Математическая теория уравнений Навье-Стокса

Т.Н. Шилкин (ПОМИ РАН)

www.pdmi.ras.ru/∼shilkin

— сайт, где будет размещаться вся информация, касающаяся нашего курса

Глава I. Сведения из функционального анализа

§1 Функции со значениями в банаховых пр–вах

1. Мотивировка

Пусть X — банахово. Мы хотим найти $u : \mathbb{R} \to X$, такую что

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = A(u(t)) \\ u(0) = a \end{cases} \qquad A : D(A) \subset X \to X$$

— (нелинейный) оператор

2. Непрерывные функции со значениями в банаховом пр–ве

Опр. $u : I \to X$ наз. **сильно непрерывной** в $t_0 \in I$, если

$$\|u(t) - u(t_0)\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad t \to t_0$$

$$C(I; X) := \{ u : I \to X,\ u \text{ — непрерывна на } I \}$$

Теорема. $I = [a,b] \quad \Longrightarrow \quad C([a,b];X)$ — банахово отн. нормы

$$\|u\|_{C([a,b];X)} := \sup_{t\in[a,b]} \|u(t)\|_X$$

и полиномы $p(t) = \sum\limits_{j=0}^{m} a_j t^j,\ a_j \in X$ плотны в $C([a,b];X)$

3. Дифференцируемость по Фреше

Опр. $u : I \to X$ наз. **дифференцируемой по Фреше** в точке t_0, если существует $v_{t_0} \in X$:

$$\lim_{t\to t_0} \left\| \frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} - v_{t_0} \right\|_X = 0$$

$u'(t_0) \equiv \frac{du}{dt}(t_0) := v_{t_0}$ наз. сильной производной (по Фреше)

$$C^1(I;X) := \{\ u \in C(I;X) :\ \exists\, u' \in C(I;X)\ \}$$

Теорема. $I = [a,b] \quad \Longrightarrow \quad C^1([a,b];X)$ — банахово отн. нормы

$$\|u\|_{C^1([a,b];X)} := \|u\|_{C([a,b];X)} + \|u'\|_{C([a,b];X)}$$

4. Сильная измеримость

Опр. $u : I \to X$ наз. **сильно измеримой** на I, если $\exists$ простые функции $g_k : I \to X$, такие что $g_k(t) \to u(t)$ для п.в. $t \in I$

• $g : I \to X$ наз. **простой**, если существуют разбиение $I = \cup_{k=1}^{N} I_k$, $I_j \cap I_k = \varnothing$, I_k — изм. по Лебегу, а также $\{g_i\}_{i=1}^{N} \subset X$, такие что

$$g(t) = \sum_{k=1}^{N} \chi_{I_k}(t)\ g_k, \qquad t \in I$$

Теорема (Петтис) Если X — сепарабельное, то $u : I \to X$ является сильно измеримой на I тогда и только тогда, когда

$\forall\ f \in X^*$ отображение $t \in I \mapsto \langle f, u(t) \rangle$ измеримо по Лебегу

• $u_k : I \to X$ сильно изм., $u_k(t) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u(t)$ в X при п.в. $t \in I \implies$ u сильно изм. на I

5. Интеграл Бохнера

Опр. Пусть $g(t) = \sum\limits_{k=1}^{N} g_k \chi_{I_k}(t)$, $g_k \in X$ — простая. Тогда

$$\int\limits_I g(t)\ dt \ \stackrel{\text{def}}{=}\ \sum_{k=1}^{N} g_k \mu(I_k)\ \in\ X \quad \text{— интеграл Бохнера от } g$$

$u : I \to X$ **суммируема** на I $\iff$ $\exists\ g_k : I \to X$ — простые:

$$\int\limits_I \|u - g_k\|_X\ dt\ \to\ 0 \tag{$*$}$$

- $\forall$ простых g_k, таких что ($*$), $\exists\ S \in X$, такой что

$$\Big\|\ S\ -\ \int\limits_I g_k(t)\, dt\ \Big\|_X\ \to\ 0$$

- $S \in X$ не зависит от выбора g_k

- S наз. **интегралом Бохнера** и обозначается $\int\limits_I u(t)\, dt\ :=\ S$

Теорема (Бохнер). $u : I \to X$ суммируема на I тогда и только тогда, когда u сильно измерима на I и $\|u(\cdot)\|_X \in L_1(I)$. При этом

$$\Big\| \int\limits_I u(t)\,dt \Big\|_X \le \int\limits_I \|u(t)\|_X \, dt$$

6. Теорема о линейном преобразовании интеграла Бохнера

Теорема. Если $u : I \to X$ суммируема на I, то

$$\forall\ f \in X^* \qquad \Big\langle\ f\ ,\ \int\limits_I u(t)\,dt\ \Big\rangle\ =\ \int\limits_I \langle f, u(t)\rangle\ dt$$

