Математическая теория уравнений Навье-Стокса

Курс Т.Н. Шилкина (ПОМИ РАН)

Содержание

Список литературы

Функции со значениями в банаховом пространстве

[1] К. Иосида, “Функциональный анализ”, Москва, “Мир”, 1967.

[2] Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, “Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения”, Москва, “Мир”, 1978.

Анизотропные пространства Соболева, теоремы вложения

[3] О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский, “Интегральные представления функций и теоремы вложения”, Москва, “Наука”, 1996.

Параболические уравнения

[4] О.А. Ладыженская, “Краевые задачи математической физики”, Москва, “Наука”, 1973.

[5] Л.К. Эванс, “Уравнения с частными производными”, Новосибирск, Издательство Т. Рожковской, 2003.

Уравнения Навье-Стокса, “базовая” теория

[6] О.А. Ладыженская, “Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости”, М. “Наука”, 1970 (2-ое издание).

[7] Р. Темам, “Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ”, Москва, “Мир”, 1981.

[8] Ж.Л. Лионс, “Некоторые методы решения нелинейных краевых задач”, Москва, “Мир”, 1972.

[9] H. Sohr, The Navier-Stokes Equations. An Elementary Functional Analytic Approach, Birkhauser, 2001.

Параболические системы

[10] M. Giaquinta, L. Martinazzi, An introduction to the regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs. Publications of the Scuola Normale Superiore, 2012.

[11] Q. Han, F.-H. Lin, Elliptic partial differential equations, AMS, 2000.

[12] А.А. Архипова, И.В. Нежинская, Регулярность решений линейных эллиптических и параболических систем уравнений, изд–во СПбГУ, 2014.

Уравнения Навье-Стокса, “продвинутая” теория

[13] G.A. Seregin, “Lecture Notes on Regularity Theory for the Navier-Stokes Equations”, World Scientific, 2015.

[14] T.-P. Tsai, “Lectures on Navier-Stokes Equations”, AMS, 2018.

Обозначения

Всюду в нашем курсе:

- по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 1 до n
- $a \cdot b = a_j b_j \equiv \sum_{j=1}^n a_j b_j, \quad \forall\, a,\, b \in \mathbb{R}^n$
- $A : B = A_{jk} B_{jk} \equiv \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{jk}, \quad \forall\, A,\, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- $\forall\, a,\, b \in \mathbb{R}^n \quad a \otimes b$ — $n \times n$–матрица с компонентами $(a_j b_k)$
- индекс j после запятой означает дифференцирование по x_j, т.е. $\varphi_{,j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$, $u_{j,k} = \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$ итд
- $\partial_t u := \frac{\partial u}{\partial t}$
- если $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то $\nabla \varphi = (\varphi_{,j})$, $\nabla^2 \varphi = (\varphi_{,jk})$, $\Delta u = (u_{j,kk})$, $\operatorname{div} u = u_{j,j}$
- если $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — векторное поле, то $\nabla u = (u_{j,k})$ — $n \times n$–матрица
- $(u \cdot \nabla)$ — дифференциальный оператор 1-го порядка, $(u \cdot \nabla) v = u_j \frac{\partial v}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial v}{\partial x_j}$
- если $u,\, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то $(\nabla u) v = (u_{j,k} v_k) = (v \cdot \nabla) u$
- если $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ — матричнозначная функция, то $\operatorname{div} A = (A_{jk,k})$ — векторное поле
- $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток вещественной прямой (конечный или бесконечный, открытый, полуоткрытый или замкнутый)
- X, Y, Z — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_X$ итд
- $\mathcal{B}(X;Y)$ — ограниченные линейные операторы из X в Y с областью опеделения, равной всему X, $S_\infty(X;Y)$ — компактные операторы из X в Y, $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X;X)$ итд.
- X^* — сопряженное к X пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — отношение двойственности X и X^*.
- H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_H$
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса C^2, $|\Omega|$ — n-мерная мера Лебега Ω
- $Q_T := \Omega \times (0,T]$, $|Q_T|$ — $(n+1)$-мерная мера Лебега Q_T
- $\partial\Omega$ — граница Ω, $\partial' Q_T := \bar{Q}_T \setminus Q_T$ — параболическая граница Q_T
- $E_1 \Subset E_2 \quad \Longleftrightarrow \quad E_1$ — компакт и $\bar{E}_1 \subset E_2 \quad (E_1,\, E_2 \subset \mathbb{R}^n,\ \bar{E}_1$ — замыкание $E_1)$
- Если $u : Q_T \to \mathbb{R}$, то через $u(t) := u(\cdot,t)$ мы обозначаем функции $x \in \Omega \mapsto u(x,t)$. Как правило, эти функции определены как минимум при п.в. $t \in (0,T)$.
- $u = u(x) \quad \Longrightarrow \quad [u]_\Omega := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)\, dx$
- $u = u(x,t) \quad \Longrightarrow \quad (u)_{Q_T} := \frac{1}{|Q_T|} \int_{Q_T} u(x,t)\, dxdt, \quad [u(t)]_\Omega := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x,t)\, dx$

- $B_R(x_0) := \{\ x\in\mathbb{R}^n:\ |x-x_0|<R\ \},\ \ Q_R(x_0,t_0) := B_R(x_0)\times(t_0-R^2,t_0]$
- $B_R := B_R(0),\ \ Q_R := Q_R(0,0)$
- Как правило, в обозначении функциональных классов мы не делаем различния между пространствами скалярных, векторозначных или матричнозначных функций, используя для них одни и те же обозначения. В зависимости от контекста $L_p(\Omega)$ может обозначать либо пространство скалярных функций со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, либо пространство векторозначных функций $L_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$, либо пространство матричнозначных функций $L_p(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n})$ итд. Однако в тех случаях, где это необходимо, иногда мы будем явно указывать пространство образов в обозначениях функциональных классов: $C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $L_p(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n})$ итд.
- $C_0^\infty(\Omega) := \{\ u\in C^\infty(\bar\Omega):\ \operatorname{supp} u \text{ — компакт},\ \operatorname{supp} u \Subset \Omega\ \}$
- $L_p(\Omega)$ — пространство Лебега, $\overset{\circ}{L}_p(\Omega) := \{\ u\in L_p(\Omega),\ [p]_\Omega = 0\ \}$
- $W_p^k(\Omega)$, $k\in\mathbb{N}$ — пространство Соболева, $\overset{\circ}{W}{}^k_p(\Omega) = \operatorname{Closure}_{W_p^k(\Omega)} C_0^\infty(\Omega)$
- $W_p^s(\Omega)$, $W_p^s(\partial\Omega)$, $s\notin\mathbb{N}$ — пространства Слободецкого–Соболева
- $u\in W_p^1(\Omega) \quad\Longrightarrow\quad u|_{\partial\Omega}\in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ — след функции u на $\partial\Omega$
- $W_p^{1,0}(Q_T) := \{\ u\in L_p(Q_T):\ \nabla u\in L_p(Q_T)\ \}$
- $W_p^{1,1}(Q_T) := \{\ u\in L_p(Q_T):\ \nabla u,\, \partial_t u\in L_p(Q_T)\ \}$
- $W_p^{2,1}(Q_T) := \{\ u\in W_p^{1,0}(Q_T):\ \nabla^2 u,\ \partial_t u\in L_p(Q_T)\ \}$
- $J_0^\infty(\Omega) := \{\, u\in C_0^\infty(\Omega):\ \operatorname{div} u = 0 \text{ в } \Omega\,\}, \qquad J_0^\infty(Q_T) := \{\, u\in C_0^\infty(Q_T):\ \operatorname{div} u = 0 \text{ в } Q_T\,\}$
- $\overset{\circ}{J}_p(\Omega) := \operatorname{Closure}_{L_p(\Omega)} J_0^\infty(\Omega), \qquad \overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega) := \operatorname{Closure}_{W_p^1(\Omega)} J_0^\infty(\Omega)$
- $W_p^{-1}(\Omega) = \big(\overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega)\big)^*, \quad J_p^{-1}(\Omega) = \big(\overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\Omega)\big)^*, \quad p\in(1,+\infty), \quad p' = \frac{p}{p-1}$

$$\|f\|_{W_p^{-1}(\Omega)} := \sup_{\eta\in\overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega),\ \|\eta\|_{W^1_{p'}(\Omega)}\le 1} |\langle f,\eta\rangle|, \qquad \|f\|_{J_p^{-1}(\Omega)} := \sup_{\eta\in\overset{\circ}{J}{}^1_{p'}(\Omega),\ \|\eta\|_{W^1_{p'}(\Omega)}\le 1} |\langle f,\eta\rangle|$$

- $\overset{\circ}{J}_p(Q_T) := L_p(0,T;\overset{\circ}{J}_p(\Omega))$
- $\overset{\circ}{J}{}^{1,0}_p(Q_T) := L_p(0,T;\overset{\circ}{J}{}^1_p(\Omega))$
- $C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar Q_T)$, $\mu\in(0,1)$ — пространство функций, непрерывных по Гельдеру в параболической метрике, с нормой

$$\|u\|_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar Q_T)} = \|u\|_{C(\bar Q_T)} + \langle u\rangle_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar\Omega)}, \qquad \langle u\rangle_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar Q_T)} := \sup_{(x',t')\neq(x'',t'')} \frac{|u(x',t')-u(x'',t'')|}{|x'-x''|^\mu + |t'-t''|^{\frac{\mu}{2}}}$$

Часть I

Параболические уравнения

1 Сведения из функционального анализа

1.1 Функции со значениями в банаховых пространствах

1. **Мотивировка**

   Многие эволюционные (т.е. включающие переменную–“время”) дифференциальные уравнения в частных производных (в частности, уравнения Навье–Стокса) можно интерпретировать как обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $u : \mathbb{R} \to X$, принимающих значения в некотором банаховом пространстве X:

   $$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) \ = \ A(u(t)) \\ u(0) = a \end{cases} \qquad A : D(A) \subset X \to X \quad \text{— (нелинейный) оператор}$$

   Поэтому прежде чем приступать к изучению таких уравнений, нам необходимо познакомиться со свойствами “баноховозначных” функций.

2. **Непрерывные функции со значениями в банаховом пространстве**

   Определение. $u : I \to X$ наз. *сильно непрерывной* (или просто *непрерывной*) в точке $t_0 \in I$, если

   $$\|u(t) - u(t_0)\|_X \ \to \ 0 \qquad \text{при} \qquad t \to t_0.$$

   - u наз. (*сильно*) *непрерывной на множестве* I, если она непрерывна в каждой точке этого множества
   - $C(I; X) \ := \ \{ \ u : I \to X, \ u \text{ — непрерывна на } I \ \}$
   - $I = [a, b]$ — компакт $\quad \Longrightarrow \quad C([a, b]; X)$ — банахово относительно нормы

     $$\|u\|_{C([a,b];X)} \ := \ \sup_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X$$

   - $I = [a, b]$ компакт $\Longrightarrow$ полиномы $\left\{ \ p(t) = \sum\limits_{j=0}^{m} a_j t^j, \ a_j \in X \ \right\}$ плотны в $C([a, b]; X)$

3. **Дифференцируемость по Фреше**

Определение. $u : I \to X$ наз. *дифференцируемой по Фреше* (или *дифференцируемой в сильном смысле*) в точке t_0, если существует $v_{t_0} \in X$, такой что

$$\lim_{t \to t_0} \left\| \frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} - v_{t_0} \right\|_X = 0$$

- $u'(t_0) \equiv \frac{du}{dt}(t_0) := v_{t_0}$ наз. сильной производной (по Фреше) u в точке t_0
- u наз. *дифференцируемой по Фреше на* I, если u дифференцируема по Фреше в каждой точке этого промежутка
- u наз. *непрерывно дифференцируемой* на промежутке I, если $\frac{du}{dt}$ непрерывна на I
- $C^k(I; X)$ — лин. пр–во функций, непрерывно дифференцируемых на I k раз
- $I = [a, b]$ — компакт $\implies$ $C^k([a, b]; X)$ — банахово относительно нормы

$$\|u\|_{C^k([a,b];X)} := \|u\|_{C([a,b];X)} + \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{d^j u}{dt^j} \right\|_{C([a,b];X)}$$

4. **Сильная измеримость**

Определение. $u : I \to X$ называется *сильно измеримой* на I, если существуют простые функции $g_k : I \to X$, такие что $g_k(t) \to u(t)$ для п.в. $t \in I$

- $g : I \to X$ наз. *простой*, если существуют разбиение $I = \cup_{k=1}^N I_k$, $I_j \cap I_k = \varnothing$, I_k — изм. по Лебегу, а также $\{g_i\}_{i=1}^N \subset X$, такие что

$$g(t) = \sum_{k=1}^{N} \chi_{I_k}(t)\ g_k, \qquad t \in I$$

- Теорема (Петтис) Если X — сепарабельное, то $u : I \to X$ является сильно измеримой на I тогда и только тогда, когда

$$\forall\ f \in X^* \quad \textit{отображение} \quad t \in I \mapsto \langle f, u(t) \rangle \quad \textit{измеримо по Лебегу.}$$

- $u_k : I \to X$ сильно изм., $u_k(t) \underset{k \to \infty}{\rightharpoonup} u(t)$ в X при п.в. $t \in I$ $\implies$ u сильно изм. на I

5. **Интеграл Бохнера**

Определение. *Интегралом Бохнера* простой функции

$$g(t) = \sum_{k=1}^{N} g_k \chi_{I_k}(t), \qquad \{g_k\}_{k=1}^N \subset X, \quad I_j \cap I_k = \varnothing$$

называется элемент банахова пространства X:

$$\int_I g(t)\ dt \ \stackrel{\text{def}}{=} \ \sum_{k=1}^{N} g_k \mu(I_k) \quad \in \quad X.$$

Функция $u : I \to X$ называется *суммируемой* на I если существует последовательность простых функций $g_k : I \to X$, таких что

$$\int_I \ \|u - g_k\|_X \ dt \ \to \ 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

- если $u : I \to X$ суммируема на I, то *для любой* последовательности простых функций $g_k : I \to X$, такой что

  $$\int_I \ \|u - g_k\|_X \ dt \ \to \ 0 \quad \text{при } k \to \infty,$$

  существует элемент $S \in X$, такой что

  $$\Big\| \ S \ - \ \int_I g_k(t)\, dt \ \Big\|_X \ \to \ 0 \qquad \text{при} \qquad k \to +\infty;$$

- элемент $S \in X$ не зависит от выбора последовательности простых функций g_k, аппроксимирующих функцию u
- S называется *интегралом Бохнера* и обозначается

  $$\int_I u(t)\, dt \ := \ S$$

- Теорема (Бохнер). $u : I \to X$ является суммируемой на I тогда и только тогда, когда u является сильно измеримой на I и $\|u(\cdot)\|_X \in L_1(I)$. При этом

  $$\Big\| \ \int_I \ u(t)\, dt \ \Big\|_X \ \le \ \int_I \ \|u(t)\|_X \ dt.$$

6. **Теорема о линейном преобразовании интеграла Бохнера**

   Теорема.

