \quad Q_T.$$

   Тогда

$$u_1|_{\partial' Q_T} \ \le\ u_2|_{\partial' Q_T} \qquad \Longrightarrow \qquad u_1 \ \le\ u_2 \quad \text{в} \quad Q_T.$$

3.5 Единственность решений

1. **Теорема единственности в классе ограниченных функций**

   Теорема. Пусть $T > 0$ — произвольное, $\Pi_T := \mathbb{R}^n \times (0, T)$, и предположим, что функция $u \in C^{2,1}(\Pi_T) \cap C(\bar{\Pi}_T)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Pi_T \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

   Предположим, что существуют положительная постоянная M, такая что

$$|u(x,t)| \le M, \qquad \forall\, (x,t) \in \Pi_T.$$

   Тогда $u \equiv 0$ в Π_T.

2. **Теорема единственности А.Н. Тихонова**

   Теорема. Пусть $T > 0$ — произвольное, $\Pi_T := \mathbb{R}^n \times (0, T)$, и предположим, что функция $u \in C^{2,1}(\Pi_T) \cap C(\bar{\Pi}_T)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Pi_T \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

   Предположим, что существуют положительные постоянные C и b, такие что

$$|u(x,t)| \le C\, e^{b|x|^2}, \qquad \forall\, (x,t) \in \Pi_T.$$

   Тогда $u \equiv 0$ в Π_T.

   Доказательство: без доказательства. □

3. **Классическое решение задачи Коши с ненулевой правой частью**

   Теорема. Пусть $T > 0$ — произвольное, $\Pi_T := \mathbb{R}^n \times (0, T)$, и предположим, что

$$a \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n), \qquad f \in C^{2,1}(\Pi_T): \quad \operatorname{supp} f \text{ — компакт.}$$

   Тогда в классе функций

$$u \in L_\infty(\Pi_T) \cap C^{2,1}(\Pi_T) \cap C(\bar{\Pi}_T),$$

   существует единственная функция u, являющаяся классическим решением задачи

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f \quad \text{в} \quad \Pi_T, \\ u|_{t=0} = a. \end{cases}$$

   Более того, функция u выражается через a и f по формуле

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t)a(y)dy + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dyd\tau, \qquad (x,t) \in \Pi_T.$$

4 Волновое уравнение

4.1 Одномерное волновое уравнение

1. **Общее решение одномерного однородного уравнения**

   Теорема. Пусть функция $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ удовлетворяет одномерному волновому уравнению

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R} \times (0, +\infty)$$

   Тогда существуют функции F_1, $F_2 \in C^2(\mathbb{R})$, такие что

   $$u(x,t) \;=\; F_1(x - at) \;+\; F_2(x + at)$$

2. **Задача Коши. Формула Даламбера**

   Теорема. Пусть $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Пусть функция $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ задана *формулой Даламбера*

   $$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\Big(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\Big) \;+\; \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)\; ds.$$

   Тогда $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ и u удовлетворяет соотношениям

   $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi \end{cases}$$

3. **Принцип Дюамеля (напоминание)**

   Теорема. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$. Для любого $\tau \in [0, +\infty)$ обозначим через $w_\tau \in C^1(\mathbb{R} \times [\tau, +\infty))$ решение следующей задачи Коши:

   $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w_\tau}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 w_\tau}{\partial x^2} \;=\; 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R} \times (\tau, +\infty) \\ w_\tau|_{t=\tau} = 0, \qquad \dfrac{\partial w_\tau}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = f|_{t=\tau} \end{cases}$$

   Обозначим $w(x,t,\tau) := w_\tau(x,t)$ и построим функцию

   $$u(x,t) \;=\; \int\limits_0^t w(x,t,\tau)\; d\tau, \qquad t > 0.$$

   Тогда $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ и u является решением неоднородной задачи:

   $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; f \quad \text{в} \quad \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u|_{t=0} = 0, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

   Замечание. Принцип Дюамеля подсказывает нам, как должно выглядеть решение неоднородной задачи.