Если $u : I \to X^*$ суммируема на I, то

$$\forall\ x \in X \qquad \Big\langle\ x\ ,\ \int\limits_I u(t)\,dt\ \Big\rangle\ =\ \int\limits_I \langle x, u(t)\rangle\ dt$$

Если $T \in \mathcal{B}(X;Y)$ и $u : I \to X$ суммир. на I, то Tu суммир. на I и

$$\int\limits_I Tu(t)\ dt\ =\ T\int\limits_I u(t)\,dt$$

7. Пространства $L_p(I;X)$, $p \in [1,+\infty)$

Опр. $L_p(I;X) \ := \ \{ \ u : I \to X$ измерима на I и $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L_p(I) \ \}$

$$\|u\|_{L_p(I;X)} \ := \ \left(\int\limits_I \ \|u(t)\|_X^p \ dt \ \right)^{1/p}$$

- $L_p(I;X)$ — банахово
- простые функции плотны в $L_p(I;X)$
- X рефлекс. и сепараб., $p \in (1,+\infty) \ \Longrightarrow \ (L_p(I;X))^* \ \simeq \ L_{p'}(I;X^*)$
- **(Непрерывность в среднем)**

$$\lim_{h\to 0} \|T_h u - u\|_{L_p(I;X)} \ = \ 0, \qquad T_h u(x) := u(x+h)$$

- **(Неравенство Гельдера)** $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $u \in L_p(I;X)$, $v \in L_{p'}(I;X^*)$

$$\left| \ \int\limits_I \langle v(t), u(t) \rangle \ dt \ \right| \ \le \ \|u\|_{L_p(I;X)} \|v\|_{L_{p'}(I;X^*)}$$

- если $X \hookrightarrow Z$, то $L_p(I;X) \hookrightarrow L_p(I;Z)$

8. Пространство $L_\infty(I;X)$

Опр. $L_\infty(I;X) := \{\ u : I \to X$ измерима на I и $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L_\infty(I)\ \}$

$$\|u\|_{L_\infty(I;X)} \ := \ \operatorname*{esssup}_{t\in I} \|u(t)\|_X$$

- $L_\infty(I;X)$ — банахово
- простые функции плотны в $L_\infty(I;X)$
- если X рефлексивно и сепарабельно, то $(L_1(I;X))^* \ \simeq \ L_\infty(I;X^*)$

9. Гильбертово пространство $L_2(I;H)$

Теорема. Если H — гильбертово, то $L_2(I;H)$ гильбертово отн. скалярного произведения

$$(u,v)_{L_2(I;H)} \ := \ \int_I (u(t),v(t))_H \ dt, \qquad u,\ v \in L_2(I;H)$$

10. Усреднение банаховозначных функций

Теорема. Пусть

$$\omega_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon}\omega\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad \omega \in C_0^\infty(-1,1), \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega(t)\,dt = 1$$

Определим усреднение $u \in L_p(I;X)$, $p \in [1,+\infty]$

$$u_\varepsilon(t) \;:=\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(t-s)u(s)\;ds, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{(интеграл Бохнера)}$$

Тогда

- $\varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow \quad u_\varepsilon \in C^\infty(I;X)$
- $p \in [1,+\infty] \quad \Longrightarrow \quad \|u_\varepsilon\|_{L_p(I;X)} \le \|u\|_{L_p(I;X)}$
- $p \in [1,+\infty) \quad \Longrightarrow \quad \|u_\varepsilon - u\|_{L_p(I;X)} \to 0$ при $\varepsilon \to +0$
- $p \in [1,+\infty) \quad \Longrightarrow \quad C^\infty(I;X)$ плотно в $L_p(I;X)$

§2 Распределения со значениями в банах. пр–ве

1. Обобщенные ф–ции со значениями в банаховых пр–вах

Опр. Обозначим через $\mathcal{D}'(I;X)$ мн–во всех лин. отображений $T : C_0^\infty(I) \to X$, которые непрерывны в следующем смысле:

$$\forall\ \varphi_m,\ \varphi \in C_0^\infty(I) \quad \varphi_m \rightrightarrows \varphi \text{ в } \mathcal{D}(I) \quad \Longrightarrow \quad T(\varphi_m) \rightharpoonup T(\varphi) \text{ в } X$$