   - Если $u : I \to X$ суммируема на I, то

     $$\forall \ f \in X^* \qquad \Big\langle \ f \ , \ \int_I u(t)\, dt \ \Big\rangle \ = \ \int_E \langle f, u(t) \rangle \ dt$$

- Если $u : I \to X^*$ суммируема на I, то

$$\forall\, x \in X \qquad \left\langle\, x \,,\, \int_I u(t)\,dt \,\right\rangle \;=\; \int_I \langle x, u(t)\rangle \; dt$$

- Если $T \in \mathcal{B}(X;Y)$ и $u : I \to X$ суммируема на I, то Tu суммируема на I и

$$\int_I Tu(t)\; dt \;=\; T \int_I u(t)\,dt.$$

7. **Пространства $L_p(I;X)$, $1 \le p < +\infty$**

Определение. Пусть $p \in [1, +\infty)$. Обозначим

$$L_p(I;X) \;:=\; \{\; u : I \to X \text{ измерима на } I \text{ и } t \mapsto \|u(t)\|_X \in L_p(I) \;\},$$

$$\|u\|_{L_p(I;X)} \;:=\; \Big(\int_I \; \|u(t)\|_X^p \; dt \,\Big)^{1/p}.$$

- $L_p(I;X)$ — банахово
- простые функции плотны в $L_p(I;X)$
- если X рефлексивно и сепарабельно и $p \in (1, +\infty)$, то $L_p(I;X)$ рефлексивно и

$$(L_p(I;X))^* \;\simeq\; L_{p'}(I;X^*), \qquad p' = \frac{p}{p-1}$$

- (Непрерывность в среднем) Если $u \in L_p(I;X)$ продолжена нулем с I на $\mathbb{R}$, то

$$\lim_{h\to 0} \|T_h u - u\|_{L_p(I;X)} \;=\; 0, \qquad T_h u(x) := u(x+h)$$

- (Неравенство Гельдера) Если $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$, то для любых $u \in L_p(I;X)$, $v \in L_{p'}(I;X^*)$ функция $t \mapsto \langle v(t), u(t)\rangle$ суммируема на I и

$$\Big|\; \int_I \langle v(t), u(t)\rangle \; dt \,\Big| \;\le\; \|u\|_{L_p(I;X)} \|v\|_{L_{p'}(I;X^*)}$$

- если $X \hookrightarrow Z$, то $L_p(I;X) \hookrightarrow L_p(I;Z)$

8. **Пространство $L_\infty(I;X)$**

Определение. Обозначим

$$L_\infty(I;X) \;:=\; \{\; u : I \to X \text{ измерима на } I \text{ и } t \mapsto \|u(t)\|_X \in L_\infty(I) \;\}$$

$$\|u\|_{L_\infty(I;X)} \;:=\; \operatorname*{esssup}_{t\in I} \|u(t)\|_X$$

- $L_\infty(I;X)$ — банахово
- простые функции плотны в $L_\infty(I;X)$
- если X рефлексивно и сепарабельно, то $(L_1(I;X))^* \simeq L_\infty(I;X^*)$

9. **Гильбертово пространство $L_2(I;H)$**

Теорема. Если H — гильбертово, то простанство $L_2(I;H)$ является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(u,v)_{L_2(I;H)} := \int\limits_I (u(y),v(t))_H\,dt, \qquad u,\ v \in L_2(I;H).$$

10. **Усреднение банаховозначных функций**

Теорема. Пусть $\varepsilon > 0$ и ω_ε — стандартное соболевское ядро:

$$\omega_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon}\omega\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad \omega \in C_0^\infty(-1,1), \quad \omega \geq 0, \quad \omega(-t) = \omega(t), \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega(t)\,dt = 1$$

Продолжим функцию $u \in L_p(I;X)$, $p \in [1,+\infty]$, нулем на $\mathbb{R}$ и определим усреднение $u_\varepsilon : \mathbb{R} \to X$ как свертку u с ядром ω_ε (интеграл Бохнера)

$$u_\varepsilon(t) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(t-s)u(s)\,ds, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Тогда

1) $\varepsilon > 0 \implies u_\varepsilon \in C^\infty(I;X)$
2) $p \in [1,+\infty] \implies \|u_\varepsilon\|_{L_p(I;X)} \leq \|u\|_{L_p(I;X)}$
3) $p \in [1,+\infty) \implies \|u_\varepsilon - u\|_{L_p(I;X)} \to 0$ при $\varepsilon \to +0$
4) $p \in [1,+\infty) \implies C^\infty(I;X)$ плотно в $L_p(I;X)$

1.2 Распределения со значениями в банаховом пространстве

1. **Обобщенные функции со значениями в банаховых пространствах**

   Определение. Обозначим через $\mathcal{D}'(I;X)$ мн–во всех лин. отображений $T : C_0^\infty(I) \to X$, которые непрерывны в следующем смысле:

   $$\forall\ \varphi_m,\ \varphi \in C_0^\infty(I) \qquad \varphi_m \rightrightarrows \varphi \quad \text{в} \quad \mathcal{D}(I) \quad \Longrightarrow \quad T(\varphi_m) \rightharpoonup T(\varphi) \quad \text{в} \quad X.$$

   - $T \in \mathcal{D}'(I,X)$ наз. *распределением* на I со значенниями в банаховом пр–ве X
   - $T_m \to T$ в $\mathcal{D}'(I;X) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\ f \in X^*,\ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(I) \quad \langle T_m(\varphi), f\rangle \to \langle T(\varphi), f\rangle$

2. **Регулярные распределения**

   Определение. Пусть $u \in L_{1,loc}(I;X)$. Обозначим

   $$T_u : C_0^\infty(I) \to X, \qquad T_u(\varphi) \ = \ \int\limits_I u(t)\varphi(t)\ dt \ \in \ X, \qquad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(I),$$

   - $T_u \in \mathcal{D}'(I;X)$ наз. *регулярным распределением* с плотностью u
   - отображение $u \in L_{1,loc}(I;X) \mapsto T_u \in \mathcal{D}'(I;X)$ является инъективным

3. **Дифференцирование распределений**

   Определение. Пусть $T \in \mathcal{D}'(I;X)$ и $\alpha \in \mathbb{N}$. Определим отображение $S : C_0^\infty(I) \to X$

   $$S(\varphi) \ := \ (-1)^\alpha\ T(D^\alpha \varphi) \quad \text{в} \quad X, \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(I)$$

   - $D^\alpha T := S \in \mathcal{D}'(I;X)$ наз. *производной* порядка α распределения T
   - любая производная распределения снова является распределением

4. **Пространства Соболева банаховозначных функций**

   Определение. Пусть $1 \le p \le +\infty$. Обозначим

   $$W_p^1(I;X) \ := \ \Big\{ \ u \in L_p(I;X) \ | \ \ \exists \text{ об. производная } \ \frac{du}{dt} \in L_p(I;X) \ \Big\}$$

   $$\|u\|_{W_p^1(I;X)} \ = \ \|u\|_{L_p(I;X)} \ + \ \|u'\|_{L_p(I;X)}$$

   - $W_p^1(I;X)$ — банахово
   - $p \in [1,+\infty) \quad \Longrightarrow \quad C^\infty(\bar{I};X) \cap W_p^1(I;X)$ плотно в $W_p^1(I;X)$

5. **Формула Ньютона–Лейбница**

Теорема. Пусть $p \in [1, +\infty)$, $u \in W_p^1(I; X)$. Тогда

$$u(t) \;=\; u(s) \;+\; \int\limits_s^t u'(\tau)\, d\tau, \qquad \forall\ s,\ t \in I$$

6. **Вложение $W_1^1(I; X)$ в $C(\bar{I}; X)$**

Теорема. Пусть $\bar{I} = [a, b]$ — компакт и $u \in W_1^1(I; X)$. Тогда $u \in C(\bar{I}; X)$ и существует постоянная $C = C(a, b) > 0$, такая что

$$\|u\|_{C([a,b];X)} \;\leq\; C\ \|u\|_{W_1^1(a,b;X)}, \qquad \forall\ u \in W_1^1(a, b; X)$$

1.3 Слабая производная по времени

1. **Вложения сопряженных пространств**

   Определение. Пусть X и Y — банаховы пространства.

   - X вложено в Y, если существует линейный инъективный оператор $\mathcal{I} : X \to Y$
   - вложение $\mathcal{I} : X \to Y$ *непрерывно*, если $\mathcal{I} \in \mathcal{B}(X; Y)$ (обозначение $X \hookrightarrow Y$)
   - вложение $\mathcal{I} : X \to Y$ *компактно*, если $\mathcal{I} \in \mathcal{S}_\infty(X; Y)$ (обозначение $X \overset{\text{comp}}{\hookrightarrow} Y$)
   - вложение $\mathcal{I} : X \to Y$ *плотно*, если $\mathcal{I}(X)$ всюду плотно в Y (обозначение $X \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} Y$)

   Теорема.

   1) $X \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} Y \quad \Longrightarrow \quad Y^* \hookrightarrow X^*$
   2) X — рефлексивно, $X \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} Y \quad \Longrightarrow \quad Y^* \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} X^*$

2. **Банаховозначные функции, имеющие слабую производную по времени**

   Определение. Пусть $u \in L_p(I; X)$, $p \in [1, +\infty]$. Будем говорить, что у функции u есть слабая производная по времени, если существуют банахово пр–во Z, число $q \in [1, +\infty]$ и функция $v \in L_q(I; Z)$, такие что X непрерывно вкладывается в Z и

   $$\int\limits_I u(t)\varphi'(t)\,dt \;=\; -\int\limits_I v(t)\varphi(t)\,dt \quad \text{в} \quad Z \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(I).$$

   Другими словами, у $u \in L_p(I; X)$ есть слабая производная по времени, если

   $$\exists\, Z \;\text{ — банахово :} \quad X \hookrightarrow Z \quad \text{и} \quad \exists\, \frac{du}{dt} \in L_q(I; Z)$$

3. **Двойственность относительно гильбертова пространства**

   Определение. Пусть X рефлексивно и $X \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} H$, т.е. банахово пространство X вложено в гильбертово пространство H, причем вложение непрерывно и плотно. Будем говорить, что X вложено в X^* при помощи скалярного произведения в H, если элементы $u \in X$ (равно как и элементы $u \in H$) отождествляются с линейными функционалами

   $$u \in H \;\mapsto\; f_u \in X^*, \qquad f_u(w) \;:=\; (u, w)_H, \qquad \forall\, w \in X.$$

   - $X \overset{dense}{\hookrightarrow} H \overset{dense}{\hookrightarrow} X^* \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad X \overset{dense}{\hookrightarrow} H \simeq H^* \overset{dense}{\hookrightarrow} X^*$
   - $\|f_u\|_{X^*} \;\le\; c_1 \|u\|_H \;\le\; c_2 \|u\|_X, \quad \forall\, u \in X$
   - X^* изометрически изоморфно пополнению X (или H) по норме

     $$\|u\|_{X^*} \;:=\; \sup_{w \in X,\ \|w\|_X = 1} |(u, w)_H|$$

4. **Функции со слабой производной по времени из сопряженного пространства**

Теорема. Пусть $X \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} H \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} X^*$. Функция $v \in L_1(I; X^*)$ является слабой производной по времени от $u \in L_1(I; H)$ тогда и только тогда, когда для u и v выполняется тождество

$$\int\limits_I (u(t), w)_H \varphi'(t)\ dt \ = \ -\int\limits_I \langle v(t), w\rangle \varphi(t)\ dt, \qquad \forall\ w \in X, \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(I).$$

В этом случае $\forall\ w \in X$ отображение $t \mapsto (u(t), w)_H$ абс. непрерывно на I и

$$\frac{d}{dt}(u(t), w)_H \ = \ \langle u'(t), w\rangle, \qquad \text{п.в.} \ \ t \in (0, T), \qquad \forall\ w \in X.$$

5. **Уравнение $\boldsymbol{\partial_t u = \operatorname{div} f}$ в $\boldsymbol{\mathcal{D}'(Q_T)}$**

Теорема. Пусть $u \in L_2(Q_T)$ и $f \in L_q(Q_T; \mathbb{R}^n)$, $q \in (1, 2]$, удовлетворяют уравнению

$$\partial_t u \ = \ \operatorname{div} f \quad \text{ в } \quad \mathcal{D}'(Q_T),$$

то есть имеет место интегральное тождество

$$\int\limits_{Q_T} u \partial_t \eta\ dxdt \ = \ \int\limits_{Q_T} f \cdot \nabla \eta\ dxdt, \qquad \forall\ \eta \in C_0^\infty(Q_T).$$

Тогда

1) $\partial_t u \in L_q(0, T; W_q^{-1}(\Omega))$ и для п.в. $t \in (0, T)$ $\partial_t u(t) = \operatorname{div} f(t)$, в $W_q^{-1}(\Omega)$, т.е.

$$\langle \partial_t u(t), w\rangle \ = \ \int\limits_\Omega f(x, t) \cdot \nabla w(x)\ dx, \qquad \forall\ w \in \overset{\circ}{W}{}^1_{q'}(\Omega), \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0, T)$$

2) $\|\partial_t u\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(\Omega))} \ \le \ c\, \|f\|_{L_q(Q_T)}$

3) $u \in C([0, T]; W_q^{-1}(\Omega))$

4) $\forall\ w \in \overset{\circ}{W}{}^1_{q'}(\Omega)$ функция $t \mapsto \int\limits_\Omega u(x, t) w(x) dx$ абс. непрерывна на $[0, T]$

5) $\forall\ w \in \overset{\circ}{W}{}^1_{q'}(\Omega)$ $\frac{d}{dt} \int\limits_\Omega u(x, t) w(x)\ dx = \langle \partial_t u(t), w\rangle$ п.в. $t \in (0, T)$

1.4 Теоремы о непрерывности

1. **Теорема о сильной непрерывности**

   Теорема. Пусть X — рефлексивно и сеперабельно, H — гильбертово, $X \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} H \hookrightarrow X^*$, и пусть $u \in L_p(I;X)$, $p \in (1,+\infty)$, такова, что существует $u' \in L_{p'}(I;X^*)$ с $p' = \frac{p}{p-1}$. Тогда

   1) $u \in C(I;H)$
   2) функция $t \mapsto \|u(t)\|_H^2$ абсолютно непрерывна на I
   3) $\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 \ = \ 2\ \langle u'(t), u(t)\rangle$ в $\mathcal{D}'(I)$
   4) если $\bar{I} = [a,b]$ — компакт, то существует $c = c(a,b,p) > 0$, такая что

   $$\|u\|_{C([a,b];H)} \ \le \ c\Big(\|u\|_{L_p(I;X)} + \|u'\|_{L_{p'}(I;X)}\Big)$$

2. **Применение теоремы о сильной непрерывности**

   Теорема.

   1) Пространство $W_2^{-1}(\Omega)$ двойственно к $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ относительно $L_2(\Omega)$, и поэтому

   $$u \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)), \quad \partial_t u \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega)) \quad \Longrightarrow \quad u \in C([0,T];L_2(\Omega)),$$
   $$t \ \mapsto \ \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \quad \text{абс. непрерывна на } [0,T],$$
   $$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = 2\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle \quad \text{п.в. } \ t \in (0,T)$$

   2) $\partial\Omega \subset C^2 \implies$ пространство $L_2(\Omega)$ двойственно к $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$ относительно $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ со скалярным произведением $(\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)}$, причем форма двойственности есть

   $$\langle f, w\rangle \ = \ -(f, \Delta w)_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\ f \in L_2(\Omega), \qquad \forall\ w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega).$$

   Поэтому

   $$u \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)), \quad \partial_t u \in L_2(Q_T) \quad \Longrightarrow \quad \nabla u \in C([0,T];L_2(\Omega)),$$
   $$t \ \mapsto \ \|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \quad \text{абс. непрерывна на } [0,T],$$
   $$\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = -2\left(\partial_t u(t), \Delta u(t)\right)_{L_2(\Omega)} \quad \text{п.в. } \ t \in (0,T)$$

3. **Слабая непрерывность**

Определение. $u : I \to X$ наз. *слабо непрерывной* в точке $t_0 \in I$, если

$$\langle u(t) - u(t_0), f \rangle \ \to \ 0 \qquad \text{при} \qquad t \to t_0 \qquad \text{для любого} \qquad f \in X^*.$$

Функция u называется *слабо непрерывной* на множестве I, если она слабо непрерывна в каждой точке этого множества. Обозначим

$$C_w(I;X) \ := \ \{ \ u : I \to X, \ u \text{ — слабо непрерывна на } I \ \}$$

$$u \in C_w(I;X) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \ f \in X^* \quad \text{функция} \ \ t \mapsto \langle f, u(t) \rangle \ \ \text{непрерывна на} \ \ I.$$

- $C(I;X) \subset C_w(I;X)$
- Если X — слабо секвенциально полно и $I = [a,b]$ — компакт, то $C_w([a,b];X)$ слабо секвенциально полно
- X рефлексивно, $u \in C_w(I;X) \quad \Longrightarrow \quad u \in C(I;X)$ в том и только том случае, когда отображение $t \in I \ \mapsto \ \|u(t)\|_X$ непрерывно

4. **Теорема о слабой непрерывности**

Теорема. Пусть $X \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} Y$ и $Y^* \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} X^*$. Тогда

$$u \in L_\infty(I;X) \cap C_w(\bar{I};Y) \quad \Longrightarrow \quad u \in C_w(\bar{I};X)$$

В частности, в классе эквивалентности $u \in L_\infty(I;X)$ существует единственный представитель $\bar{u}$, принадлежащий $C_w(I;X)$.

5. **Применение теоремы о слабой непрерывности**

Теорема. Пусть $u \in L_2(Q_T)$ и $f \in L_q(Q_T;\mathbb{R}^n)$, $q \in [1,2]$, удовлетворяют уравнению

$$\partial_t u \ = \ \operatorname{div} f \quad \text{ в } \quad \mathcal{D}'(Q_T),$$

то есть имеет место интегральное тождество

$$\int\limits_{Q_T} u \partial_t \eta \ dxdt \ = \ \int\limits_{Q_T} f \cdot \nabla \eta \ dxdt, \qquad \forall \ \eta \in C_0^\infty(Q_T).$$

Тогда

1) $u \in C([0,T]; W_q^{-1}(\Omega))$ и справедливо тождество

$$\frac{d}{dt} \int\limits_\Omega u(x,t) w(x) \ dx \ = \ \int\limits_\Omega f(x,t) \cdot \nabla w(x) \ dx, \qquad \forall \ w \in \overset{\circ}{W}{}^1_{q'}(\Omega) \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T).$$

2) если $u \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, то $u \in C_w([0,T];L_2(\Omega))$.