4. **Задача с ненулевой правой частью**

Теорема. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$. Пусть функция $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ задана формулой

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \, d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\; dy.$$

Тогда $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ и u удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; f \quad \text{в} \quad \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u|_{t=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

5. **Симметрии решений, заданных формулой Даламбера**

Теорема. Пусть $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, и пусть

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\Big(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\Big) \;+\; \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)\; ds.$$

Тогда

1) если φ — нечетная, ψ — нечетная, то $\forall\, t > 0$ $u(\cdot, t)$ — нечетная
2) если φ — четная, ψ — четная, то $\forall\, t > 0$ $u(\cdot, t)$ — четная

Напомним, что функция φ называется *нечетной*, если $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, и, соответственно, *четной*, если $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

6. **Одномерное уравненеие на полуоси. Метод отражения**

Теорема. Обозначим $\mathbb{R}_+ := \{\, x \in \mathbb{R} : x > 0 \,\}$ и пусть $\varphi \in C^2(\bar{\mathbb{R}}_+)$ и $\psi \in C^1(\bar{\mathbb{R}}_+)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = 0, \qquad \psi(0) = 0$$

Пусть функция $u : \bar{\mathbb{R}}_+ \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ задана формулой

$$u(x,t) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{2}\Big(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\Big) \;+\; \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)\; ds, & at \le x \\ \dfrac{1}{2}\Big(\varphi(at+x) \;-\; \varphi(at-x)\Big) \;+\; \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_{at-x}^{at+x} \psi(s)\; ds, & at > x \end{cases}$$

Тогда $u \in C^2(\bar{\mathbb{R}}_+ \times [0, +\infty))$ и u является решением волнового уравнения на полуоси с условием Дирихле в точке $x = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}_+ \times (0, +\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi, \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi \\ u|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

Замечание. Решение задачи на полуоси с краевым условием $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ получается из начальных данных, полученный *четным* отражением φ и ψ.

4.2 Задача Коши в $\mathbb{R}^3$

1. **Сферические средние**

Определение. Пусть $u \in C(\mathbb{R}^n)$, $r > 0$ и $x \in \mathbb{R}$. Определим *сферические средние* функции u по формуле

$$U(x,r) \ := \ \frac{1}{|S_r|} \int\limits_{S_r(x)} u(y)\ ds_y \ \equiv \ \fint\limits_{S_r(x)} u(y)\ ds_y$$

где $S_r(x) := \partial B_r(x)$. Заметим, что

$$U(x,r) \ = \ \frac{1}{|S_r|} \int\limits_{S_r} u(x+y)\ ds_y \ = \ \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_1} u(x+rz)\ ds_z$$

2. **Свойства сферических средних**

Теорема. Пусть $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ и $U(x,r)$ — сферические средние функции u. Тогда

1) $U \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$

2) $U_{,r}(x,r) = \frac{r}{n} \fint\limits_{B_r(x)} \Delta u(y)\, dy = \frac{1}{|S_r|} \int\limits_{B_r(x)} \Delta u(y)\, dy$

3) $U_{,rr}(x,r) + \frac{n-1}{r}\, U_{,r}(x,r) = \fint\limits_{S_r(x)} \Delta u(y)\ ds_y$ (*формула Дарбу*)

4) $\lim\limits_{r\to+0} U(x,r) \ = \ u(x)$

5) $\lim\limits_{r\to+0} U_{,r}(x,r) \ = \ 0$

6) $\lim\limits_{r\to+0} U_{,rr}(x,r) \ = \ \frac{1}{n}\Delta u(x)$

7) $U \in C^2(\mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{R}}_+)$

3. **Сведение волнового уравнения к уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу для сферических средних**

Теорема. Пусть $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u \ = \ 0 \qquad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$$

Обозначим через $U(x,r,t)$ сферические средние $u(x,t)$:

$$U(x,r,t) \ := \ \frac{1}{|S_r|} \int\limits_{S_r(x)} u(y,t)\ dS_y, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Тогда $U \in C^2(\mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{R}}_+ \times [0,+\infty))$ для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ функция $(r,t) \mapsto U(x,r,t)$ удовлетворяет *уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу*

$$U_{,tt} - U_{,rr} - \frac{n-1}{r}\ U_{,r} \ = \ 0 \qquad \text{в} \quad \mathbb{R}_+ \times (0,+\infty)$$

4. **Специфика трехмерного случая (вообще говоря, любых нечетных размерностей)**

Теорема. Пусть $n = 3$. Обозначим

$$V(x,r,t) \;:=\; r\,U(x,r,t)$$

Тогда

$$U_{,rr} + \frac{2}{r}\,U_{,r} \;=\; \frac{1}{r}\,V_{,rr}$$

5. **Сведение волнового уравнения к одномерному уравнению для сферических средних**

Теорема. Пусть $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, и пусть функция $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,+\infty))$ является решением задачи Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u \;=\; 0 \qquad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty) \\ u\big|_{t=0} = \varphi, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi \end{cases}$$

Обозначим

$$V(x,r,t) \;:=\; r \fint\limits_{S_r(x)} u(y,t)\; dS_y,$$

$$\Phi(x,r) \;:=\; r \fint\limits_{S_r(x)} \varphi(y)\; dS_y, \qquad \Psi(x,r) \;:=\; r \fint\limits_{S_r(x)} \psi(y)\; dS_y.$$