- $T \in \mathcal{D}'(I, X)$ наз. **распределением** на I со значенниями в X
- $T_m \to T$ в $\mathcal{D}'(I;X) \iff \forall\ f \in X^*,\ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(I)\ \langle T_m(\varphi), f\rangle \to \langle T(\varphi), f\rangle$

2. Регулярные распределения

Опр. Пусть $u \in L_{1,loc}(I;X)$. Обозначим $T_u : C_0^\infty(I) \to X$

$$T_u(\varphi) = \int\limits_I u(t)\varphi(t)\ dt \in X, \qquad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(I),$$

- $T_u \in \mathcal{D}'(I;X)$ наз. **регулярным распределением** с плотн. u
- отображение $u \in L_{1,loc}(I;X) \mapsto T_u \in \mathcal{D}'(I;X)$ инъективно

3. Дифференцирование распределений

Опр. Пусть $T \in \mathcal{D}'(I;X)$ и $\alpha \in \mathbb{N}$. Определим отображение

$$S(\varphi) \ := \ (-1)^\alpha \, T(D^\alpha \varphi) \quad \text{в} \quad X, \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(I)$$

$D^\alpha T := S \in \mathcal{D}'(I;X)$ наз. **производной** порядка α распределения T

4. Пространства Соболева банаховозначных функций

Опр. Пусть $1 \le p \le +\infty$. Обозначим

$$W_p^1(I;X) \ := \ \left\{ \ u \in L_p(I;X) \ | \ \exists \text{ об. производная } \ \frac{du}{dt} \in L_p(I;X) \ \right\}$$

$$\|u\|_{W_p^1(I;X)} \ = \ \|u\|_{L_p(I;X)} \ + \ \|u'\|_{L_p(I;X)}$$

- $W_p^1(I;X)$ — банахово
- $p \in [1,+\infty) \quad \Longrightarrow \quad C^\infty(\bar{I};X) \cap W_p^1(I;X)$ плотно в $W_p^1(I;X)$

Д–во: 1) "Растянем" интервал $I \mapsto I_\lambda$ и функцию $u \mapsto u_\lambda$. 2) Усредним $u_\lambda \mapsto (u_\lambda)_\varepsilon$ 3) Поскольку $I \Subset I_\lambda$, получаем $(u_\lambda)_\varepsilon \to u_\lambda$ в $W_p^1(I;X)$.

5. Формула Ньютона–Лейбница

Теорема. Пусть $p \in [1, +\infty)$, $u \in W_p^1(I; X)$. Тогда

$$u(t) = u(s) + \int_s^t \frac{du}{d\tau}(\tau)\, d\tau, \quad \forall\ s,\ t \in I$$

Д–во. Пусть $u_m \in C^\infty(I; X)$, $u_m \to u$ в $L_p(I; X)$, $u'_m \to u'$ в $L_p(I; X)$

$$u_m(t) = u_m(s) + \int_s^t u'_m(\tau)\, d\tau, \qquad \forall\ s,\ t \in I$$

Выберем $u_{m_k}(t) \to u(t)$ для любого $t \in I \setminus \Sigma$ и $|\Sigma| = 0$. Тогда

$$u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau)\, d\tau, \qquad \forall\ t, s \in I \setminus \Sigma$$

Так как $t \mapsto \int_s^t u'(\tau)\, d\tau$ непрерывно, получаем $t \mapsto u(t)$ непрерывно и формула Н-Л справедлива для любых s, $t \in I$. $\square$

6. Вложение $W_1^1(I;X)$ в $C(\bar{I};X)$

Теорема. Пусть $\bar{I} = [a,b]$ — компакт и $u \in W_1^1(I;X)$. Тогда

$$u \in C(\bar{I};X)$$

и существует постоянная $c = c(a,b) > 0$, такая что

$$\|u\|_{C([a,b];X)} \ \leq \ c \ \|u\|_{W_1^1(a,b;X)}$$

§3 Слабая производная по времени

1. Вложения сопряженных пространств

Теорема. Пусть X — банахово, H — гильбертово, $X \hookrightarrow H$

1) $X \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} H \quad \Longrightarrow \quad H^* \hookrightarrow X^*$

2) $X \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} H$, $\quad X$ — рефлексивно $\quad \Longrightarrow \quad H^* \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} X^*$

2. Функции, имеющие слабую производную по времени

Опр. $u \in L_p(I; X)$, $p \in [1, +\infty]$ имеет **слабую производную по времени**, если

$$\exists\ Z \text{ — банахово}: \quad X \hookrightarrow Z \quad \text{и} \quad \exists\ \frac{du}{dt} \in L_q(I; Z)$$