Более того, в классе эквивалентности $u \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ существует представитель $\bar{u}$, такой что $u(t) = \bar{u}(t)$ при п.в. $t \in I$ и $\bar{u}(t) \in L_2(\Omega)$ при *любом* $t \in [0,T]$, причем функция $t \mapsto \|\bar{u}(t)\|_{L_2(\Omega)}$ полунепрерывна снизу:

$$\forall\ t_0 \in (0,T) \qquad \|\bar{u}(t_0)\|_{L_2(\Omega)} \le \liminf_{t\to t_0} \|\bar{u}(t)\|_{L_2(\Omega)}$$

3) если $u \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$ и $f \in L_2(Q_T)$, то $u \in C([0,T];L_2(\Omega))$ и

$$\forall\ t_0 \in (0,T) \qquad \|\bar{u}(t_0)\|_{L_2(\Omega)} = \lim_{t\to t_0} \|\bar{u}(t)\|_{L_2(\Omega)}$$

Более того, функция $t \mapsto \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$ и

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ = \ \int\limits_\Omega f(x,t)\cdot\nabla u(x,t)\ dx, \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T).$$

1.5 Анизотропные пространства Соболева

1. **Определение анизотропных пространств Лебега и Соболева**

   Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытая область, $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$, p, $r \in [1,+\infty)$. Обозначим

$$L_{p,r}(Q_T) \;:=\; L_r(0,T;L_p(\Omega))$$

$$\|u\|_{L_{p,r}(Q_T)} \;:=\; \Big(\int\limits_0^T \|u(t)\|^r_{L_p(\Omega)}\,dt \Big)^{1/r}$$

$$L_{p,\infty}(Q_T) \;:=\; L_\infty(0,T;L_p(\Omega))$$

$$\|u\|_{L_{p,\infty}(Q_T)} \;:=\; \sup_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_{L_p(\Omega)}$$

$$W^{1,0}_p(Q_T) \;:=\; \{\, u \in L_p(Q_T):\; \nabla u \in L_p(Q_T) \,\}$$

$$\|u\|_{W^{1,0}_p(Q_T)} \;:=\; \|u\|_{L_p(Q_T)} \;+\; \|\nabla u\|_{L_p(Q_T)}$$

$$W^{2,1}_p(Q_T) \;:=\; \{\, u \in W^{1,0}_p(Q_T):\; \nabla^2 u \in L_p(Q_T),\; \partial_t u \in L_p(Q_T) \,\}$$

$$\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T)} \;:=\; \|u\|_{W^{1,0}_p(Q_T)} \;+\; \|\nabla^2 u\|_{L_p(Q_T)} \;+\; \|\partial_t u\|_{L_p(Q_T)}$$

2. **“Параболические” теоремы вложения**

   Теорема. *Пусть Ω — ограниченная липшицева область, $p \in [1,+\infty)$. Тогда*

$$W^{2,1}_p(Q_T) \hookrightarrow \begin{cases} W^{1,0}_q(Q_T), & \text{при} \quad 1 \le p < n+2, \quad 1 \le q \le \frac{(n+2)p}{n+2-p} \\ C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\bar Q_T), & \text{при} \quad p > n+2, \quad 0 \le \alpha \le 1-\frac{n+2}{p} \end{cases}$$

$$W^{2,1}_p(Q_T) \hookrightarrow \begin{cases} L_q(Q_T), & \text{при} \quad 1 \le p < \frac{n+2}{2}, \quad 1 \le q \le \frac{\frac{n+2}{2}p}{\frac{n+2}{2}-p} \\ C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar Q_T), & \text{при} \quad p > \frac{n+2}{2}, \quad 0 \le \alpha \le 1-\frac{n+2}{2p} \end{cases}$$

3. **Компактность “параболических” вложений**

   Теорема. *Пусть Ω — ограниченная липшицева область, $p \in [1,+\infty)$. Тогда*

$$W^{2,1}_p(Q_T) \overset{\text{comp}}{\hookrightarrow} \begin{cases} W^{1,0}_q(Q_T), & \text{при} \quad 1 \le p < n+2, \quad 1 \le q < \frac{(n+2)p}{n+2-p} \\ C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\bar Q_T), & \text{при} \quad p > n+2, \quad 0 \le \alpha < 1-\frac{n+2}{p} \end{cases}$$

$$W^{2,1}_p(Q_T) \overset{\text{comp}}{\hookrightarrow} \begin{cases} L_q(Q_T), & \text{при} \quad 1 \le p < \frac{n+2}{2}, \quad 1 \le q < \frac{\frac{n+2}{2}p}{\frac{n+2}{2}-p} \\ C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar Q_T), & \text{при} \quad p > \frac{n+2}{2}, \quad 0 \le \alpha < 1-\frac{n+2}{2p} \end{cases}$$

4. **Следы функций из $W_2^{1,0}(Q_T)$ на боковой поверхности $\Gamma_T := \partial\Omega \times (0, T)$**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — огр. липшицева область, $Q_T := \Omega \times (0,T)$. Тогда для любой $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ след этой функции на боковой поверхности $\Gamma_T := \partial\Omega \times (0,T)$ принадлежит пространству $L_2(\Gamma_T)$ (на самом деле $W_2^{\frac{1}{2},0}(\Gamma_T)$) и при этом справедлива оценка

$$\|u\|_{L_2(\Gamma_T)} \ \le \ c_\Omega \, \|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}$$

5. **Следы функций из $W_2^{2,1}(Q_T)$ на сечениях $t = t_0$**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — огр. область класса C^2, $Q_T := \Omega \times (0,T)$, $t_0 \in [0,T]$. Тогда

   1) для любой функции $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$ след этой функции $u(\cdot, t_0) := u|_{t=t_0}$ на сечении $\Omega \times \{t = t_0\}$ принадлежит пространству $W_2^1(\Omega)$ и при этом справедлива оценка
   $$\|u(\cdot,t_0)\|_{W_2^1(\Omega)} \ \le \ c_\Omega \, \|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)}$$
   2) $\|u(\cdot,t) - u(\cdot,t_0)\|_{W_2^1(\Omega)} \to 0$ при $t \to t_0$
   3) $W_2^{2,1}(Q_T)$ непрерывно вкладывается в $C([0,T]; W_2^1(\Omega))$

6. **Анизотропные пространства Соболева как пр–ва банаховозначных функций**

   Теорема. Пусть $p \in [1, +\infty)$.

   1) $W_p^{1,0}(Q_T) \ = \ L_p(0,T; W_p^1(\Omega))$
   2) $W_p^{2,1}(Q_T) \ = \ L_p(0,T; W_p^2(\Omega)) \cap W_p^1(0,T; L_p(\Omega))$

7. **Теоремы о плотности функций с разделенными переменными**

   Теорема. Пусть $p \in [1, +\infty)$, $m \in \mathbb{N}$.

   1) Для любого $\varepsilon > 0$ и любой $\eta \in C_0^\infty(Q_T)$ существуют функции $\{w_k\}_{k=1}^{N_\varepsilon} \subset C_0^\infty(\Omega)$ и функции $\{c_k\}_{k=1}^{N_\varepsilon} \subset C_0^\infty(0,T)$, такие что
   $$\Big\| \ \eta - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} c_k w_k \ \Big\|_{C^m(\bar{Q}_T)} \ < \ \varepsilon.$$
   2) функции вида $\eta^N(x,t) := \sum\limits_{k=1}^{N} c_k(t) w_k(x)$, где $c_k \in C^\infty([0,T])$ и $w_k \in C_0^\infty(\Omega)$ плотны в
   $$\Big\{ \ u \in W_p^{1,0}(Q_T) : \ u|_{\partial\Omega\times(0,T)=0} \ \Big\} \ = \ L_p(0,T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)),$$
   а функции η^N того же вида где $c_k \in C_0^\infty([0,T))$ и $w_k \in C_0^\infty(\Omega)$ плотны в
   $$\Big\{ \ u \in W_p^{1,1}(Q_T) : \ u|_{\partial\Omega\times(0,T)=0}, \ \eta|_{t=T} = 0 \ \Big\}$$
   3) функции $\eta^N(x,t) := \sum\limits_{k=1}^{N} c_k(t) w_k(x)$, $c_k \in C_0^\infty([0,T))$, $w_k \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ плотны в
   $$\Big\{ \ u \in W_p^{2,1}(Q_T) : \ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \ u|_{t=T} = 0 \ \Big\}$$

2 Начально–краевые задачи для параболич. уравнений

2.1 Постановка начально-краевых задач

1. **Линейные параболические уравнения 2-го порядка**

   Мы будем рассмаривать PDE вида

   $$\partial_t u - \operatorname{div}\big(a(x,t)\nabla u\big) + b(x,t)\cdot\nabla u + c(x,t)u \ = \ f(x,t) \quad \text{в} \quad Q_T$$

   Здесь $u : Q_T \to \mathbb{R}$ — неизвестная функция, а функция $f : Q_T \to \mathbb{R}$ и коэффициенты a_{jk}, b_j, $c : Q_T \to \mathbb{R}$ считаются заданными.

2. **Уловия на коэффициенты дифференциального оператора**

   На протяжении всего нашего курса мы всегда будем считать, что следующие условия выполняются по умолчанию:

   - $a(x,t) := (a_{jk}(x,t))$ — симметричная вещественная $n\times n$-матрица, удовлетворяющая условию равномерной эллиптичности:

     $$a_{jk} = a_{kj}, \qquad a_{jk} \in L_\infty(Q_T),$$

   - $b(x,t) := (b_j(x,t))$ — вещественный n–мерный вектор, $c(x,t)$ — скалярная функция:

     $$b_j \in L_\infty(Q_T), \qquad c \in L_\infty(Q_T)$$

   - $\nu_1 > 0$ — мажоранта L_∞–норм коэффициентов:

     $$\|a\|_{L_\infty(Q_T)} \ + \ \|b\|_{L_\infty(Q_T)} \ + \ \|c\|_{L_\infty(Q_T)} \ \le \ \nu_1,$$

3. **Условие равномерной параболичности**

   Мы будем использовать следующие обозначения для дифференциальных операторов:

   $$\mathcal{L}u := -\operatorname{div}(a\nabla u) + b\cdot\nabla u + cu, \qquad \mathcal{M}u := \partial_t u + \mathcal{L}u$$

   На протяжении всего курса мы будем считать выполнненным следующее условие:

   $$\exists\ \nu_0 > 0: \quad a_{jk}(x,t)\xi_j\xi_k \ge \nu_0|\xi|^2, \qquad \text{п.в.} \quad (x,t)\in Q_T, \quad \forall\ \xi\in\mathbb{R}^n.$$

   При выполнении этого условия дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ при п.в. $t\in(0,T)$ является равномерно эллиптическим в Ω. В этом случае соответствующий ему дифференциальный оператор $\mathcal{M} = \partial_t + \mathcal{L}$ наз. *равномерно параболическим* в Q_T.

4. **Начально-краевые задачи для параболических уравнений**

Чтобы данные задачи определяли решение u однозначно, нам необходимо дополнить уравнение краевыми и начальными условиями. В нашем курсе мы всегда будем рассматривать однородные краевые условия. Начальное данное $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ считается заданной функцией. Мы будем использовать следующую терминологию:

- первая начально-краевая задача

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u = f \quad \text{в} \quad Q_T \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

- вторая начально-краевая задача

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u = f \quad \text{в} \quad Q_T \\ (a\nabla u)\cdot\nu|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

- третья начально-краевая задача, $\sigma : \partial\Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ — заданная функция

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u = f \quad \text{в} \quad Q_T \\ \Big((a\nabla u)\cdot\nu + \sigma u\Big)\Big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

5. **Классические решения**

Определение. Пусть a_{ij}, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$, b_i, $c \in C(Q_T)$, $u_0 \in C(\bar{\Omega})$, $f \in C(Q_T)$. *Классическим решением* задачи

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u = f \quad \text{в} \quad Q_T \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

наз. функция $u \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$, удовлетворяющая данным соотношениям поточечно.

2.2 Слабые решения

1. **Билинейая форма, соответствующая оператору $\mathcal{L}$**

   Определение. Определим на пространстве $W_2^{1,0}(Q_T)$ билинейную форму

$$\mathcal{L}[u,\eta] \ := \int\limits_{Q_T} \Big(a\nabla u\cdot\nabla\eta + b\cdot\nabla u\,\eta + cu\eta\Big)dxdt, \qquad u,\eta\in W_2^{1,0}(Q_T).$$

2. **Определение обобщенного решения**

   Определение. Пусть $u_0\in L_2(\Omega)$, $f\in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$. *Обобщенным* (или *слабым*) решением задачи

$$\begin{cases} \partial_t u+\mathcal{L}u \ = \ f \quad \text{в} \quad Q_T \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} \ = \ 0 \\ u|_{t=0} \ = \ u_0 \end{cases} \tag{$*$}$$

   называется функция $u\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$-\int\limits_{Q_T} u\partial_t\eta\;dxdt \ + \ \mathcal{L}[u,\eta] \ = \ \int\limits_{\Omega} u_0(x)\eta(x,0)\;dx \ + \ \int\limits_0^T \langle f(t),\eta(t)\rangle\;dt, \tag{$**$}$$
$$\forall\ \eta\in W_2^{1,1}(Q_T), \quad \text{таких, что} \quad \eta|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0, \quad \eta|_{t=T}=0.$$

3. **Эквивалентные определения обобщенных решений**

   Приведенное выше определение обобщенного решения использует минимум информации о гладкости функции u (краевое условие понимается в смысле теории следов, а начальное условие включено в интегральное тождество, поскольку функции класса $W_2^{1,0}(Q_T)$ не имеют следов на поверхностях $t=\ \mathrm{const}$). Такое определение удобно для доказательства теорем существования (необходимо проверять минимум условий).

   Однако оказывается, что всякое обобщенное решение в смысле данного нами определения обладает рядом дополнительных свойств. Поэтому мы можем дать эквивалентное определение обобщенного решения задачи $(*)$. В этом эквивалентном определении собрана "максимальная" информация, которую мы можем получить для обобщенных решений автоматически, без каких либо дополнительных предположений о гладкости данных задачи.

4. **Свойства обобщенных решений**

   Теорема. Пусть $u_0\in L_2(\Omega)$, $f\in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$. Следующие условия эквивалентны:

   1) функция $u\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ является обобщенным решением задачи $(*)$

2) функция $u \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ удовлетвояет соотношению

$$-\int\limits_0^T (u(t),w)\xi'(t)\,dt + \int\limits_0^T \Big(\big(a(t)\nabla u(t),\nabla w\big) + \big(b(t)\cdot\nabla u(t) + c(t)u(t),w\big)\Big)\xi(t)\,dt \ =$$

$$= \ (u_0,w)\xi(0) \ + \ \int\limits_0^T \langle f(t),w\rangle\xi(t)\,dt,$$

$$\forall\ w\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\qquad \forall\,\xi\in W_2^1(0,T):\qquad \xi(T)=0.$$

Напомним, что $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$.

3) функция u принадлежит классу

$$u \ \in \ C([0,T];L_2(\Omega)) \ \cap \ L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),$$
$$\partial_t u \ \in \ L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$$

для любой $w\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ при п.в. $t\in(0,T)$ выполняется тождества

$$\langle\partial_t u(t),w\rangle \ + \int\limits_\Omega \Big(a(t)\nabla u(t)\cdot\nabla w + b(t)\cdot\nabla u(t)\,w + c(t)u(t)w\Big)\,dx \ = \ \langle f(t),w\rangle$$

и $u(x,0)=u_0(x)$ п.в. $x\in\Omega$

5. Гладкие решения являются обобщенными

Теорема. Пусть $u_0\in C^2(\bar\Omega)$, $u_0|_{\partial\Omega}=0$, $f\in C(\bar Q_T)$.

1) Пусть $u\in C^{2,1}(\bar Q_T)$ — классическое решение задачи $(*)$. Тогда u — обобщенное решение задачи $(*)$.
2) Пусть u — обобщенное решение задачи $(*)$ и предположим, что $u\in C^{2,1}(\bar Q_T)$. Тогда u — классическое решение задачи $(*)$.

2.3 Энергетическое неравенство и единственность слабых решений

1. **Лемма Гронуолла**

   Теорема. Пусть $a \in L_1(0,T)$ и $f \in L_1(0,T)$ — неотрицатиельные функции, и предположим, что неотрицательная функция $y \in W_1^1(0,T)$ удовлетворяет неравенству

$$y'(t) \;\le\; a(t)y(t) \;+\; f(t), \qquad \text{п.в. } t \in (0,T).$$

   Тогда для всех $t \in [0,T]$ справедлива оценка

$$y(t) \;\le\; e^{\int\limits_0^t a(\tau)\;d\tau} \left(y(0) \;+\; \int\limits_0^t f(\tau)\;d\tau \right).$$

2. **Энергетическое неравенство**

   Теорема. Существует постоянная $c = c(n,\Omega,T,\nu_0,\nu_1) > 0$, такая что для любых $u_0 \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$ всякое обобщенное решение u задачи

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t u + \mathcal{L}u \;&=\; f \quad \text{в} \quad Q_T \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} \;&=\; 0 \\ u|_{t=0} \;&=\; u_0 \end{aligned} \right. \tag{$*$}$$

   удовлеторяет оценкам

$$\|u\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \;+\; \|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \;+\; \|\partial_t u\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \;\le\; c\Big(\;\|u_0\|_{L_2(\Omega)} \;+\; \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \Big)$$

3. **Теорема единственности в энергетическом классе**

   Теорема. Пусть u_1 и u_2 — два обобщенных решения задачи $(*)$, соответствующих одному и тому же начальному данному $u_0 \in L_2(\Omega)$ и одной и той же правой части $f \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$. Тогда $u_1 \equiv u_2$ в Q_T.