Тогда для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ функция V является решением начально краевой задачи для одномерного волнового уравнения на полуоси:

$$\begin{cases} V_{,tt} - V_{,rr} \;=\; 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}_+ \times (0,+\infty) \\ V\big|_{t=0} = \Phi, \qquad V_{,t}\big|_{t=0} = \Psi \\ V\big|_{r=0} = 0 \end{cases}$$

6. **Восстановление решения по его сферическим средним**

Теорема. Пусть выполнены все условия теоремы предыдущего пункта. Тогда

$$u(x,t) \;=\; \lim_{r\to+0} \frac{V(x,r,t)}{r},$$

и поскольку при $r < t$ для $V(x,r,t)$ имеет место формула

$$V(x,r,t) \;=\; \frac{1}{2}\Big(\Phi(x,t+r) \;-\; \Phi(x,t-r)\Big) \;+\; \frac{1}{2}\int\limits_{t-r}^{t+r} \Psi(x,s)\; ds,$$

мы получаем соотношение

$$u(x,t) \;=\; \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,t) \;+\; \Psi(x,t)$$

где

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{S_t(x)} \varphi(y)\; dS_y, \qquad \Psi(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{S_t(x)} \psi(y)\; dS_y.$$

7. **Формула Кирхгофа**

Теорема. Пусть $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Определим $u : \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ по формуле:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S_{at}(x)} \varphi(y)\ dS_y \Big) \ + \ \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S_{at}(x)} \psi(y)\ dS_y$$

Тогда $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$ и функция u удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \ = \ 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty) \\ \quad u|_{t=0} = \varphi, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi \end{cases}$$

4.3 Запаздывающие потенциалы

1. **Принцип Дюамеля**

Теорема. Пусть $f \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,+\infty))$. Для любого $\tau \in [0,+\infty)$ обозначим через $w_\tau \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [\tau,+\infty))$ решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w_\tau}{\partial t^2} - a^2 \Delta w_\tau \ = \ 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \times (\tau,+\infty), \\ w_\tau|_{t=\tau} = 0, \qquad \dfrac{\partial w_\tau}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = f\big|_{t=\tau}. \end{cases}$$

Далее, построим функцию

$$u(x,t) \ = \ \int\limits_0^t w_\tau(x,t)\ d\tau.$$

Тогда $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,+\infty))$ и u удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \ = \ f \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty) \\ u|_{t=0} = 0, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

2. **Запаздывающий потенциал**

Теорема. Пусть $f \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,+\infty))$. Обозначим через $u : \mathbb{R}^3 \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *запаздывающий потенциал* с плотностью f:

$$u(x,t) \ = \ \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{B_{at}(x)} \frac{f\Big(y\,,\,t - \frac{|x-y|}{a}\Big)}{|x-y|}\ dy$$

Тогда $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,+\infty))$ и u удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \ = \ f \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty), \\ u|_{t=0} = 0, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

4.4 Единственность решений

1. **Классические решения волнового уравнения**

   Определение. Пусть $n \geq 1$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$. Тогда имеет смысл *классическая постановка* задачи Коши для волнового уравнения: найти функцию $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$, такую что

   $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \; = \; f \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \times (0,+\infty), \\ u|_{t=0} = \varphi, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi. \end{cases} \tag{$*$}$$

   Решения задачи $(*)$ из класса $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$, мы будем называть *классическими.*

2. **Плотность энергии волнового поля**

   Теорема. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂D и пусть $u \in C^2(\bar{D})$. Тогда

   $$\int\limits_D \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u\Big)\frac{\partial u}{\partial t}\, dxdt \; = \int\limits_{\partial D} \left(\nu_t\, \mathcal{E}[u] - a^2 \nu_x \cdot \nabla u \frac{\partial u}{\partial t}\right) dS_{x,t}$$

   где $\nu = (\nu_x, \nu_t)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ — поле нормали к ∂D, $\nu_x \in \mathbb{R}^n$, $\nu_t \in \mathbb{R}$, и

   $$\mathcal{E}[u] \; := \; \frac{1}{2}\left(\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 + a^2 |\nabla u|^2\right) \quad — \quad \textit{плотность энергии скалярного поля } u$$

3. **Энергетическое неравенство**

   Теорема. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$, $R > 0$ и обозначим через $D \subset \mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ усеченный конус с основаниями $B_{R+at_0}(x_0) \times \{t = 0\}$ и $B_R(x_0) \times \{t = t_0\}$:

   $$D \; := \; \Big\{ \; (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \; t \in (0,t_0), \; |x - x_0| < a(t_0 - t) + R \; \Big\}$$

   Пусть $u \in C^2(\bar{D})$ удовлетворяет волновому уравнению в D

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \; = \; 0 \quad \text{в} \quad D$$

   Тогда справедлива оценка

   $$\int\limits_{B_R(x_0)} \mathcal{E}(x,t_0)\, dx \; \leq \int\limits_{B_{R+at_0}(x_0)} \mathcal{E}(x,0)\, dx$$

   где $\mathcal{E} := \mathcal{E}[u]$ — плотность энергии поля u.