т.е. $\exists$ банахово пр–во Z, число $q \in [1, +\infty]$ и функция $v \in L_q(I; Z)$, такие что X непрерывно вкладывается в Z и

$$\int_I u(t)\varphi'(t)\, dt = -\int_I v(t)\varphi(t)\, dt \quad \text{в} \quad Z \qquad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(I)$$

3. Двойственность относительно гильбертова пространства

Опр. Пусть X рефлексивно и $X \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} H$. Будем говорить, что X **вложено в X^* при помощи скалярного произведения в H**, если элементы $u \in X$ отождествляются с функционалами

$$u \in H \;\mapsto\; f_u \in X^*, \qquad f_u(w) \;:=\; (u, w)_H, \qquad \forall\; w \in X$$

- $X \overset{dense}{\hookrightarrow} H \overset{dense}{\hookrightarrow} X^* \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad X \overset{dense}{\hookrightarrow} H \simeq H^* \overset{dense}{\hookrightarrow} X^*$

- отображение $u \in X \mapsto f_u \in X^*$ является вложением

- $\|f_u\|_{X^*} \;\le\; c_1 \|u\|_H \;\le\; c_2 \|u\|_X, \qquad \forall\; u \in X$

- X^* изометрически изоморфно пополнению H по норме

$$\|u\|_{X^*} \;:=\; \sup_{w \in X,\; \|w\|_X = 1} |(u, w)_H|$$

4. Функции со слабой производной по времени из сопряженного пространства

Теорема. Пусть $X \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} H \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} X^*$. Функция $v \in L_1(I; X^*)$ является сл. произв. по времени от $u \in L_1(I; H)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_I (u(t), w)_H \, \varphi'(t)\, dt = -\int_I \langle v(t), w\rangle \, \varphi(t)\, dt, \qquad \forall\ w \in X, \qquad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(I).$$

При этом $t \mapsto (u(t), w)_H$ абс. непрерывна на I и

$$\frac{d}{dt}(u(t), w)_H \ = \ \langle u'(t), w\rangle, \qquad \text{п.в. } \ t \in (0, T), \qquad \forall\ w \in X.$$

5. Уравнение $\partial_t u = \operatorname{div} f$ в $\mathcal{D}'(Q_T)$

Теорема. Пусть $u \in L_2(Q_T)$ и $f \in L_q(Q_T; \mathbb{R}^n)$, $q \in (1, 2]$, и

$$\partial_t u \ = \ \operatorname{div} f \qquad \text{в} \qquad \mathcal{D}'(Q_T),$$

то есть

$$\int_{Q_T} u \partial_t \eta \ dxdt \ = \ \int_{Q_T} f \cdot \nabla \eta \ dxdt, \qquad \forall\ \eta \in C_0^\infty(Q_T).$$

Тогда

- $\exists\ \partial_t u \in L_q(0,T;W_q^{-1}(\Omega))$

- для п.в. $t\in(0,T)$ $\partial_t u(t) = \operatorname{div} f(t)$ в $W_q^{-1}(\Omega)$, т.е.

- $\langle \partial_t u(t), w\rangle = -\int\limits_\Omega f(x,t)\cdot\nabla w(x)\,dx$, $\forall\ w\in \overset{\circ}{W}{}^1_{q'}(\Omega)$, п.в. $t\in(0,T)$

- $\|\partial_t u\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(\Omega))} \le c\,\|f\|_{L_q(Q_T)}$

- $u\in C([0,T];W_q^{-1}(\Omega))$

- $\forall\ w\in \overset{\circ}{W}{}^1_{q'}(\Omega)$ ф–ция $t\mapsto \int\limits_\Omega u(x,t)w(x)\,dx$ абс. непр. на $[0,T]$

- $\forall\ w\in \overset{\circ}{W}{}^1_{q'}(\Omega)$ $\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega u(x,t)w(x)\,dx = \langle\partial_t u(t), w\rangle$ п.в. $t\in(0,T)$

Д–во. Пусть $w \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$, $\eta(x,t) = \varphi(t)w(x)$. Тогда

$$\int_0^T (u(t),w)_{L_2(\Omega)}\,\varphi'(t)\ dt = \int_0^T \underbrace{\langle f(t),\nabla w\rangle}_{=-\langle \operatorname{div} f(t),w\rangle}\ \varphi(t)\ dt, \qquad \begin{array}{l}\forall\ w \in C_0^\infty(\Omega),\\ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(0,T)\end{array}$$