2.4 Существование слабых решений

1. **Теорема существования в энергетическом классе**

   Теорема. Для любых $u_0 \in L_2(\Omega)$ и $f \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$, существует единственное обобщенное решение $u \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap W_2^{1,0}(Q_T)$ задачи

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u = f \quad \text{в} \quad Q_T, \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{$*$}$$

2. **План доказательства**

   - Построение конечномерных приближений
   - Энергетическая оценка
   - Предельный переход

3. **Галеркинские приближения**

   Теорема. Пусть функции $\{w_k\}_{k=1}^\infty \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и

   - $\{w_k\}_{k=1}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$
   - $\{w_k\}_{k=1}$ образуют ортогональный базис в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ $\big($отн. ск. произв. $(\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)}\big)$

   (Например, в качестве $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ можно взять полную систему собственных функций задачи Дирихле для оператора Лапласа в Ω). Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ существует и притом единственный набор коэффициентов $\{C_k^N\}_{k=1}^N$, $C_k^N \in W_2^1(0,T)$, таких что функция

$$u^N(x,t) \ := \ \sum_{k=1}^N C_k^N(t) w_k(x), \qquad u^N \in W_2^{1,1}(Q_T)$$

   для любого $k = 1, 2, \dots, N$ удовлетворяет тождеству

$$(\partial_t u^N(t), w_k) + (a(t)\nabla u^N(t), \nabla w_k) + (b(t)\nabla u^N(t), w_k) + (c(t)u^N(t), w_k) \ = \ \langle f(t), w_k\rangle, \tag{$\star$}$$

   а также начальному условию

$$u^N(x,0) \ = \ u_0^N(x) \qquad \text{п.в.} \quad x \in \Omega,$$

   где

$$u_0^N(x) \ := \ \sum_{k=1}^N c_k w_k(x), \qquad c_k := \int\limits_\Omega u_0(x) w_k(x)\, dx, \qquad k = 1, 2, \dots$$

4. Энергетическая оценка

Теорема. Существует постоянная $C = C(\Omega, T, n, \nu_0, \nu_1) > 0$, такая что для любого $N \in \mathbb{N}$ галеркинские приближения $u^N \in W_2^{1,1}(Q_T)$ в задаче $(*)$ удовлетворяют оценкам

$$\|u^N\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} + \|u^N\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \le C \left(\|u_0\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \right)$$

5. Предельный переход

Теорема. Пусть подпоследовательность $\{u^{N_k}\} \subset W_2^{1,1}(Q_T)$ галеркинских приближений в задаче $(*)$ сходится слабо в $W_2^{1,0}(Q_T)$ к некоторой функции $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$, т.е.

$$u^{N_k} \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L_2(Q_T), \qquad \nabla u^{N_k} \rightharpoonup \nabla u \quad \text{в} \quad L_2(Q_T).$$

Тогда u является обобщенным решением задачи $(*)$.

2.5 Сильные решения

1. **Определение сильного решения**

   Определение. Пусть $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $f \in L_2(Q_T)$, $\nabla a \in L_\infty(Q_T)$. *Сильным* решением начально–краевой задачи

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t u + \mathcal{L}u &=& f \quad \text{в} \quad Q_T \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} &=& 0 \\ u|_{t=0} &=& u_0 \end{array}\right. \qquad (*)$$

   мы будем называть функцию $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$, удовлетворяющую уравнению п.в. в Q_T, а начальному и краевому условию — в смысле следов.

   Замечание. Всякое сильное решение является обобщенным.

2. **Теорема существования в классе сильных решений**

   Теорема. Пусть Ω — область класса C^2 и пусть

$$\exists\ \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_l} \in L_\infty(Q_T), \qquad \exists\ \frac{\partial a_{jk}}{\partial t} \in L_\infty(Q_T), \qquad \|\nabla a\|_{L_\infty(Q_T)} + \|\partial_t a\|_{L_\infty(Q_T)} \ \le\ \nu_2.$$

   Тогда для любых $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и $f \in L_2(Q_T)$ существует единственное сильное решение $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$ задачи $(*)$, причем имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \ \le\ c\Big(\ \|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}\ \Big),$$

   в которой постоянная $c > 0$ зависит только от n, Ω, T, ν_0, ν_1 и ν_2.

3. **План доказательства коэрцитивной оценки**

   Предположим, что u — гладкая.

   - Обозначим $f_0 := f - b\cdot\nabla u - cu$. Тогда с учетом энергетической оценки

$$\|f_0\|_{L_2(Q_T)} \ \le\ c\Big(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}\Big) \ \le\ c\Big(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}\Big)$$

   - Умножим уравнение $\partial_t u + \mathcal{L}u = f$ на $\partial_t u$ и проинтегрируем результат по Ω:

$$\|\partial_t u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + (a(t)\nabla u(t), \partial_t \nabla u(t)) = (f_0(t), \partial_t u(t))$$

   - С учетом симметричности матрицы $a(t)$ преобразуем

$$(a(t)\nabla u(t), \partial_t\nabla u(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(a(t)\nabla u(t), \nabla u(t)) - \left(\frac{\partial a}{\partial t}(t)\nabla u(t), \nabla u(t)\right)$$

- Проинтегрируем по $t \in (0,T)$ соотношение

$$\|\partial_t u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(a(t)\nabla u(t), \nabla u(t)) + \left(\frac{\partial a}{\partial t}(t)\nabla u(t), \nabla u(t)\right) + (f_0(t), \partial_t u(t))$$

  Получим

$$\|\partial_t u\|^2_{L_2(Q_T)} = \tfrac{1}{2}(a(0)\nabla u_0, \nabla u_0) \underbrace{-\tfrac{1}{2}(a(T)\nabla u(T), \nabla u(T))}_{\le 0} +$$

$$+\int_0^T \left(\frac{\partial a}{\partial t}(t)\nabla u(t), \nabla u(t)\right) dt + \int_0^T (f_0(t), \partial_t u(t))\, dt$$

- Учитывая условия на коэффициенты, получаем оценку

$$\|\partial_t u\|^2_{L_2(Q_T)} \;\le\; \frac{\nu_1}{2}\|\nabla u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \nu_2\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)} + \|f_0\|_{L_2(Q_T)}\|\partial_t u\|_{L_2(Q_T)}$$

  Применяя неравенство Юнга $ab \le \varepsilon a^2 + C_\varepsilon b^2$, а также энергетическую оценку и оценку для $\|f_0\|_{L_2(Q_T)}$, получаем

$$\|\partial_t u\|^2_{L_2(Q_T)} \;\le\; c\left(\|\nabla u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q_T)}\right)$$

- Обозначим $f_1 := f_0 - \partial_t u$. Тогда $f_1 \in L_2(Q_T)$ и

$$\|f_1\|_{L_2(Q_T)} \;\le\; \|f_0\|_{L_2(Q_T)} + \|\partial_t u\|_{L_2(Q_T)} \;\le\; c\left(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W^1_2(\Omega)}\right)$$

  Для любого $t \in (0,T)$ функция $u(t) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ является обобщенным решением задачи Дирихле для эллиптического уравнения

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big(a(t)\nabla u(t)\big) \;=\; f_1(t) \quad \text{в} \quad \Omega \\ u(t)|_{\partial\Omega} \;=\; 0 \end{cases}$$

- Поскольку $\partial\Omega \subset C^2$ и для п.в. $t \in (0,T)$ имеет место включение $f_1(t) \in L_2(\Omega)$, из эллиптической теории (см. параграфы “Второе основное неравенство” или “Оценка вторых производных”) получаем

$$\|u(t)\|_{W^2_2(\Omega)} \;\le\; c_\Omega\, \|f_1(t)\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\, t \in (0,T)$$

  Возводя эту оценку в квадрат и интегрируя по $t \in (0,T)$, получаем

$$\|u\|_{L_2(0,T;W^2_2(\Omega))} \;\le\; c\, \|f_1\|_{L_2(Q_T)}$$

- Учитывая оценку для $\|f_1\|_{L_2(Q_T)}$, получаем окончательно

$$\|u\|_{W^{2,1}_2(Q_T)} \;=\; \|u\|_{L_2(0,T;W^2_2(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L_2(Q_T)} \;\le\; c\left(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W^1_2(\Omega)}\right)$$

4. **Доказательство теоремы существования**

3 Свойства решений параболических уравнений

3.1 Параболический принцип максимума

1. **Свойства положительных матриц**

   Теорема. Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — вещественные симметричные матрицы $n \times n$. Обозначим через $A : B$ их скалярное произведение:

   $$A : B \;:=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.$$

   Предположим, что обе матрицы A и B неотрицательны, то есть

   $$A\xi\cdot\xi \geq 0, \qquad B\xi\cdot\xi \geq 0, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

   Тогда
   $$A : B \;\geq\; 0$$

2. **Значения производных функции в точки ее максимума**

   Теорема. Пусть $a \in C(\bar{Q}_T)$, $b \in C(\bar{Q}_T)$ и предположим, что $u \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ достигает своего максимума в точке $(x_0, t_0) \in Q_T := \Omega \times (0, T]$, то есть

   $$u(x_0, t_0) \;=\; \sup_{(x,t)\in Q_T} u(x, t).$$

   Тогда

   - $\nabla u(x_0, t_0) = 0$
   - $\partial_t u(x_0, t_0) \geq 0$
   - матрица $\nabla^2 u(x_0, t_0)$ отрицательна (т.е. все ее собственные числа $\leq\, 0$)
   - $a(x_0, t_0) : \nabla^2 u(x_0, t_0) \leq 0$
   - $\partial_t u(x_0, t_0) - a(x_0, t_0) : \nabla^2 u(x_0, t_0) + b(x_0, t_0)\cdot\nabla u(x_0, t_0) \;\geq\; 0$

3. **Слабый принцип максимума**

   Теорема. Пусть a, ∇a, $b \in C(\bar{Q}_T)$ и $u \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ удовлетворяет неравенству

   $$\partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) + b\cdot\nabla u \;\leq\; 0 \quad \text{в} \quad Q_T$$

   Тогда
   $$\sup_{Q_T} u \;\leq\; \sup_{\partial' Q_T} u$$

4. **Двусторонняя оценка**

Теорема. Пусть a, ∇a, $b \in C(\bar{Q}_T)$ и $u \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ удовлетворяет уравнению.

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) + b \cdot \nabla u \;=\; 0 \quad \text{в} \quad Q_T$$

Тогда имеет место двусторонняя оценка

$$\inf_{\partial' Q_T} u \;\le\; \sup_{Q_T} u \;\le\; \sup_{\partial' Q_T} u$$

5. **Теорема сравнения**

Теорема. Пусть a, ∇a, $b \in C(\bar{Q}_T)$ и пусть u_1, $u_2 \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ — два классических решения уравнения

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) + b \cdot \nabla u \;=\; 0 \quad \text{в} \quad Q_T$$

Тогда

$$u_1 \;\le\; u_2 \quad \text{на} \quad \partial' Q_T \qquad \Longrightarrow \qquad u_1 \;\le\; u_2 \quad \text{в} \quad Q_T$$

3.2 Параболическое неравенство Харнака

1. **Неравенство Харнака**

Теорема. Пусть $u \in C(\bar{Q}_{2R}) \cap C^\infty(Q_{2R})$, причем

$$u \geq 0 \quad \text{в} \quad Q_{2R},$$

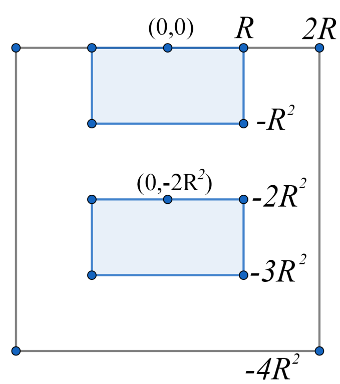
и u удовлетворяет уравнению

$$\partial_t u - \Delta u \;=\; 0 \qquad \text{в} \quad Q_{2R}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sup_{B_R \times (-3R^2, -2R^2)} u \;\leq\; c_* \inf_{B_R \times (-R^2, 0)} u,$$

в котором постоянная $c_* > 0$ зависит только от n.



2. **Уравнение для** $\ln u$

Лемма. Пусть $u \geq \varepsilon > 0$ в Q_{2R} и u удовлетворяет уравнению

$$\partial_t u - \Delta u \;=\; 0$$

Обозначим

$$v \;:=\; \ln u$$

Тогда

$$\partial_t v - \Delta v \;=\; |\nabla v|^2$$

3. **Неравенство Харнака в терминах функции** $v = \ln u$

$$v(x_2, t_2) - v(x_1, t_1) \;\geq\; -\gamma$$

4. **Формула Ньютона–Лейбница**

$$v(x_2,t_2) - v(x_1,t_1) \;=\; \int\limits_0^1 \Big(\nabla v(x_s,t_s)\cdot(x_2-x_1) + \partial_t v(x_s,t_s)(t_2-t_1) \Big)\, ds$$

5. **Что нужно доказать?**

$$\boxed{\partial_t v - \tfrac{1}{2}\,|\nabla v|^2 \;\ge\; -\frac{\mu}{R^2} \qquad \text{в} \qquad B_R\times(-3R^2,0)}$$

6. **Функция w_0**

$$w_0 \;:=\; \Delta v + \tfrac{1}{2}\,|\nabla v|^2$$

7. **Слабый принцип максимума**

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t w - \Delta w \;&\ge\; 0 \quad \text{в} \quad Q_{2R} \\ w|_{\partial' Q_{2R}} \;&\ge\; 0 \end{aligned} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad w \;\ge\; 0 \quad \text{в} \quad Q_{2R}$$

8. **Функция w**

$$w \;:=\; \zeta^4 w_0 \;+\; \underbrace{\frac{4\mu}{R^2}\left(1+\frac{t}{4R^2}\right)}_{\ge\;0\;\; t\in(-4R^2,0)}$$

9. **Уравнение для функции w**

$$\mathcal{M}_0 w \;=\; \zeta^4\mathcal{M}_v w_0 + 2(\zeta^4\nabla v - \nabla\zeta^4)\cdot\nabla w_0 + w_0\mathcal{M}_0\zeta^4 + \frac{\mu}{R^4}$$

10. **Свойства оператора $\mathcal{M}_v$**

Лемма. Пусть v удовлетворяет уравнению

$$\partial_t v - \Delta v \;=\; |\nabla v|^2,$$

Тогда

$$\mathcal{M}_v\Big(\Delta v + \tfrac{1}{2}\,|\nabla v|^2\Big) \;=\; |\nabla^2 v|^2$$

11. **Значение функции $\mathcal{M}_0 w$ в точке минимума z_0**

$$\nabla w(z_0) \;=\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \zeta(z_0)\nabla w_0(z_0) + 4w_0(z_0)\nabla\zeta(z_0) \;=\; 0$$

Следовательно, в точке z_0 выполняется соотношение

$$\mathcal{M}_0 w \;=\; \zeta^4|\nabla^2 v|^2 - 8\zeta^2 w_0(\zeta\nabla v - 4\nabla\zeta)\cdot\nabla\zeta + w_0\mathcal{M}_0\zeta^4 + \frac{\mu}{R^4}$$

12. **Оценка снизу для $\mathcal{M}_0 w(z_0)$**

$$\mathcal{M}_0 w(z_0) \;\ge\; \zeta^4(z_0)|\nabla^2 v(z_0)|^2 \;+\; \frac{\mu}{R^4} \;-\; \frac{c_*}{R^4}$$

13. **Выбор значения для постоянной $\mu > 0$**

$$\mu \;>\; c_*$$

14. **Принцип максимума для функции w**

Лемма. При указанном выборе значения постоянной $\mu > 0$ выполняется неравенство

$$w(x,t) \;\ge\; 0, \qquad \forall\ (x,t)\in Q_{2R}$$

15. **Что мы в итоге получили?**

$$\Delta v + \tfrac{1}{2}\,|\nabla v|^2 \;\ge\; -\,\frac{\mu}{R^2} \qquad \text{на} \qquad B_R\times(-3R^2,0)$$

16. **Избавляется от условия $u \ge \varepsilon > 0$**

3.3 Оценка осцилляции

1. **Определение осцилляции**

   Обозначим
$$M(z_0;R) \ := \ \sup_{Q_R(z_0)} u, \qquad m(z_0;R) \ := \ \inf_{Q_R(z_0)} u,$$
$$\omega(z_0;R) \ := \ M(z_0;R) - m(z_0;R) \ \equiv \ \operatorname*{osc}_{Q_R} u$$

   Точку $z_0 = 0$ в обозначениях будем опускать: $M(R) = M(0,R)$ итд.