4. **Характеристический конус**

   Определение. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$. *Характеристическим конусом прошлого* с вершиной в точке $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ для волнового оператора $\Box_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$ называется множество точек

   $$\mathcal{K}^-_{x_0,t_0} \; := \; \Big\{ \; (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \; t \in (0,t_0), \; |x - x_0| < a(t_0 - t) \; \Big\}$$

Основанием характеристического конуса $\mathcal{K}^-_{x_0,t_0}$ мы будем называть множество

$$\Omega_{x_0,t_0} \ := \ \Big\{ \ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ t = 0, \ |x - x_0| < at_0 \ \Big\} \ = \ B_{at_0}(x_0) \times \{t = 0\}$$

Характеристическим конусом будущего называется множество точек

$$\mathcal{K}^+_{x_0,t_0} \ := \ \Big\{ \ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ t \in (t_0, +\infty), \ |x - x_0| < a(t - t_0) \ \Big\}$$

5. **Конечная область зависимости**

Теорема. Пусть $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$, и пусть u — классическое решение задачи Коши для волнового уравнения $(*)$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$, и обозначим через $\Omega_{x_0,t_0} = B_{at_0}(x_0) \times \{t = 0\}$ основание характеристического конуса $\mathcal{K}^-_{x_0,t_0}$ с вершиной в точке (x_0, t_0). Предположим, что

$$\varphi \equiv 0 \quad \text{в} \quad \Omega_{x_0,t_0}, \qquad \psi \equiv 0 \quad \text{в} \quad \Omega_{x_0,t_0}, \qquad f \equiv 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{K}^-_{x_0,t_0}$$

Тогда

$$u \equiv 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{K}^-_{x_0,t_0}$$

6. **Единственность классических решений**

Теорема. Для любых $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ классическое решение задачи Коши для волнового уравнения $(*)$, если существует, единственно.

4.5 Свойства решений волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$

1. **Существование и единственность классических решений**

   Теорема. Для любых $\varphi \in C^3(\mathbb{R})$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^3 \times [0,+\infty))$ существует и притом единственное классическое решение $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,+\infty))$ задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \ = \ f \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi \end{cases} \tag{$*$}$$

2. **Явная формула для решений**

   Теорема. Для любых $\varphi \in C^3(\mathbb{R})$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^3 \times [0,+\infty))$ классическое решение $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,+\infty))$ задачи $(*)$ выражается через функции φ, ψ и f по формуле Кирхгофа:

$$u(x,t) \ = \ \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S_{at}(x)} \varphi(y)\ dS_y \Big) \ + \ \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S_{at}(x)} \psi(y)\ dS_y \ +$$

$$+ \ \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{B_{at}(x)} \frac{f\Big(y\,,\, t - \frac{|x-y|}{a}\Big)}{|x-y|}\ dy$$

3. **Конечная скорость распространения возмущений**

   Теорема. Пусть φ, ψ, f удовлетворяют условиям, при которых существует классическое решение u задачи $(*)$. Предположим дополнительно, что существует $R > 0$, такое что

$$\operatorname{supp} \varphi \subset B_R, \qquad \operatorname{supp} \psi \subset B_R, \qquad \operatorname{supp} f \subset B_R \times [0,+\infty).$$

   Тогда

$$\forall\ t > 0 \qquad \operatorname{supp} u(\cdot,t) \subset B_{at+R}$$

   Следствие. Скорость распространения возмущений, описываемых волновым уравнением, конечна и равна a.

4. **Передний и задний фронты волнового поля**

   Теорема. Пусть $n = 3$, $f \equiv 0$ в $\mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$, $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ таковы, что для некоторого $R > 0$

$$\operatorname{supp} \varphi \subset B_R \qquad \text{и} \qquad \operatorname{supp} \psi \subset B_R$$

   Пусть u — классическое решение задачи $(*)$. Тогда

$$\forall\ t > 0 \quad \operatorname{supp} u(\cdot,t) \subset B_{at+R} \setminus B_{at-R} \quad \text{при} \quad at > R$$

   Замечания.