Это означает, что u имеет слабую производную по времени:

$$\exists\ \partial_t u = v, \qquad v := \operatorname{div} f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(\Omega))$$

Обозначим $Z = W_q^{-1}(\Omega)$ и отметим, что

$$\partial_t u = v \ \text{ в } \ L_q(0,T;Z) \quad \iff \quad \text{п.в. } t \in (0,T) \quad \partial_t u(t) = v(t) \ \text{ в } \ Z$$

Т.к. при п.в. $t \in (0,T)$ $\|\operatorname{div} f(t)\|_{W_q^{-1}(\Omega)} \le c\|f(t)\|_{L_q(\Omega)}$, получаем

$$\|\partial_t u\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(\Omega))} \le c\,\|f\|_{L_q(Q_T)}$$

Поскольку

$$u \in L_2(Q_T) \hookrightarrow L_q(0,T;W_q^{-1}(\Omega)) \quad \text{и} \quad \partial_t u \in L_q(0,T;W_q^{-1}(\Omega)),$$

$$u \in W_q^1(0,T;W_q^{-1}(\Omega)) \quad \Longrightarrow \quad u \in C([0,T];W_q^{-1}(\Omega))$$

□

§4 Теоремы о непрерывности

1. Теорема о сильной непрерывности

Теорема. Пусть X — рефл., сеп., H — гильб., $X \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} H \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} X^*$, и

$$u \in L_p(I; X), \quad p \in (1, +\infty): \quad \exists\, u' \in L_{p'}(I; X^*), \quad p' = \frac{p}{p-1}$$

Тогда

$$u \in C(I; H)$$

Более того, $t \mapsto \|u(t)\|_H^2$ абсолютно непрерывна на I и

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 = 2\,\langle u'(t), u(t)\rangle \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(I)$$

если $\bar{I} = [a, b]$, то $\exists\, c = c(a, b, p) > 0$:

$$\|u\|_{C([a,b];H)} \le c\left(\|u\|_{L_p(I;X)} + \|u'\|_{L_{p'}(I;X^*)}\right)$$

Д–во: б.о.о. $\bar{I} = [a, b]$ — компакт.

1. $\exists\ u_m \in C^1(\bar{I}; X)$: $\ u_m \to u$ в $L_p(I; X)$ и $u_m' \to u'$ в $L_{p'}(I; X^*)$

2. $u_m \in C^1(I; X) \implies \exists\ \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 = 2\left(u_m'(t), u_m(t)\right)_H = 2\langle u_m'(t), u_m(t)\rangle$

3. $\|u_m - u_k\|_{C(\bar{I}; H)} \ \le\ c\left(\|u_m - u_k\|_{L_p(I;X)} + \|u_m' - u_k'\|_{L_{p'}(I;X^*)}\right)$

4. $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ фунд. в $C(\bar{I}; H)\ \Rightarrow\ u \in C(\bar{I}; H)$, $\ \sup\limits_{t\in I}\|u^m(t) - u(t)\|_H \ \to 0$

5. $\|u_m(t)\|_H^2 - \|u_m(s)\|_H^2 = 2\int\limits_s^t \langle u_m'(\tau), u_m(\tau)\rangle\, d\tau \quad \implies$

$$\|u(t)\|_H^2 - \|u(s)\|_H^2 = 2\int\limits_s^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle\, d\tau$$

6. $t \mapsto \|u(t)\|_H^2$ абс. непр. на I, $\quad \frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle$

7. $\|u\|_{C([a,b];H)} \le c\left(\|u\|_{L_p(I;X)} + \|u'\|_{L_{p'}(I;X^*)}\right)$

2. Применение теоремы о сильной непрерывности

Теорема. 1) $W_2^{-1}(\Omega)$ двойственно к $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ отн. $L_2(\Omega)$

$u \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $\partial_t u \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega)) \implies u \in C([0,T];L_2(\Omega))$,

$$t \mapsto \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \quad \text{абс. непрерывна на } [0,T],$$

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = 2\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle \quad \text{п.в.} \quad t \in (0,T)$$

2) $\partial\Omega \subset C^2 \implies L_2(\Omega)$ двойственно к $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$ отн. $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ со скал. произведением $(\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)}$, причем

$$\langle f, w\rangle = -(f, \Delta w)_{L_2(\Omega)}, \quad \forall\, f \in L_2(\Omega), \quad \forall\, w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega).$$

$u \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega))$, $\partial_t u \in L_2(Q_T) \implies \nabla u \in C([0,T];L_2(\Omega))$,

$$t \mapsto \|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \quad \text{абс. непрерывна на } [0,T],$$