2. **Оценка осцилляции**

   Теорема. Пусть $u \in C(\bar{Q}_{2R}) \cap C^\infty(Q_{2R})$ удовлетворяет уравнению
$$\partial_t u - \Delta u \ = \ 0 \qquad \text{в} \quad Q_{2R} \tag{$*$}$$

   Тогда справедливо неравенство
$$\operatorname*{osc}_{Q_R} u \ \le \ \delta \ \operatorname*{osc}_{Q_{2R}} u$$
   в котором $\delta \in (0,1)$, $\delta = 1 - \frac{1}{c_*}$, где $c_* > 1$ — постоянная из неравенства Харнака.

3.4 Теорема Лиувилля

1. **Теорема Лиувилля**

   Теорема. Пусть $\Pi_- := \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0)$, и пусть $u \in C^\infty(\Pi_-)$ — *античное* решение уравнения теплопроводности, т.е. u удовлетворяет уравнению теплопроводности на промежутке времени $(-\infty, 0)$:
   $$\partial_t u - \Delta u \ = \ 0 \qquad \text{в} \qquad \Pi_-.$$
   Предположим дополнительно, что
   $$u \in L_\infty(\Pi_-).$$
   Тогда $u = const$ в Π_-.

2. **Контрпример при $b \neq 0$**

   Как показывает следующий контрпример, в сформулированном нами варианте теоремы Лиувилля дрифт отсутствует по-существу. Дело в том, что при наличии в уравнении дрифта константа в оценке осцилляции зависит от некоторых норм дрифта. При итерациях этой оценки константа будет менятся неконтролируемым образом и мы не сможем провести доказательство. Если мы хотим включить в уравнение дрифт, нам следует установить “правильную” зависимость константы в неравенстве Харнака от некоторых (масштабно-инвариантных) норм дрифта. В конце параграфа мы приведем без доказательства формулировку теоремы Лиувилля для параболического уравнения с дрифтом.

   Приводимый ниже контрпример (J. Spruck) показывает, что для справедливости теоремы Лиувилля, скажем, одного лишь условия $b \in L_\infty(\Pi_-) \cap C^\infty(\Pi_-)$ заведомо недостаточно.

   Теорема. Пусть $n = 1$, и положим
   $$b(x) \ := \ \frac{2x}{1 + x^2}, \qquad u(x) \ := \ \operatorname{arctg} x$$
   Тогда $b \in L_\infty(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$, $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ является стационарным решением уравнения
   $$-\frac{d^2 u}{dx^2} + b(x)\frac{du}{dx} \ = \ 0 \qquad \text{в} \qquad \mathbb{R},$$
   и при этом
   $$u \in L_\infty(\mathbb{R}), \qquad u \ \neq \ const$$

3. **Теорема Лиувилля для уравнения с дрифтом**

   Теорема. Пусть $b \in L_{s,l}(\Pi_-) \cap C^\infty(\Pi_-)$, где $s \in (n, +\infty]$, $l \in [2, \infty)$,
   $$\|b\|_{L_{s,l}(\Pi_-)} \ := \ \left(\int\limits_{-\infty}^{0} \|b(\cdot, t)\|^l_{L_s(\mathbb{R}^n)} \ dt \right)^{1/l}, \qquad \boxed{\frac{n}{s} + \frac{2}{l} = 1}$$

и пусть $u \in C^\infty(\Pi_-)$ — *античное* решение уравнения

$$\partial_t u - \Delta u + b(x,t)\cdot\nabla u \; = \; 0 \qquad \text{в} \qquad \Pi_-.$$

Предположим дополнительно, что

$$u \in L_\infty(\Pi_-).$$

Тогда $u = const$ в Π_-.

3.5 Локальная гладкость слабых решений

1. L_2–**оценка старших производных**

Теорема. Пусть $f \in L_2(Q_{2R})$, и предположим, что

$$\nabla a \in L_\infty(Q_{2R}), \qquad \|\nabla a\|_{L_\infty(Q_{2R})} \ \le \ \frac{\nu_2}{R}.$$

Пусть $u \in L_{2,\infty}(Q_{2R}) \cap W_2^{1,0}(Q_{2R})$ — слабое решение уравнения

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) \ = \ f \quad \text{в} \quad Q_{2R},$$

то есть

$$\int\limits_{Q_{2R}} \Big(-u\partial_t\eta + a\nabla u\cdot\nabla\eta \Big)\, dxdt \ = \ \int\limits_{Q_{2R}} f\eta\, dxdt, \qquad \forall\, \eta \in C_0^\infty(Q_{2R}).$$

Тогда $u \in W_2^{2,1}(Q_R)$ и справедлива оценка

$$\|\partial_t u\|_{L_2(Q_R))} \ + \ \|\nabla^2 u\|_{L_2(Q_R)} \ \le \ \frac{c}{R}\,\|\nabla u\|_{L_2(Q_{2R})} \ + \ c\,\|f\|_{L_2(Q_{2R})}$$

в которой постоянная $c > 0$ зависит только от n, ν_0, ν_1 и ν_2.

2. **План доказательства оценки вторых производных**

Предположим, что a, f, u — гладкие.

1. Продиффиренцируем уравнение по x_k. Получим

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Big| \quad \partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) = f \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_t u_{,k} - \operatorname{div}(a\nabla u_{,k}) = \operatorname{div}\Big(\frac{\partial a}{\partial x_k}\nabla u\Big) + f_{,k}$$

2. Пусть $\zeta \in C_0^\infty(Q_{2R})$ — срезающая функция, такая что

$$\zeta \equiv 1 \quad \text{на} \quad Q_R, \qquad 0 \le \zeta \le 1, \qquad |\partial_t\zeta| + |\nabla\zeta|^2 \ \le \ \tfrac{c}{R^2}$$

Умножим умножим соотношение

$$\partial_t u_{,k} - \operatorname{div}(a\nabla u_{,k}) = \operatorname{div}\Big(\frac{\partial a}{\partial x_k}\nabla u\Big) + f_{,k} \qquad \Big|\ \cdot\zeta^2 u_{,k}, \quad \int\limits_\Omega \dots\ dx$$

на $w := \zeta^2 u_{,k}$ и результат принтегрируем по Ω. С учетом формулы интегрирования по частям и соотношения

$$\nabla(\zeta^2 u_{,k}) \ = \ \zeta^2\nabla u_{,k} \ + \ 2\zeta u_{,k}\nabla\zeta$$

получаем тождество (отметим, что по k подразумевается суммирование от 1 до n)

$$\int\limits_{B_{2R}} \Big(\zeta^2 \underbrace{u_{,k}\partial_t u_{,k}}_{=\frac12\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2} + \zeta^2 \underbrace{a\nabla u_{,k}\cdot\nabla u_{,k}}_{\ge \nu_0|\nabla^2 u|^2}\Big)\,dx \;=\; -2\int\limits_{B_{2R}} \zeta a\nabla u_{,k}\cdot u_{,k}\nabla\zeta\,dx \;-$$
$$-\int\limits_{B_{2R}} \frac{\partial a}{\partial x_k}\nabla u\cdot\Big(\zeta^2\nabla u_{,k} + u_{,k}\nabla\zeta^2\Big)\,dx \;+\; \int\limits_{B_{2R}} f_{,k}\zeta^2 u_{,k}\,dx$$

Последнее слагаемое оцениваем как

$$\int\limits_{B_{2R}} f_{,k}\zeta^2 u_{,k}\,dx \;=\; -\int\limits_{B_{2R}} f(\zeta^2 u_{,k})_{,k}\,dx \;=\; -\int\limits_{B_{2R}} f(\zeta^2 u_{,kk} + u_{,k}\zeta^2_{,k})\,dx$$

3. Из полученного тождества стандратными рассуждениями выводится оценка

$$\frac12\frac{d}{dt}\|\zeta\nabla u\|^2_{L_2(B_{2R})} + \frac{\nu_0}{2}\,\|\zeta\nabla^2 u\|^2_{L_2(B_{2R})} \;\le\; \frac{c}{R^2}\,\|\nabla u\|^2_{L_2(B_{2R})} \;+\; c\,\|f\|^2_{L_2(B_{2R})}$$

Интегрируя эту оценку по $t\in(-4R^2,0)$, с учетом $\zeta\equiv 1$ на Q_R получаем

$$\sup_{t\in(-R^2,0)} \|\nabla u(t)\|^2_{L_2(B_R)} + \|\nabla^2 u\|^2_{L_2(Q_R)} \;\le\; \frac{c}{R^2}\,\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_{2R})} \;+\; c\,\|f\|^2_{L_2(Q_{2R})}$$

4. Оценка $\partial_t u$ получается из уравнения $\partial_t v \;=\; \operatorname{div}(a\nabla u) + f$ в $Q_R \quad\Longrightarrow$

$$\|\partial_t u\|_{L_2(Q_R)} \;\le\; c\Big(\|\operatorname{div}(a\nabla u)\|_{L_2(Q_R)} + \|f\|_{L_2(Q_R)}\Big)$$

с учетом оценки

$$\|\operatorname{div}(a\nabla u)\||_{L_2(Q_R)} \;\le\; c\,\Big(\nu_1\,\|\nabla^2 u\|_{L_2(Q_R)} + \frac{\nu_2}{R}\,\|\nabla u\|_{L_2(Q_R)}\Big)$$

3. Свойства конечных разностей

Теорема. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\Omega'\Subset\Omega$, $d := \operatorname{dist}\{\bar\Omega',\partial\Omega\} > 0$. Для $k=1,\dots,n$, $|h|<d$ и $x\in\Omega'$ обозначим

$$\Delta^k_h u(x) := u(x+he_k) - u(x),$$

где e_k — k-ый орт базиса $\mathbb{R}^n$. Пусть $1\le p<+\infty$ и $u\in L_p(\Omega)$. Тогда

1) для любого $|h|<d$ и любой $\eta\in C_0^\infty(\Omega')$

$$\int\limits_\Omega \tfrac1h\Delta^k_h u\;\eta\,dx \;=\; \int\limits_\Omega u\;\tfrac1h\Delta^k_{-h}\eta\,dx;$$

2) если $1 < p < +\infty$ и существует $M > 0$, такая что

$$\sup_{|h|<d} \left\| \frac{1}{h} \Delta_h^k u \right\|_{L_p(\Omega')} \leq M,$$

то существует обобщенная производная $\frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_p(\Omega')$ и

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|_{L_p(\Omega')} \leq M$$

3) если $u \in W_p^1(\Omega)$, то для любого $|h| < d$ и любого $k = 1, \ldots, n$

$$\left\| \frac{1}{h} \Delta_h^k u \right\|_{L_p(\Omega')} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|_{L_p(\Omega)}$$

4. Доказательство гладкости решений

5. Локальная гладкость слабых решений

Теорема. В условиях предыдущей теоремы

$$a \in C^\infty(Q_R), \quad f \in C^\infty(Q_R) \quad \Longrightarrow \quad u \in C^\infty(Q_R).$$

Часть II

Уравнения Навье-Стокса, базовая теория

4 Предварительные сведения

Система уравнений Навье-Стокса описывает поле скоростей вязкой несжимаемой жидкостей $u : Q_T \to \mathbb{R}^3$ и давление $p : Q_T \to \mathbb{R}$ в зависимости от начальной скорости $a : \Omega \to \mathbb{R}^3$ и плотности действующей на жидкость объемной силы $f : Q_T \to \mathbb{R}$ (например, силы тяжести):

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u \ - \ \Delta u \ + \ (u \cdot \nabla) u \ + \ \nabla p \ = \ f \\ \operatorname{div} u \ = \ 0 \\ u|_{t=0} \ = \ a, \qquad u|_{\partial\Omega \times (0,T)} \ = \ 0 \end{array} \right. \quad \text{в} \quad Q_T \tag{NS}$$

Для простоты мы предполагаем плотность жидкости и коэффициент вязкости равными единице. Математически уравнения Навье-Стокса представляют из себя систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (отдаленно напоминающую прабаролическую) с квадратичными по u младшими членами.

4.1 Уравнение $\operatorname{div} u = f$

1. **Существование функции с заданной дивергенцией**

   Теорема. Пусть $s \in (1, +\infty)$. Для любого $g \in L_s(\Omega)$, такого что $[g]_\Omega = 0$, существует функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_s(\Omega)$, являющаяся решением задачи

   $$\left\{ \begin{array}{c} \operatorname{div} u = g \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega \end{array} \right.$$

   и удовлетворяющая оценке

   $$\|u\|_{W^1_s(\Omega)} \ \le \ c\,\|g\|_{L_s(\Omega)}$$

   в которой постоянная $c > 0$ зависит только от Ω, n, s. Более того, соответствие $g \mapsto u$ является линейным, от есть оно задается ограниченным линейным оператором

   $$T : \overset{\circ}{L}_s(\Omega) := \{\ g \in L_s(\Omega) :\ [g]_\Omega = 0\ \} \ \to\ \overset{\circ}{W}{}^1_s(\Omega), \qquad Tg = u, \qquad \|Tg\|_{W^1_s(\Omega)} \le c\,\|g\|_{L_s(\Omega)}$$

2. **Ингредиенты доказательства**

   - Разрешимость задачи Неймана

- Теорема о следах
- Продолжение внутрь области
- Значения ротора на границе

3. **Разрешимость задачи Неймана**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса C^2, $1 < s < +\infty$. Для любой функции $g \in L_s(\Omega)$, такой что $\int\limits_\Omega g(x)\,dx = 0$, существует единственная функция $\varphi \in W_s^2(\Omega)$, такая что $\int\limits_\Omega \varphi(x)\,dx = 0$ и

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = g \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

   При этом справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{W_s^2(\Omega)} \;\le\; C(n,s,\Omega)\;\|g\|_{L_s(\Omega)}$$

4. **Теорема о следах**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса C^2, $1 < s < +\infty$. Тогда для любой $\varphi \in W_s^2(\Omega)$ справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{W_s^{2-\frac{1}{s}}(\partial\Omega)} \;\le\; C(n,s,\Omega)\;\|\varphi\|_{W_s^2(\Omega)}$$

5. **Продолжение внутрь области**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса C^2, $1 < s < +\infty$. Существует ограниченный линейный оператор

$$T:\; W_s^{2-\frac{1}{s}}(\partial\Omega) \;\times\; W_s^{1-\frac{1}{s}}(\partial\Omega) \quad\to\quad W_s^2(\Omega),$$

   такой что для любых $a \in W_s^{2-\frac{1}{s}}(\partial\Omega)$, $b \in W_s^{1-\frac{1}{s}}(\partial\Omega)$ функция $w := T(a,b)$ обладает свойствами

   1) $w \in W_s^2(\Omega)$
   2) $w|_{\partial\Omega} = a, \quad \frac{\partial w}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = b$
   3) $\|w\|_{W_s^2(\Omega)} \;\le\; C(n,s,\Omega)\left(\|a\|_{W_s^{2-\frac{1}{s}}(\partial\Omega)} + \|b\|_{W_s^{1-\frac{1}{s}}(\partial\Omega)}\right)$

6. Значения ротора на границе

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область класса C^2, $1 < s < +\infty$. Предположим, что $A \in W_s^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ такова, что

$$A = 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega.$$

Тогда

$$\operatorname{rot} A = \nu \times \frac{\partial A}{\partial \nu} \quad \textit{на} \quad \partial\Omega.$$

7. Доказательство основного результата в случае $n = 3$

4.2 Пространства соленоидальных векторных полей

1. **Определения подпространств соленоидальных векторных полей**

   Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $1 \le s < +\infty$, $s' = \frac{s}{s-1}$.

   $$J_0^\infty(\Omega) \ := \ \{ \ u \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n) \ | \ \operatorname{div} u = 0 \ \text{ в } \ \Omega \ \}$$
   $$\overset{\circ}{J}{}^1_s(\Omega) \ := \ \text{Closure}_{\ W^1_s(\Omega;\mathbb{R}^n)} \ J_0^\infty(\Omega)$$
   $$\hat{J}^1_s(\Omega) \ := \ \{ \ u \in \overset{\circ}{W}{}^1_s(\Omega;\mathbb{R}^n) \ | \ \operatorname{div} u = 0 \ \text{ п.в. в } \ \Omega \ \}$$

   Замечание. Очевидно, что $\overset{\circ}{J}{}^1_s(\Omega)$ — подпространство $\hat{J}^1_s(\Omega)$.