   1) Таким образом, можно утверждать, что при $n = 3$ решение однородного волнового уравнения, соответствующее начальным данным с компактным носителем, имеет как *передний*, так и *задний* волновые фронты.

2) Отметим также (см. §4.6), что в случае $n = 2$, решение, вообще говоря, имеет только передний волновой фронт, а заднего волнового фронта в двумерном случае у решения нет. В этом заключается качественное отличие свойств решений трехмерной и двумерной задач.

5. Отсутствие сглаживающего эффекта

Теорема. Пусть $f \equiv 0$. Тогда гладкость решения $u(\cdot,t)$ задачи Коши $(*)$ с начальными данными $u|_{t=0} = \varphi$ и $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi$ в момент времени $t > 0$ будет такая же, как и гладкость начального данного ψ (и на единицу ниже, чем у φ):

$$\varphi \in C^{k+1}(\mathbb{R}^3), \quad \psi \in C^k(\mathbb{R}^3) \qquad \Longrightarrow \qquad u(\cdot,t) \in C^k(\mathbb{R}^3)$$

Замечания.

1) Таким образом, при начальных данных ограниченной (не бесконечной) гладкости решение задачи Коши для волнового уравнения в последующие моменты времени тоже будет обладать ограниченной (не бесконечной) гладкостью. Условно говоря, решение $u(\cdot,t)$ при $t > 0$ “наследует” гладкость своих начальных данных.
2) В этом заключается принципиальное отличие волнового уравнения от уравнения теплопроводности. Напомним, что уравнение теплопроводности обладает свойством *моментального сглаживания*, то есть какова бы ни была гладкость начального данного, решение $u(\cdot,t)$ задачи Коши для уравненеия теплопроводности с таким начальным данным (если только оно существует) в любой момент времени $t > 0$ является бесконечно гладкой функцией.

4.6 Задача Коши в $\mathbb{R}^2$

Материал этого параграфа не был изложен на лекциях. Он не входит в теорзачет в декабре 2019 года и приводится здесь только в качестве справочной информации.

1. **Замена переменных в поверхностном интеграле**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область, и пусть поверхность $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ является графиком функции $\Phi \in C^1(\bar{\Omega})$:

$$\Sigma \;=\; \left\{ \; x \in \mathbb{R}^3 : \; (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}, \; x_3 = \Phi(x_1, x_2) \; \right\}$$

   Тогда для любой $g \in C(\Sigma)$

$$\int\limits_{\Sigma} g(x) \; ds_x \;=\; \int\limits_{\Omega} g(x_1, x_2, \Phi(x_1, x_2)) \, \sqrt{1 + |\Phi_{,1}(x_1, x_2)|^2 + |\Phi_{,2}(x_1, x_2)|^2} \; dx_1 dx_2$$

   Следствие. Пусть $S_R = \{ \; x \in \mathbb{R}^3 : |x| = R \; \}$, и предположим, что функция $g \in C(S_R)$ не зависит от переменной x_3. Тогда

$$\int\limits_{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2} g(x_1, x_2) \; dS_x \;=\; 2R \int\limits_{x_1^2 + x_2^2 < R^2} \frac{g(x_1, x_2)}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}} \; dx_1 dx_2$$

2. **Формула Пуассона. Метод спуска**

   Теорема. Пусть $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Определим $u : \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ по *формуле Пуассона*

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\; \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{B_{at}(x)} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - y|^2}} \; dy \; \Big) \; + \; \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{B_{at}(x)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - y|^2}} \; dy$$

   Тогда $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty))$ и u является решением задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \;=\; 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi, \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi \end{cases}$$

3. **Задача с ненулевой правой частью**

   Теорема. Пусть $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty))$. Определим функцию $u : \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ по формуле

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2\pi a^2} \int\limits_0^{at} d\tau \int\limits_{B_\tau(x)} \frac{f\left(y, t - \frac{\tau}{a}\right)}{\sqrt{\tau^2 - |x - y|^2}} \; dy \;=$$

$$=\; \frac{1}{2\pi a} \int\limits_0^{t} d\tau \int\limits_{B_{a(t-\tau)}(x)} \frac{f\,(y, \tau)}{\sqrt{a^2 (t - \tau)^2 - |x - y|^2}} \; dy$$

Тогда $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty))$ и u удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \;=\; f \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty), \\ \qquad u|_{t=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

4. **Свойства решений задачи Коши в** $\mathbb{R}^2$

1) Конечная скорость распространения возмущений.
2) Наличие у решения только переднего волнового фронта и отсутствие заднего волнового фронта.
3) Отсутствие сглаживающего эффекта.