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = -2\,(\partial_t u(t), \Delta u(t))_{L_2(\Omega)} \quad \text{п.в.} \quad t \in (0,T)$$

3. Пространство $C_w(I;X)$

Опр. $u : I \to X$ наз. **слабо непрерывной** в точке $t_0 \in I$, если

$$\forall\, f \in X^* \quad \langle u(t) - u(t_0), f\rangle \ \to \ 0 \quad \text{при} \quad t \to t_0$$

$$C_w(I;X) \ := \ \{\ u : I \to X,\ u \text{ — слабо непрерывна на } I\ \}$$

$$u \in C_w(I;X) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\ f \in X^* \ \text{ ф–ция } t \mapsto \langle f, u(t)\rangle \ \text{ непрерывна на } I$$

- $C(I;X) \subset C_w(I;X)$

- Если X — слабо секвенциально полно и $I = [a,b]$ — компакт, то $C_w([a,b];X)$ слабо секвенциально полно

- X рефлексивно, $u \in C_w(I;X) \implies u \in C(I;X)$ в том и только том случае, когда отображение $t \in I \ \mapsto \ \|u(t)\|_X$ непрерывно

4. Теорема о слабой непрерывности

Теорема. Пусть $X \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} Y$ и $Y^* \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} X^*$. Тогда

$$u \in L_\infty(I;X) \cap C_w(\bar{I};Y) \quad \Longrightarrow \quad u \in C_w(\bar{I};X)$$

В частности, в классе эквивалентности $u \in L_\infty(I;X)$ существует единственный представитель $\bar{u}$, принадлежащий $C_w(I;X)$.

Д–во.

1. Пусть $u \in L_\infty(I;X) \cap C_w(\bar{I};Y)$. Обозначим $M := \|u\|_{L_\infty(I;X)}$.
$u \in C_w(\bar{I};Y) \Longrightarrow u(t) \in Y \quad \forall\, t \in \bar{I}$
$u \in L_\infty(I;Y) \Longrightarrow \exists\ \Sigma \subset I$, $|\Sigma| = 0$: $u(t) \in X$, $\|u(t)\|_X \le M \ \forall\, t \in X \setminus \Sigma$

2. Пусть $t_0 \in \bar{I}$ — $\forall$. Докажем, что $u(t_0) \in X$ и $\|u(t_0)\|_X \le M$.
Выберем $t_m \in I \setminus \Sigma$: $t_m \to t_0$
Докажем, что $u(t_m) - u(t_k) \rightharpoonup 0$ в X при m, $k \to \infty$.

3. Пусть $f \in X^*$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\ f^\varepsilon \in Y^*$: $\|f^\varepsilon - f\|_{X^*} < \frac{\varepsilon}{2M}$.

$$|\langle u(t_m) - u(t_k), f\rangle| \ \leq$$

$$\leq \quad \underbrace{|\langle u(t_m) - u(t_k), f^\varepsilon\rangle|}_{\to\ 0,\ \text{т.к. } u(t_m)\rightharpoonup u(t_0) \text{ в } Y} \quad + \ \underbrace{(\|u(t_m)\|_X + \|u(t_k)\|_X)}_{\leq\ 2M}\underbrace{\|f^\varepsilon - f\|_{X^*}}_{\leq\ \frac{\varepsilon}{2M}}$$

X слабо секв. полно $\implies$ $\exists\ v \in X$: $u(t_m) \rightharpoonup v$ в X

$u(t_m) \rightharpoonup u(t_0)$ в Y $\implies$ $u(t_0) = v \in X$

$u(t_m) \rightharpoonup u(t_0)$ в X $\implies$ $\|u(t_0)\|_X \leq \liminf \|u(t_m)\|_X \leq M$

4. Докажем, что $u \in C_w(\bar{I}; X)$. Пусть $t_m,\ t_0 \in \bar{I}$, $t_m \to t_0$.
Пусть $f \in X^*$ и $\varepsilon > 0$ и $f^\varepsilon \in Y^*$, $\|f^\varepsilon - f\|_{X^*} < \frac{\varepsilon}{2M}$. Тогда

$$|\langle u(t_m) - u(t_0), f\rangle| \ \leq$$

$$\leq \quad \underbrace{|\langle u(t_m) - u(t_0), f^\varepsilon\rangle|}_{\to\ 0,\ \text{т.к. } u(t_m)\rightharpoonup u(t_0) \text{ в } Y} \quad + \ \underbrace{(\|u(t_m)\|_X + \|u(t_0)\|_X)}_{\leq\ 2M}\underbrace{\|f^\varepsilon - f\|_{X^*}}_{\leq\ \frac{\varepsilon}{2M}}$$