2. **Основной результат**

   Теорема. Пусть $s \in (1, +\infty)$ и функционал $l \in W_s^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ обладает свойством
   $$l(\eta) \ = \ 0, \qquad \forall \ \eta \in J_0^\infty(\Omega).$$
   Тогда существует единственная функция $p \in L_s(\Omega)$, $[p]_\Omega = 0$, такая что
   $$l(\eta) \ = \ \int\limits_\Omega p(x) \operatorname{div} \eta(x) \ dx, \qquad \forall \ \eta \in \overset{\circ}{W}{}^1_{s'}(\Omega),$$
   и при этом справедлива оценка
   $$\|p\|_{L_s(\Omega)} \ \le \ c \, \|l\|_{W_s^{-1}(\Omega)}$$

3. **Ингредиенты доказательства основного результата**

   - Теорема о плотности $J_0^\infty(\Omega)$ в $\hat{J}^1_2(\Omega)$
   - Теорема о разрешимости уравнения $\operatorname{div} u = g$
   - $(\overset{\circ}{L}_{s'}(\Omega))^* \simeq \overset{\circ}{L}_s(\Omega)$ при $s \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$

4. **Теорема о плотности для ограниченных областей**

   Теорема. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная липшицева область, $1 < s < +\infty$. Тогда*
   $$\overset{\circ}{J}{}^1_s(\Omega) \ = \ \hat{J}^1_s(\Omega).$$

   Доказательство: Это тонкий аналитический факт, доказательство которого мы не включаем в наш курс с целью экономии времени. Его доказательство можно найти, например, в [13, Theorem 5.8]. $\square$

   Контрпример (Heywood). Существует неограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, такая что
   $$\overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega) \ \subset \ \hat{J}^1_2(\Omega), \qquad \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega) \ \ne \ \hat{J}^1_2(\Omega).$$

5. **Доказательство основного результата**

4.3 Разложение Гельмгольца-Вейля

1. **Обозначения**

Пусть $s \in (1, +\infty)$. Обозначим через $\overset{\circ}{J}_s(\Omega)$ и $G_s(\Omega)$ п/пр–ва в $L_s(\Omega) := L_s(\Omega; \mathbb{R}^n)$:

- $\overset{\circ}{J}_s(\Omega) \ := \ \text{Closure}_{\ L_s(\Omega)} \ J_0^\infty(\Omega)$
- $G_s(\Omega) \ := \ \{ \ v \in L_s(\Omega) \mid \exists \ \varphi \in W_s^1(\Omega) : \ v = \nabla\varphi \ \text{ п.в. в } \ \Omega \ \}$

В случае $s = 2$ иногда будем обозначать $\overset{\circ}{J}(\Omega) := \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ и $G(\Omega) := G_2(\Omega)$.

2. **Разложение Гельмгольца–Вейля**

Теорема. Подпространства $\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ и $G_2(\Omega)$ ортогональны в $L_2(\Omega)$ и

$$L_2(\Omega; \mathbb{R}^n) \ = \ \overset{\circ}{J}_2(\Omega) \ \oplus \ G_2(\Omega)$$

то есть

$$\forall \, f \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^n) \quad \exists! \, u \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega), \quad \exists! \, p \in W_2^1(\Omega) : \quad [p]_\Omega = 0,$$
$$f = u + \nabla p, \qquad \int\limits_\Omega u \cdot \nabla p \, dx \ = \ 0$$

3. **Историческое замечание**

Возможность представления произвольного гладкого убывающего на бесконечности векторного поля в виде суммы соленоидального и потенциального векторных полей было отмечено еще в в 19-ом веке Гельмгольцем. Для ограниченных областей Вейль заметил, что при надлежащем выборе краевых условий данное разложение будет ортогональным в $L_2(\Omega)$. О.А. Ладыженская доказала, что множество $J_0^\infty(\Omega)$ плотно в $G_2(\Omega)^\perp$. Этот факт имеет больше значение для всей дальнейшей теории, поэтому данную теорему иногда называют теоремой Ладыженской.

4. **Доказательство разложения Гельмгольца–Вейля**

5. **Что символизирует нолик в обозначении пространства $\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$?**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная липшицева. Тогда

$$\overset{\circ}{J}_2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega) \ = \ \left\{ \ u \in J_2^1(\Omega) : \quad u \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0 \text{ в смысле теории следов } \ \right\}$$

Таким образом, нолик в обозначении $\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ символизирует собой нулевую нормальную компоненту у функций: $\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ состоит из вектор–функций $v \in L_2(\Omega)$, таких что

- v соленоидально в смысле теории распределений
- нормальная компонента v на $\partial\Omega$ равна нулю "в обобщенном смысле"

6. **Проектор Лере**

Определение. Обозначим через P_J оператор ортогонального проектирования на подпространство $\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega;\mathbb{R}^n)$, т.е.

$$f \in L_2(\Omega;\mathbb{R}^n) \quad \exists!\, u \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega), \quad \nabla p \in G_2(\Omega): \quad f = u + \nabla p \quad \Longrightarrow \quad P_J f \ := \ u$$

Ортопроектор $P_J : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ называется *проектором Лере.*

7. **Проектор Лере и задача Неймана**

Теорема. Обозначим $P_J^\perp := I - P_J$ оператор ортогонального проектирования на подпространство $G_2(\Omega)$ в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Тогда $\nabla p = P_J^\perp f$ тогда и только тогда, когда $p \in W_2^1(\Omega)$ является обобщенным решением задачи Неймана

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta p &=& \operatorname{div} f \quad \text{в} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial p}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} &=& f\cdot\nu|_{\partial\Omega} \end{array} \right.$$

Здесь уравнение вместе с краевым условием понимается в смысле выполнения интегрального тождества

$$(\nabla p, \nabla w)_{L_2(\Omega)} \ = \ (f, \nabla w)_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\ \eta \in W_2^1(\Omega)$$

8. **Проектор Лере в пространствах $L_s(\Omega)$, $s \in (1,+\infty)$**

Теорема. Пусть $s \in (1,+\infty)$. Тогда

$$L_s(\Omega) \ = \ \overset{\circ}{J}_s(\Omega) \dotplus G_s(\Omega),$$

т.е.

$$\forall\ f \in L_s(\Omega) \qquad \exists!\, u \in \overset{\circ}{J}_s(\Omega), \qquad \exists!\, p \in G_s(\Omega): \qquad f = u + \nabla p,$$

и при этом выполняются неравенства

$$\|u\|_{L_s(\Omega)} \ \le \ c\,\|f\|_{L_s(\Omega)}, \qquad \|\nabla p\|_{L_s(\Omega)} \ \le \ c\,\|f\|_{L_s(\Omega)}$$

в которых постоянная $c > 0$ зависит только от Ω, n и s.

4.4 Стационарная задача Стокса

1. **Постановка задачи**

Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — заданная функция. Требуется найти функции $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $p : \Omega \to \mathbb{R}$, такие что

$$\begin{cases} -\Delta u \ + \ \nabla p \ = \ f \\ \quad \operatorname{div} u = 0 \\ \quad u|_{\partial\Omega} \ = \ 0 \end{cases} \qquad \text{в} \qquad \Omega, \tag{S$_0$}$$

2. **Обобщенные решения задачи Стокса**

Определение. Пусть $f \in J_2^{-1}(\Omega) := (\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega))^*$. Функция $v \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$ называется *обобщенным решением* задачи (S_0), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_\Omega \nabla u(x) : \nabla \eta(x)\, dx \ = \ \langle f, \eta\rangle, \qquad \forall\ \eta \in J_0^\infty(\Omega).$$

Замечание. Определение обобщенного решения задачи Стокса не предполагает, что уравнения в системе (S_0) выполняются в смысле теории обобщенных функций, поскольку пробные функции в интегральном тождестве для обобщенных решений берутся не из $C_0^\infty(\Omega)$, а из более узкого класса $J_0^\infty(\Omega)$.

3. **Существование обобщенного решения стационарной задачи Стокса**

Теорема. Для любой $f \in J_2^{-1}(\Omega)$ существует единственная функция $u \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$, являющаяся обобщенным решением задачи (S_0), причем справедливо неравенство

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \ \le \ c\,\|f\|_{J_2^{-1}(\Omega)},$$

в котором постоянная $c > 0$ зависит только от Ω и n.

4. **Ассоциированное давление**

Теорема. Пусть $f \ \in \ W_2^{-1}(\Omega)$ и $u \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$ — обобщенное решение задачи (S_0). Тогда существует и притом единственная функция $p \in L_2(\Omega)$, $[p]_\Omega = 0$, такая что уравнения (S_0) выполняются в $\mathcal{D}'(\Omega)$, т.е.

$$\int\limits_\Omega \nabla u : \nabla \eta\, dx \ = \ \langle f, \eta\rangle \ + \ \int\limits_\Omega p \operatorname{div} \eta\, dx, \qquad \forall\ \eta \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

Более того, функция p удовлетворяет оценке

$$\|p\|_{L_2(\Omega)} \ \le \ c\,\|f\|_{W_2^{-1}(\Omega)},$$

в которой постоянная $c>0$ зависит только от n и Ω.

Определение. Функцию $p \in L_2(\Omega)$, $[p]_\Omega = 0$, мы будем называть *давлением, ассоциированным* с обобщенным решением $u \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$.

5. Сильные решения стационарной задачи Стокса

Определение. Пусть $f \in L_2(\Omega)$. *Сильным решением* задачи (S_0) мы будем называть функции $u \in W^2_2(\Omega)$ и $p \in W^1_2(\Omega)$, $[p]_\Omega = 0$, удовлетворяющие уравнению (S_0) п.в. в Ω, а краевому условию — в смысле теории следов.

6. Слабые решения стационарной задачи Стокса являются сильными

Теорема. Пусть $\partial\Omega$ класса C^2 и $f \in L_2(\Omega)$. Пусть $u \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ — обобщенные решение задачи (S_0), а $p \in L_2(\Omega)$, $[p]_\Omega = 0$ — ассоциированное с ним давление. Тогда u и p являются сильным решением задачи (S_0), причем справедлива оценка

$$\|u\|_{W^2_2(\Omega)} \ + \ \|p\|_{W^1_2(\Omega)} \ \le \ c\,\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

в которой постоянная $c>0$ зависит только от Ω и n.

7. План доказательства

- Внутренняя оценка вторых производных.
- Оценка касательных производных ∇u и p вблизи плоского участка границы.
- Оценка $u_{\alpha,nn}$ из уравнений.
- Оценка $u_{n,nn}$ из условия соленоидальности и $p_{,n}$ из уравнений.
- Случай искривленной границы.

8. Внутренняя оценка вторых производных в L_2

Теорема. Пусть $f \in L_2(\Omega)$ и $u \in W^1_2(\Omega)$ и $p \in L_2(\Omega)$ удовлетворяют системе Стокса:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u + \nabla p &=& f \\ \operatorname{div} u &=& 0 \end{array} \right. \qquad \text{в} \qquad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Тогда $u \in W^2_{2,loc}(\Omega)$, $p \in W^1_{2,loc}(\Omega)$ и $\forall\ B_{2R} := B_{2R}(x_0) \Subset \Omega$ справедлива оценка

$$\|\nabla^2 u\|_{L_2(B_R)} + \|\nabla p\|_{L_2(B_R)} \ \le \ c\,\|f\|_{L_2(B_{2R})} + \frac{c}{R}\Big(\ \|\nabla u\|_{L_2(B_{2R})} + \|p\|_{L_2(B_{2R})} \ \Big)$$

9. **Гипоэллиптичность стационарной системы Стокса**

Стационарная система Стокса обладает свойством автоматического локального сглаживания слабых решений.

Теорема. Пусть $f \in L_2(\Omega)$, $u \in W_2^1(\Omega)$, $p \in L_2(\Omega)$, удовлетворяют

$$\left\{ \begin{array}{c} -\Delta u \; + \; \nabla p \; = \; f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{array} \right. \qquad \text{в} \qquad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Тогда если $f \in C^\infty_{loc}(\Omega)$, то $u \in C^\infty_{loc}(\Omega)$.

10. **Оценки вторых производных в L_2 вблизи плоского участка границы**

Теорема. Пусть $f \in L_2(\Omega)$ и $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $p \in L_2(\Omega)$ удовлетворяют (S_0) в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Пусть в некоторой системе координат $\Omega \cap B_{2R} = B_{2R}^+$ и $\partial\Omega \cap B_{2R} \subset \{x_n = 0\}$, т.е. $u|_{x_n=0} = 0$. Тогда $u \in W_2^2(B_R^+)$, $p \in W_2^1(B_R^+)$ и

$$\|\nabla^2 u\|_{L_2(B_R^+)} + \|\nabla p\|_{L_2(B_R^+)} \; \le \; c\,\|f\|_{L_2(B_{2R}^+)} + \frac{c}{R}\Big(\|\nabla u\|_{L_2(B_{2R}^+)} + \|p\|_{L_2(B_{2R}^+)}\Big)$$

11. **Оценки вторых производных в L_2 вблизи искривленной границы**

Теорема. Пусть $f \in L_2(\Omega)$ и $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $p \in L_2(\Omega)$ удовлетворяют (S_0) в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Пусть $\partial\Omega \subset C^2$ и обозначим $\Omega_R \equiv \Omega_R(x_0) := \Omega \cap B_R(x_0)$. Тогда и существует $R_0 > 0$, такой что для любых $x_0 \in \partial\Omega$ и $R < R_0$ $u \in W_2^2(\Omega_R)$, $p \in W_2^1(\Omega_R)$ и

$$\|\nabla^2 u\|_{L_2(\Omega_R)} + \|\nabla p\|_{L_2(\Omega_R)} \; \le \; c\,\|f\|_{L_2(\Omega_{2R})} + \frac{c}{R}\Big(\|\nabla u\|_{L_2(\Omega_{2R})} + \|p\|_{L_2(\Omega_{2R})}\Big)$$

Доказательство. “Распрямление” границы. □

4.5 Оператор Стокса

1. **Определение оператора Стокса**

   Определение. *Опреатором Стокса* мы будем называть линейный оператор

$$\tilde{\Delta} : D(\tilde{\Delta}) \subset \overset{\circ}{J}_2(\Omega) \to \overset{\circ}{J}_2(\Omega),$$
$$D(\tilde{\Delta}) \ = \ \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega) \cap W_2^2(\Omega), \qquad \tilde{\Delta} u \ := \ P_J \Delta u, \qquad \forall\, u \in D(\tilde{\Delta}).$$

   где P_J — это проектор Лере на подпространство $\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$.

2. **Неравенство Каттабрига–Солонникова**

   Теорема. Если $\partial\Omega$ класса C^2, то справедливо неравенство

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \ \le \ c\,\|\tilde{\Delta} u\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\, u \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega) \cap W_2^2(\Omega),$$

   в котором постоянная $c > 0$, зависит только от Ω и n.

3. **Самосопряженность оператора Стокса**

   Теорема. Пусть $\partial\Omega$ класса C^2. Тогда

   1) оператор $-\tilde{\Delta}$ отвечает квадратичной форме $a[u] := \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}$ на $\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ с областью определения $D_a := \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$, т.е.

$$(-\tilde{\Delta} u, v) \ = \ (\nabla u, \nabla v), \qquad \forall\, u \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega) \cap W_2^2(\Omega), \qquad \forall\, v \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$$

   2) опреатор $\tilde{\Delta}$ является самосопряженным:

$$D(\tilde{\Delta}^*) = D(\tilde{\Delta}) = \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega) \cap W_2^2(\Omega), \qquad (\tilde{\Delta} u, v) = (u, \tilde{\Delta} v), \qquad \forall\, u,\, v \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$$

   3) оператор $-\tilde{\Delta}$ положительно определен, т.е.

$$(-\tilde{\Delta} u, u) \ \ge \ 0, \qquad \forall\, u \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega) \cap W_2^2(\Omega).$$

4. **Спектр оператора Стокса**

   Теорема. Пусть Ω — ограниченная область. Тогда

   1) спектр оператора $-\tilde{\Delta}$ чисто точечный, он состоит из счетного набора вещественных положительных собственных чисел, не имеющих точек накопления, кроме бесконечности, причем соотвествующие им собственные подпространства конечномерны.