5. Применение теоремы о слабой непрерывности

Теорема. Пусть $u \in L_2(Q_T)$ и $f \in L_q(Q_T; \mathbb{R}^n)$, $q \in (1,2]$, удовл.

$$\partial_t u = \operatorname{div} f \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q_T)$$

то есть

$$\int\limits_{Q_T} u \partial_t \eta \; dxdt = \int\limits_{Q_T} f \cdot \nabla \eta \; dxdt, \qquad \forall \; \eta \in C_0^\infty(Q_T)$$

Тогда

1) $\partial_t u \in L_q(0,T; W_q^{-1}(\Omega))$, $u \in C([0,T]; W_q^{-1}(\Omega))$ и для п.в. $t \in (0,T)$

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} u(x,t) w(x) \; dx \; = \; \int\limits_{\Omega} f(x,t) \cdot \nabla w(x) \; dx, \qquad \forall \; w \in \overset{\circ}{W}{}^1_{q'}(\Omega)$$

2) если $u \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, то $u \in C_w([0,T];L_2(\Omega))$

В частности, в классе эквивалентности $u \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ существует представитель $\bar{u}$, такой что $\bar{u}(t) \in L_2(\Omega)$ $\forall\, t \in [0,T]$.
При этом функция $t \mapsto \|\bar{u}(t)\|_{L_2(\Omega)}$ полунепрерывна снизу:

$$\forall\ t_0 \in (0,T) \qquad \|\bar{u}(t_0)\|_{L_2(\Omega)} \le \liminf_{t\to t_0} \|\bar{u}(t)\|_{L_2(\Omega)}$$

3) (когда применима теорема о сильной непрерывности)

Если $u \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$ и $f \in L_2(Q_T)$, то $u \in C([0,T];L_2(\Omega))$ и

$$\forall\ t_0 \in (0,T) \qquad \|\bar{u}(t_0)\|_{L_2(\Omega)} = \lim_{t\to t_0} \|\bar{u}(t)\|_{L_2(\Omega)}$$

Более того, $t \mapsto \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$ и

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega f(x,t)\cdot\nabla u(x,t)\ dx, \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T).$$

§5 Анизотропные пространства Соболева

1. Анизотропные пространства Лебега и Соболева

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытая область, $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$, p, $r \in [1,+\infty)$

$$L_{p,r}(Q_T) \ := \ L_r(0,T;L_p(\Omega)), \qquad \|u\|_{L_{p,r}(Q_T)} \ := \ \left(\int\limits_0^T \|u(t)\|^r_{L_p(\Omega)} \, dt \right)^{1/r}$$

$$L_{p,\infty}(Q_T) \ := \ L_\infty(0,T;L_p(\Omega)), \qquad \|u\|_{L_{p,\infty}(Q_T)} \ := \ \sup_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_{L_p(\Omega)}$$

$$W_p^{1,0}(Q_T) \ := \ \{ \ u \in L_p(Q_T) : \ \nabla u \in L_p(Q_T) \ \},$$

$$\|u\|_{W_p^{1,0}(Q_T)} \ := \ \|u\|_{L_p(Q_T)} \ + \ \|\nabla u\|_{L_p(Q_T)}$$

$$W_p^{2,1}(Q_T) \ := \ \{ \ u \in W_p^{1,0}(Q_T) : \ \nabla^2 u \in L_p(Q_T), \ \partial_t u \in L_p(Q_T) \ \},$$

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q_T)} \ := \ \|u\|_{W_p^{1,0}(Q_T)} \ + \ \|\nabla^2 u\|_{L_p(Q_T)} \ + \ \|\partial_t u\|_{L_p(Q_T)}$$

2. "Параболические" теоремы вложения

Теорема. Пусть Ω — ограниченная липшицева область, $p \in [1, +\infty)$.

$$W_p^{2,1}(Q_T) \hookrightarrow \begin{cases} W_q^{1,0}(Q_T), & \text{при} \quad 1 \le p < n+2, \quad 1 \le q \le \frac{(n+2)p}{n+2-p} \\ C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T), & \text{при} \quad p > n+2, \quad 0 \le \alpha \le 1 - \frac{n+2}{p} \end{cases}$$

$$W_p^{2,1}(Q_T) \hookrightarrow \begin{cases} L_q(Q_T), & \text{при} \quad 1 \le p < \frac{n+2}{2}, \quad 1 \le q \le \frac{\frac{n+2}{2}p}{\frac{n+2}{2}-p} \\ C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T), & \text{при} \quad p > \frac{n+2}{2}, \quad 0 \le \alpha \le 1 - \frac{n+2}{2p} \end{cases}$$

3. Компактность "параболических" вложений

Теорема. Вложения с докритическими показателями компактны.

4. Следы функций из $W_2^{1,0}(Q_T)$ на $\Gamma_T := \partial\Omega \times (0,T)$

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — огр. липшицева, $Q_T := \Omega \times (0,T)$, $\Gamma_T := \partial\Omega \times (0,T)$. Тогда $\forall\ u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ след $u|_{\Gamma_T} \in L_2(\Gamma_T)$ и

$$\|u\|_{L_2(\Gamma_T)} \ \le\ c_\Omega\, \|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}$$

5. Следы функций из $W_2^{2,1}(Q_T)$ на сечениях $t = t_0$

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — огр. липш., $Q_T := \Omega \times (0,T)$, $t_0 \in [0,T]$. Тогда $\forall\ u \in W_2^{2,1}(Q_T)$ след $u(\cdot, t_0) := u|_{t=t_0} \in W_2^1(\Omega)$ и

$$\|u(\cdot, t_0)\|_{W_2^1(\Omega)} \ \le\ c_\Omega\, \|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)}$$

- $\|u(\cdot,t) - u(\cdot,t_0)\|_{W_2^1(\Omega)} \to 0$ при $t \to t_0$

- $W_2^{2,1}(Q_T)$ непрерывно вкладывается в $C([0,T]; W_2^1(\Omega))$

6. Анизотропные пр-ва Соболева как пр-ва банах.-зн. ф-ций

Теорема. Пусть $p \in [1, +\infty)$. Тогда $W_p^{1,0}(Q_T) = L_p(0,T; W_p^1(\Omega))$ и

$$W_p^{2,1}(Q_T) = L_p(0,T; W_p^2(\Omega)) \cap W_p^1(0,T; L_p(\Omega))$$

7. Теоремы о плотности функций с раздел. переменными

Теорема. Пусть $p \in [1, +\infty)$ и $\eta^N(x,t) := \sum\limits_{k=1}^{N} \varphi_k(t) w_k(x)$.

1) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \eta \in C_0^\infty(Q_T)$ $\exists w_k \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi_k \in C_0^\infty(0,T)$: $\|\eta - \eta^N\|_{C^1(\bar{Q}_T)} < \varepsilon$

2) $\varphi_k \in L_2(0,T)$, $w_k \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \Longrightarrow \{\eta^N\}$ плотны в

$$\left\{ u \in W_p^{1,0}(Q_T) : \ u|_{\partial\Omega\times(0,T)=0} = 0 \right\} = L_p(0,T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))$$

3) $\varphi_k \in W_2^1(0,T)$, $\varphi(T) = 0$, $w_k \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \cap W_p^2(\Omega) \Longrightarrow \{\eta^N\}$ плотны в

$$\left\{ u \in W_p^{2,1}(Q_T) : \ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \ u|_{t=T} = 0 \right\}$$

Д–во. 1) Пусть $K_L \subset \mathbb{R}^n$ – куб со стороной L с центром в нуле и

$$\operatorname{supp}\eta \Subset Q_T \Subset Q'_L := K_L \times (-L, L)$$

$$\tilde{\eta}^N(x,t) = \sum_{|k| \le N} c_k(t)\, e^{i\frac{2\pi k\cdot x}{L}}, \quad c_k(t) := c_n \int\limits_{K_L} \eta(x,t)\, e^{-i\frac{2\pi k\cdot x}{L}}\, dx$$

Так как $\eta \in C_0^\infty(Q'_L)$, ряд Фурье сходится в $C^l(\bar{Q}'_L) \quad \forall\, l \in \mathbb{N}$.

$$\|\eta - \tilde{\eta}^N\|_{C^1(\bar{Q}'_L)} \to 0$$

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\chi \in C_0^\infty(0,T)$ таковы, что

$$\varphi(x)\chi(t) = 1 \qquad \forall\ (x,t) \in \operatorname{supp}\eta$$

Обозначим $\eta^N(x,t) := \varphi(x)\chi(t)\tilde{\eta}^N(x,t)$. Тогда

$$\|\eta - \eta^N\|_{C^1(\bar{Q}_T)} = \|(\eta - \tilde{\eta}^N)\varphi\chi\|_{C^1(\bar{Q}_T)} \to 0$$

2), 3) — вытекают из 1) $\square$