2) собственные числа оператора $-\tilde{\Delta}$ можно пронумеровать в порядке возрастания и с учетом их кратности:

$$0 \;<\; \lambda_1 \;\le\; \lambda_2 \;\le\; \ldots \;\le\; \lambda_k \;\le\; \ldots$$

5. Собственные функции оператора Стокса

Теорема. Пусть Ω — ограниченная область. Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственные числа оператора $-\tilde{\Delta}$ с учетом кратности, и обозначим через $\varphi_k \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$ собственную функцию оператора $-\tilde{\Delta}$, соответствующую собственному числу λ_k. Тогда φ_k является обобщенным решением задачи Стокса

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta\varphi_k + \nabla\pi_k &=& \lambda_k\,\varphi_k \\ \operatorname{div}\varphi_k &=& 0 \\ \varphi_k|_{\partial\Omega} &=& 0 \end{array}\right. \qquad \text{в} \quad \Omega$$

и при этом

1) $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образуют базис в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{J}{}_2(\Omega)$ со скалярным произведением $(u,v)_{L_2(\Omega)}$, который мы всегда считаем ортонормированным в $L_2(\Omega)$:

$$\|\varphi_k\|_{L_2(\Omega)} \;=\; 1, \qquad \forall\, k = 1,2,3,\ldots$$

2) $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образуют базис в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$ со скалярным произведением $[u,v] := (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)}$, причем

$$\|\nabla\varphi_k\|_{L_2(\Omega)} \;=\; \sqrt{\lambda_k}, \qquad \forall\, k = 1,2,3,\ldots$$

3) если $\partial\Omega$ класса C^2, то $\varphi_k \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^2(\Omega)$ для любого $k\in\mathbb{N}$ и функции $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образуют базис в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^2(\Omega)$ со скалярным произведением $((u,v)) := (\tilde{\Delta}u, \tilde{\Delta}v)_{L_2(\Omega)}$, причем

$$\|\tilde{\Delta}\varphi_k\|_{L_2(\Omega)} \;=\; \lambda_k, \qquad \forall\, k = 1,2,3,\ldots$$

6. Ряды Фурье по базису из собственных функций оператора Стокса

Теорема. Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — собственные числа и собственные функции оператора $-\tilde{\Delta}$ (в стандартной нумерации). Для любой $u \in \overset{\circ}{J}{}_2(\Omega)$ обозначим

$$c_k := (u,\varphi_k)_{L_2(\Omega)}, \qquad u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k \quad \text{в} \quad L_2(\Omega), \qquad \|u\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$$

Тогда

1) $u \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k |c_k|^2 < +\infty$ и при этом

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \quad \text{в} \quad W_2^1(\Omega), \qquad \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |c_k|^2$$

2) если $\partial\Omega \subset C^2$, то $u \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |c_k|^2 < +\infty$ и при этом

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \quad \text{в} \quad W_2^2(\Omega), \qquad \|\tilde{\Delta} u\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |c_k|^2$$

4.6 Нестационарная задача Стокса

1. **Система Стокса-Озина**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Системой *Стокса–Озина* мы называем линейную систему Стокса с дрифтом (младшими членами первого порядка):

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u \; - \; \Delta u \; + \; (w \cdot \nabla) u \; + \; \nabla p \; = \; f \\ \operatorname{div} u \; = \; 0 \\ u|_{t=0} \; = \; a, \qquad u|_{\partial\Omega \times (0,T)} \; = \; 0 \end{array} \right. \qquad \text{в} \qquad Q_T \tag{SO}$$

Здесь неизвестными являются функции $u : Q_T \to \mathbb{R}^n$ и $p : Q_T \to \mathbb{R}$, а заданными — функции $a : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $w : Q_T \to \mathbb{R}^n$ и $f : Q_T \to \mathbb{R}^n$, причем для a и w выполнены условия соленоидальности

$$\operatorname{div} a = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \operatorname{div} w = 0 \quad \text{в} \quad Q_T,$$

плюс a удовлетворяет естественным условиям согласования на $\partial\Omega$.

2. **Свойства конвективного члена**

ТЕОРЕМА. Пусть $w \in L_\infty(\Omega)$ такова, что $\operatorname{div} w = 0$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_\Omega (w \cdot \nabla) u \cdot v \, dx \; = \; - \int\limits_\Omega u \otimes w : \nabla v \, dx, \qquad \forall\, u, v \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$$

Кроме того, если $w \in L_\infty(Q_T)$ такова, что $\operatorname{div} w = 0$ в $\mathcal{D}'(Q_T)$, то

$$\int\limits_{Q_T} u \otimes w : \nabla u \, dxdt \; = \; 0, \qquad \forall\, u \in L_2(0,T; \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega))$$

3. **Обобщенные решения системы Стокса-Озина**

ТЕОРЕМА. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$, $f \in L_2(0,T; J_2^{-1}(\Omega))$, $w \in L_\infty(Q_T)$, $\operatorname{div} w = 0$ в $\mathcal{D}'(Q_T)$. Обобщенным решением системы (SO) мы называем функцию $u : Q_T \to \mathbb{R}^n$, такую что

1) $u \in C([0,T]; \overset{\circ}{J}_2(\Omega)) \cap L_2(0,T; \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega))$, $\quad \partial_t u \in L_2(0,T; J_2^{-1}(\Omega))$

2) для п.в. $t \in (0,T)$ справедливо тождество

$$\langle \partial_t u(t), w \rangle + (\nabla u(t), \nabla w) - (u(t) \otimes w(t), \nabla w) \; = \; \langle f(t), w \rangle, \qquad \forall\; w \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$$

3) $u(x,0) = a(x)$ для п.в. $x \in \Omega$

4. **Энергетическое тождество и единственность в классе обобщенных решений**

Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$, $f \in L_2(0,T; J_2^{-1}(\Omega))$ и пусть u — обобщенное решение системы (SO). Тогда для любого $t \in (0,T]$ u удовлетворяет *глобальному энергетическому тождеству*

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u(x,t)|^2\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x,\tau)|^2\,dxd\tau = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |a(x)|^2\,dx + \int\limits_0^t \langle f(\tau), u(\tau)\rangle\,dt$$

Следствие. Для любых $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$, $f \in L_2(0,T; J_2^{-1}(\Omega))$, $w \in L_\infty(Q_T)$, $\operatorname{div} w = 0$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$, задача (SO) не может иметь двух различных обобщенных решений.

5. **Теорема существования в классе обобщенных решений**

Теорема. Пусть $w \in L_\infty(Q_T)$, $\operatorname{div} w = 0$ в $\mathcal{D}'(Q_T)$. Тогда для любых $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ и $f \in L_2(0,T; J_2^{-1}(\Omega))$ существует единственная функция u, являющаяся обобщенным решением системы (SO), причем справедливы оценки

$$\|u\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} + \|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \le c\left(\|a\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(0,T;J_2^{-1}(\Omega))}\right)$$

$$\|\partial_t u\|_{L_2(0,T;J_2^{-1}(\Omega))} \le c_w\left(\|a\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(0,T;J_2^{-1}(\Omega))}\right)$$

где постоянная $c > 0$ зависит только от n и Ω, а $c_w > 0$ зависит от n, Ω и $\|w\|_{L_\infty(Q_T)}$.

План доказательства.

- Определение галеркинских приближений u^N.
- Энергетическая оценка для u^N.
- Предельный переход в уравнении.
- Оценка $\partial_t u$.

6. **Сильные решения системы Стокса–Озина**

Определение. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$, $f \in L_2(Q_T)$, $w \in L_\infty(Q_T)$, $\operatorname{div} w = 0$ в $\mathcal{D}'(Q_T)$. *Сильным* решением системы (SO) называются функции $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$ и $p \in W_2^{1,0}(Q_T)$, такие что $[p(t)]_\Omega = 0$ п.в. $t \in (0,T)$ и функции u и p удовлетворяют уравнениям (SO) п.в. в Q_T, а начальным и краевым условиям — в смысле теории следов.

7. **Сильные решения системы Стокса–Озина**

Теорема. Пусть $w \in L_\infty(Q_T)$, $\operatorname{div} w = 0$ в $\mathcal{D}'(Q_T)$. Тогда для любых $a \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$ и $f \in L_2(Q_T)$ обобщенное решение системы (SO) является сильным, т.е. $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$ и существует единственная $p \in W_2^{1,0}(Q_T)$, такая что $[p(t)]_\Omega = 0$ п.в. $t \in (0,T)$ и функции u и p являются сильным решением системы (SO), причем имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} + \|p\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \ \le \ c_w \, \Big(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|a\|_{W_2^1(\Omega)} \Big)$$

с постоянной $c_w > 0$, зависящей только от n, Ω и $\|w\|_{L_\infty(Q_T)}$.

8. **Теорема единственности О.А. Ладыженской в классе очень слабых решений**

Теорема. Пусть $u \in L_2(0,T; \overset{\circ}{J}_2(\Omega))$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{Q_T} u \cdot \Big(\partial_t \eta + \Delta \eta \Big) \, dxdt \ = \ 0,$$

$$\forall \ \eta \in W_2^{2,1}(Q_T) : \quad \operatorname{div} \eta = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \quad \eta|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0, \quad \eta|_{t=T} = 0.$$

Тогда $u \equiv 0$ п.в. в Q_T.

9. **Коэрцитивные оценки В.А. Солонникова**

Для $s \in (1, +\infty)$ обозначим $\overset{\circ}{J}{}_s^{2-2/s}(\Omega) \ := \ \operatorname{Closure}_{W_s^{2-2/s}(\Omega)} J_0^\infty(\Omega)$.

Теорема. Пусть $s \in (1, +\infty)$. Тогда для любых $a \in \overset{\circ}{J}{}_s^{2-2/s}(\Omega)$ и $f \in L_s(Q_T)$ существует единственная пара функций $u \in W_s^{2,1}(Q_T)$ и $p \in W_s^{1,0}(Q_T)$, $[p(t)]_\Omega = 0$ п.в. $t \in (0,T)$, являющаяся сильным решением системы Стокса

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u \ - \ \Delta u \ + \ \nabla p \ = \ f \\ \operatorname{div} u \ = \ 0 \\ u|_{\partial\Omega \times (0,T)} \ = \ 0 \\ u|_{t=0} \ = \ a \end{array} \right. \qquad \text{в} \qquad Q_T \tag{S}$$

т.е. удовлетворяющая уравнениям (S) п.в. в Q_T, начальным и краевым условиям — в смысле теории следов, а также удовлетворяющая оценке

$$\|u\|_{W_s^{2,1}(Q_T)} + \|p\|_{W_s^{1,0}(Q_T)} \ \le \ c \, \Big(\|f\|_{L_s(Q_T)} + \|a\|_{W_s^{2-2/s}(\Omega)} \Big)$$

с постоянной $c > 0$, зависящей только от n, s, Ω и T.

Доказательство. Без доказательства. $\square$

4.7 Теорема о компактности

1. **Мотивировка**

   Из-за наличия “конвективного члена” $(u \cdot \nabla)u$ уравнения гидродинамики являются *нелинейными* уравнениями в частных производных. Основная трудность в работе с нелинейными уравнениями заключается в том, что нелинейные операторы, как правило, не являются непрерывными относительно слабой сходимости $u^N \rightharpoonup u$. Поэтому для предельного перехода в конвективном члене нам потребуется сильная сходимость $u^N \to u$, то есть, иначе говоря, компактность последовательности гладких “приближенных” решений $\{u^N\}$ в некотором подходящем функциональном пространстве.

2. **Класс $\mathcal{W}$**

   Определение. Пусть $X \hookrightarrow Z$. Для любых p, $q \in [1, +\infty)$ определим лин. пр–во

   $$\mathcal{W} \ := \ \left\{ \ u \in L_p(I; X) : \ \exists \ \text{ слабая производная по времени } \ \frac{du}{dt} \in L_q(I; Z) \ \right\}$$

   Таким образом, функция $u \in L_p(I; X)$ принадлежит классу $\mathcal{W}$ в том и только в том случае, когда существует функция $v \in L_q(I; Z)$, такая что выполняется соотношение

   $$\int\limits_I u(t) \ \varphi'(t) \ dt \ = \ - \int\limits_I v(t) \ \varphi(t) \ dt \qquad \text{в} \qquad Z, \qquad \forall \ \varphi \in C_0^\infty(I).$$

   Теорема. Пространство $\mathcal{W}$ является банаховым относительно нормы

   $$\|u\|_{\mathcal{W}} \ := \ \|u\|_{L_p(I;X)} \ + \ \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L_q(I;Z)}$$

   Если X, Z рефлексивны и p, $q \in (1, +\infty)$, то $\mathcal{W}$ также является рефлексивным.

3. **Основной результат данного параграфа**

   Теорема. X, Y, Z — банаховы, p, $q \in (1, +\infty)$. Предположим, что

   1) $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$
   2) X, Z — рефлексивны
   3) вложение $X \hookrightarrow Y$ компактно

   Тогда вложение $\mathcal{W}$ в пространство $L_p(I; Y)$ компактно, то есть для всякой последовательности $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{W}$

   $$u_k \ \rightharpoonup \ u \quad \text{в} \quad \mathcal{W} \qquad \Longrightarrow \qquad u_{k_j} \ \to \ u \qquad \textit{в} \qquad L_p(I; Y).$$

4. **Предварительные факты**

Теорема.

- если $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{W}$, $u \in L_p(I;X)$, $v \in L_q(I;Z)$ таковы, что

$$u_k \rightharpoonup u \quad \textit{в} \quad L_p(I;X), \qquad \frac{du_k}{dt} \rightharpoonup v \quad \textit{в} \quad L_q(I;Z),$$

  то $\quad u \in \mathcal{W} \quad$ и $\quad \frac{du}{dt} = v$ в Z.
- для любой $u \in \mathcal{W}$ $u : \bar{I} \to Z$ абсолютно непрерывна и $\forall\, s,\, t \in \bar{I}$

$$u(t) \;=\; \int\limits_s^t \frac{du}{d\tau}(\tau)\; d\tau \;+\; u(s) \qquad \textit{в} \quad Z.$$

- $\mathcal{W}$ непрерывно вкладывается в $C(\bar{I};Z)$, т.е. $\exists\; c > 0$, такое что

$$\|u\|_{C(\bar{I};Z)} \;\le\; c\;\|u\|_{\mathcal{W}}, \qquad \forall\; u \in \mathcal{W}.$$

- для любой $u \in \mathcal{W}$ и любых $s,\, t \in \bar{I}$

$$(t-s)u(t) \;=\; \int\limits_s^t u(\tau)\; d\tau \;+\; \int\limits_s^t (\tau - s)\frac{du}{d\tau}(\tau)\; d\tau \qquad \textit{в} \quad Z.$$

- пусть $v_k,\, v \in L_p(I;X)$ и $t,\, s \in I$ фиксированы. Определим элементы $a_k^{(t,s)}$, $a^{(t,s)} \in X$

$$a_k^{(t,s)} \;:=\; \frac{1}{t-s}\; \int\limits_s^t v_k(\tau)\; d\tau, \qquad a^{(t,s)} \;:=\; \frac{1}{t-s}\; \int\limits_s^t v(\tau)\; d\tau$$

  Тогда если $v_k \rightharpoonup v$ в $L_p(I;X)$, то $a_k^{(t,s)} \rightharpoonup a^{(t,s)}$ в X при $k \to +\infty$.

5. **Компактность вложения в $L_p(I;Z)$**

Теорема. Пусть выполнены условия основной теоремы и пусть $u_k \in \mathcal{W}$ таковы, что

$$u_k \rightharpoonup 0 \quad \textit{в} \quad L_p(I;X) \qquad \text{и} \qquad \left\{\frac{du_k}{dt}\right\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{ограничена в } L_q(I;Z).$$

Тогда $u_k \to 0$ в $L_p(I;Z)$.

6. **Общий факт о компактных вложениях**

Теорема. Пусть банаховы пространства X, Y, Z таковы, что

1) $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$ (непрерывные вложения)

2) вложение $X \hookrightarrow Y$ компактно

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$, такая что

$$\|x\|_Y \leq \varepsilon \, \|x\|_X + C_\varepsilon \, \|x\|_Z, \qquad \forall \, x \in X.$$

7. Компактность вложения в $L_p(I;Y)$

Теорема. Пусть выполнены условия основной теоремы и $u_k \in L_p(I;X)$ таковы, что

$$u_k \rightharpoonup 0 \quad \text{в} \quad L_p(I;X) \qquad u \qquad u_k \to 0 \quad \text{в} \quad L_p(I;Z).$$

Тогда $u_k \to 0$ в $L_p(I;Y)$.

5 Решения Лере–Хопфа

5.1 Уравнения Навье-Стокса

1. **Система уравнений Навье-Стокса**

   В этой главе: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей, $n = 2$ или 3, $Q_T := \Omega \times (0, T)$. Уравнениями Навье–Стокса называется система

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u \; - \; \Delta u \; + \; (u \cdot \nabla)u \; + \; \nabla p \; = \; 0 \\ \operatorname{div} u \; = \; 0 \\ u|_{t=0} \; = \; a, \qquad u|_{\partial\Omega \times (0,T)} \; = \; 0 \end{array} \right. \quad \text{в} \quad Q_T \tag{NS}$$

   Здесь $a : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — заданная функция, удовлетворяющая условиям

$$\operatorname{div} a = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad a|_{\partial\Omega} = 0,$$

   а неизвестными являются поле скоростей $u : Q_T \to \mathbb{R}^n$ и давление $p : Q_T \to \mathbb{R}$.

   Определение. *Гладким решением* уравнений Навье–Стокса мы будем называть функции $u \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ и $p \in C^\infty(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющие соотношениям (NS) поточечно.

2. **Свойство конвективного члена (напоминание)**

   Теорема. Тогдя для любых u, $w \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, таких что $\operatorname{div} w = 0$ в Ω, выполняется

$$(w \cdot \nabla)u \; = \; \operatorname{div}(u \otimes w)$$

   Если дополнительно предположить, что $u|_{\partial\Omega} = 0$, то

$$\int\limits_\Omega (\nabla u) w \cdot u \; dx \; = \; \int\limits_\Omega (w \cdot \nabla) u \cdot u \; dx \; = \; -\int\limits_\Omega u \otimes w : \nabla u \; dx \; = \; 0.$$

3. **Энергетическое тождество**

   Теорема. Для любого гладкого решения u и p, соответствующего начальному данному a, справедливо *энергетическое тождество*

$$\forall \; t \in (0, T) \qquad \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u(x,t)|^2 \; dx \; + \; \int\limits_0^t \int\limits_\Omega |\nabla u(x,\tau)|^2 \; dx d\tau \; = \; \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |a(x)|^2 \; dx$$

   из которого вытекает оценка

$$\sup_{t \in (0,T)} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)} \; + \; \|\nabla u\|_{L_2(Q_T)} \; \leq \; c \; \|a\|_{L_2(\Omega)}.$$

4. **Теорема единственности для гладких решений**

Теорема. Пусть (u_1, p_1) и (u_2, p_2) — два гладких решения уравнения Навье–Стокса, соответствующих одному и тому же начальному данному. Тогда

$$u_1 \;=\; u_2 \quad \text{в} \quad Q_T.$$

5. **Уравнения Навье-Стокса для ротора**

Теорема. Пусть u и p — гладкое решение уравнений Навье–Стокса. Тогда

1) если $n = 3$, то

$$(u \cdot \nabla)u \;=\; \operatorname{rot} u \times u \;+\; \nabla \tfrac{1}{2}|u|^2$$

и функция $\omega := \operatorname{rot} u$ удовлетворяет соотношениям

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t \omega + (u \cdot \nabla)\omega - \Delta\omega \;=\; (\omega \cdot \nabla)u \qquad \text{в} \quad Q_T \\ \omega|_{t=0} \;=\; \omega_0, \qquad \omega_0 := \operatorname{rot} a \end{array} \right.$$

2) если $n = 2$, то есть

$$u(x,t) = u_1(x_1, x_2, t)\mathbf{e}_1 + u_2(x_1, x_2, t)\mathbf{e}_2, \qquad p(x,t) = p(x_1, x_2, t),$$

то

$$\operatorname{rot} u \;=\; \omega(x_1, x_2, t)\, \mathbf{e}_3, \qquad \text{где} \qquad \omega := u_{2,1} - u_{1,2}$$

и функция ω удовлетворяет соотношениям

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t \omega + (u \cdot \nabla)\omega - \Delta\omega \;=\; 0 \qquad \text{в} \quad Q_T \\ \omega|_{t=0} \;=\; \omega_0, \qquad \omega_0 := a_{2,1} - a_{1,2} \end{array} \right.$$

5.2 Принцип Лере–Шаудера

1. **Теорема Брауэра о неподвижной точке**

   Теорема. $\bar{B}_R := \{\, x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \le R \,\}$, $f : \bar{B}_R \to \mathbb{R}^n$ – непрерывна на $\bar{B}_R$, $f(\bar{B}_R) \subset \bar{B}_R$
   $\implies \ \exists\, x_0 \in \bar{B}_R\colon \ f(x_0) = x_0$

   Следствие. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое ограниченное мн–во, $f : M \to M$ — непрерывно на M. Тогда $\exists\, x_0 \in M\colon \ f(x_0) = x_0$.

2. **Принцип Шаудера — I**

   Теорема. X — банахово, $K \subset X$, $A : K \to X$

   1) K — компакт
   2) K — выпукло
   3) A — непрерывен на K
   4) $A(K) \subset K$

   Тогда $\exists\, x_0 \in K\colon \ A(x_0) = x_0$.

3. **Компактные и вполне непрерывные нелинейные операторы**

   Определение. Пусть X — банахово. Нелинейный оператор $A : X \to X$ называется *компактным*, если для любого ограниченного подмножества $B \subset X$ множество $A(B)$ предкомпактно в X. Будем говорить, что оператор A *вполне непрерывен* на X, если он непрерывен и компактен на X.

4. **Принцип Шаудера — II**

   Лемма. X — банахово, $K \subset X$ — предкомпакт $\implies$ $\operatorname{conv} K$ — предкомпакт.

   $$\operatorname{conv} K \ = \ \Big\{\ y \in X : \ \exists\, \{x_i\}_{i=1}^m \subset K, \ \exists\, \{\lambda_i\}_{i=1}^m, \ \lambda_i \in [0,1], \ \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \ y = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \ \Big\}$$

   Теорема. X — банахово, $A : X \to X$

   1) A — вполне непрерывен на X
   2) $\exists$ шар $\bar{B}_R \subset X\colon \quad A(\bar{B}_R) \subset \bar{B}_R$

   Тогда $\exists\, x_0 \in \bar{B}_R\colon \ A(x_0) = x_0$.

5. **Теорема Лере–Шаудера**

   Теорема. X — сепарабельное банахово, $A : X \to X$

1) A — вполне непрерывен на X

2) множество решений уравнения $x = \lambda A(x)$ ограничено в X равномерно по $\lambda \in [0, 1]$, то есть существует $M > 0$, такое что для любых $x \in X$ и $\lambda \in [0, 1]$ справедлива следующая импликация

$$x = \lambda A(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \|x\|_X \leq M.$$

Тогда $\exists\, x_0 \in \bar{B}_M$: $A(x_0) = x_0$.

5.3 Регуляризованная задача

1. **Оператор усреднения**

   Для любой $u \in L_1(Q_T)$ обозначим через $\tilde{u}$ продолжение функции u нулем с Q_T на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Обозначим через ω_ε ядро усредения по Соболеву по переменным (x,t):

   $$\omega_\varepsilon(x,t) := \tfrac{1}{\varepsilon^4}\, \omega\left(\tfrac{x}{\varepsilon}, \tfrac{t}{\varepsilon}\right), \qquad \omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \omega(x,t)\; dxdt = 1$$

   Определим оператор усреднения по переменным (x,t):

   $$T_\varepsilon u \;:=\; \omega_\varepsilon * \tilde{u}, \qquad (T_\varepsilon u)(x,t) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y, t-\tau) \tilde{u}(y,\tau)\, dy d\tau$$

   Теорема. Пусть $u \in L_2(0,T; \overset{\circ}{J}_2(\Omega))$ и $w_\varepsilon := T_\varepsilon u$, $\varepsilon > 0$. Тогда

   $$w_\varepsilon \in C^\infty(\bar{Q}_T), \qquad \operatorname{div} w_\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad Q_T.$$

2. **Регуляризованная система Навье-Стокса**

   Определение. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$. *Регуляризованной* системой уравнений Навье-Стокса мы будем называть систему

   $$\left\{ \begin{aligned} \partial_t u \;-\; \Delta u \;+\; (T_\varepsilon u \cdot \nabla) u \;+\; \nabla p \;&=\; 0 \\ \operatorname{div} u \;&=\; 0 \\ u|_{t=0} \;=\; a, \qquad u|_{\partial\Omega \times (0,T)} \;&=\; 0 \end{aligned} \right. \qquad \text{в} \qquad Q_T \qquad (\mathrm{NS}_\varepsilon)$$

   Заметим, что из $\operatorname{div}(T_\varepsilon u) = 0$ вытекают тождества

   $$(T_\varepsilon u \cdot \nabla) u \;=\; \operatorname{div}\left(u \otimes T_\varepsilon u\right), \qquad \int\limits_\Omega (T_\varepsilon u \cdot \nabla) u \cdot u \, dx = 0, \qquad \forall\; u \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega).$$

3. **Разрешимость регуляризованной задачи**

   Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда для любого $T > 0$ существуют единственная функция u^ε, являющиеся обобщенным решением задачи $(\mathrm{NS}_\varepsilon)$, т.е.

   1) $u^\varepsilon \in C([0,T]; \overset{\circ}{J}_2(\Omega)) \cap L_2(0,T; \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)), \quad \partial_t u^\varepsilon \in L_2(0,T; J_2^{-1}(\Omega))$
   2) при п.в. $t \in (0,T)$ функция u^ε удовлетворяет интегральному тождеству

   $$\langle \partial_t u^\varepsilon(t), w\rangle + (\nabla u^\varepsilon(t), \nabla w) - (u^\varepsilon(t) \otimes (T_\varepsilon u^\varepsilon)(t), \nabla w) \;=\; 0, \qquad \forall\; w \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)$$

   3) $u^\varepsilon(x,0) = a(x)$ для п.в. $x \in \Omega$

4. **План доказательства разрешимости регуляризованной задачи**

- Определение оператора $A : \overset{\circ}{J}_2(Q_T) \to \overset{\circ}{J}_2(Q_T)$
- Непрерывность оператора $u \mapsto A(u)$ в $\overset{\circ}{J}_2(Q_T)$
- Компактность оператора $u \mapsto A(u)$ в $\overset{\circ}{J}_2(Q_T)$
- Априорная оценка: $\exists\, M > 0$: $\forall\, u \in \overset{\circ}{J}_2(Q_T),\ \ \forall\, \lambda \in [0,1]\ \ u = \lambda A(u)\ \Rightarrow\ \|u\|_{\overset{\circ}{J}_2(Q_T)} \le M$
- Принцип Лере–Шаудера: $\exists\, u \in \overset{\circ}{J}_2(Q_T)$: $u = A(u)$

5. **Определение оператора $\boldsymbol{A}$**

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Для любой $v \in \overset{\circ}{J}_2(Q_T)$ обозначим через $v \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap W_2^{1,0}(Q_T)$ обобщенное решение задачи Стокса-Озина

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t u \ - \ \Delta u \ + \ (T_\varepsilon v \cdot \nabla)u \ + \ \nabla p \ = \ 0 \\ \operatorname{div} u \ = \ 0 \\ u|_{t=0} \ = \ a, \qquad u|_{\partial\Omega\times(0,T)} \ = \ 0 \end{array}\right. \quad \text{в} \quad Q_T \tag{SO$_\varepsilon$}$$

и определим нелинейный оператор

$$A : \overset{\circ}{J}_2(Q_T) \to \overset{\circ}{J}_2(Q_T), \qquad A(v) := u$$

6. **Непрерывность оператора $\boldsymbol{A}$**

Теорема. Если $v^m \to v$ в $L_2(Q_T)$, то $A(v^m) \to A(v)$ в $L_2(Q_T)$.

7. **Компактность оператора $\boldsymbol{A}$**

Теорема. Если $\{v^m\}$ ограничена в $L_2(Q_T)$, то $\{A(v^m)\}$ предкомпактна в $L_2(Q_T)$.

8. **Априорная оценка для неподвижных точек оператора $\boldsymbol{\lambda A}$**

Теорема. Существует постоянная $c_a > 0$, зависящая только от $\|a\|_{L_2(\Omega)}$, такая что выполняется импликация

$$\forall\, u \in \overset{\circ}{J}_2(Q_T), \qquad \forall\, \lambda \in [0,1]: \qquad u = \lambda A(u) \qquad \Longrightarrow \qquad \|u\|_{L_2(Q_T)} \ \le \ c_a.$$

9. **Существование неподвижной точки оператора $\boldsymbol{A}$**

Теорема. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Тогда существует единственная функция u, являющиеся обобщенным решением задачи $(\mathrm{NS})_\varepsilon$.

5.4 Мультипликативные неравенства

1. **Неравенства О.А. Ладыженской**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ — произвольная область (огр. или неогр.). Тогда

   1) если $n = 2$, то
   $$\|u\|^4_{L_4(\Omega)} \le 2\,\|w\|^2_{L_2(\Omega)}\,\|\nabla w\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\, w \in C_0^\infty(\Omega)$$

   2) если $n = 3$, то
   $$\|w\|^4_{L_4(\Omega)} \le 4\,\|w\|_{L_2(\Omega)}\,\|\nabla w\|^3_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\, w \in C_0^\infty(\Omega)$$

2. **Общее мультипликативное неравенство**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — произвольная область (огр. или неогр.) и $s \in [2, 6]$. Тогда
   $$\|w\|_{L_s(\Omega)} \le c_s\,\|w\|^{1-\lambda}_{L_2(\Omega)}\,\|\nabla w\|^{\lambda}_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\, w \in C_0^1(\Omega).$$
   где $\lambda \in [0,1]$, $\lambda := \frac{3(s-2)}{2s} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{s} = \frac{1-\lambda}{2} + \frac{\lambda}{6}$.

3. **Вложение энергетического класса в $L_s(Q_T)$**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ — произвольная область (огр. или неогр.). Тогда

   1) если $n = 2$, то
   $$\|u\|^4_{L_4(Q_T)} \le c\,\|u\|^2_{L_{2,\infty}(Q_T)}\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)}, \qquad \forall\, u \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$$

   2) если $n = 3$, то
   $$\|u\|^{\frac{10}{3}}_{L_{\frac{10}{3}}(Q_T)} \le c\,\|u\|^{\frac{4}{3}}_{L_{2,\infty}(Q_T)}\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)}, \qquad \forall\, u \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$$

4. **Вложение энергетического класса в $\boldsymbol{L_{s,l}(Q_T)}$**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — произвольная область (огр. или неогр.). Тогда
   $$\forall\, s \in [2,6], \quad l \in [2,\infty] : \qquad \frac{3}{s} + \frac{2}{l} = \frac{3}{2}$$
   существует постояннная $c(s,l) > 0$, такая что
   $$\|u\|_{L_{s,l}(Q_T)} \le c(s,l)\,\|u\|^{1-\frac{2}{l}}_{L_{2,\infty}(Q_T)}\|\nabla u\|^{\frac{2}{l}}_{L_2(Q_T)}, \qquad \forall\, u \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$$

5.5 Решения Лере-Хопфа

1. **Определение решений Лере–Хопфа**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$. Функция $u : Q_T \to \mathbb{R}^n$ называется *решением Лере–Хопфа* уравнений Навье–Стокса

$$\begin{cases} \partial_t u \ - \ \Delta u \ + \ (u\cdot\nabla)u \ + \ \nabla p \ = \ 0 \\ \operatorname{div} u \ = \ 0 \\ u|_{t=0} \ = \ a, \qquad u|_{\partial\Omega\times(0,T)} \ = \ 0 \end{cases} \quad \text{в} \quad Q_T \tag{NS}$$

если выполняются следующие условия

1) $u \ \in \ L_\infty(0,T;\overset{\circ}{J}_2(\Omega))\cap L_2(0,T;\overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega))$
2) $u\in C_w([0,T];L_2(\Omega))$, т.е. для любого $t\in[0,T]$ $u(\cdot,t)\in L_2(\Omega)$ и

$$\forall\ w\in L_2(\Omega) \quad \text{функция} \quad t \ \mapsto \int\limits_\Omega u(x,t)w(x)\,dx \quad \text{непрерывна на} \quad [0,T]$$

3) u удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T}\Big(-u\cdot\partial_t\eta+\nabla u:\nabla\eta-u\otimes u:\nabla\eta\Big)\,dxdt \ = \ 0, \qquad \forall\ \eta\in J_0^\infty(Q_T)$$

4) u удовлетворяет *глобальному энергетическому неравенству*

$$\forall\ t\in[0,T] \qquad \frac12\int\limits_\Omega|u(x,t)|^2\,dx \ + \ \int\limits_0^t\int\limits_\Omega|\nabla u(x,\tau)|^2\,dxd\tau \ \le \ \frac12\int\limits_\Omega|a(x)|^2\,dx$$

5) u удовлетворяет начальному условию $u(x,0)=a(x)$ п.в. $x\in\Omega$ и

$$\|u(t)-a\|_{L_2(\Omega)} \ \to \ 0 \qquad \text{при} \quad t\to+0$$

2. **Глобальное существование решений Лере–Хопфа**

ТЕОРЕМА. Пусть $T>0$ произвольное и $Q_T:=\Omega\times(0,T)$. Для любого $a\in\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ существует по крайней мере одна функция $u:Q_T\to\mathbb{R}^n$, являющаяся решением Лере–Хопфа уравнений Навье–Стокса (NS).

3. **План**

- Энергетическая оценка решений u^ε регуляризованной задачи (NS_ε).
- Оценка слабой призводной по времени $\partial_t u^\varepsilon$ и компактность u^ε в $L_2(Q_T)$.

- Предельный переход в уравнениях.
- Непрерывность решения в слабой топологии $L_2(\Omega)$.
- Энергетическое неравенство.
- Сильная непрерывность решения в $L_2(\Omega)$ в начальный момент.

4. **Доказательство теоремы существования в классе Лере-Хопфа**

5. **Слабая производная по времени для решений Лере–Хопфа**

Теорема. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n=2,3$ — ограниченная область, $a\in\overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ и u — решение Лере–Хопфа уравнений (NS). Тогда

1) если $n=2$, то $\partial_t u\in L_2(0,T;J_2^{-1}(\Omega))$ и

$$u\in C([0,T];L_2(\Omega)),$$

а соотношение

$$\langle\partial_t u(t),w\rangle+(\nabla u(t),\nabla w)-(u(t)\otimes u(t),\nabla w)\;=\;0\qquad\text{п.в.}\quad t\in(0,T)$$

выполняется для любой функции $w\in\overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$. В частности, справедлива оценка

$$\|\partial_t u\|_{L_2(0,T;J_2^{-1}(\Omega))}\;\le\;\|\nabla u\|_{L_2(Q_T)}+\|u\|^2_{L_4(Q_T)}.$$

2) если $n=3$, то $\partial_t u\in L_{\frac53}(0,T;J_{\frac53}^{-1}(\Omega))$ и

$$u\in C_w([0,T];L_2(\Omega)),$$

а соотношение

$$\langle\partial_t u(t),w\rangle+(\nabla u(t),\nabla w)-(u(t)\otimes u(t),\nabla w)\;=\;0\qquad\text{п.в.}\quad t\in(0,T)$$

выполняется для любой функции $w\in\overset{\circ}{J}{}^1_{\frac52}(\Omega)$. В частности, справедлива оценка

$$\|\partial_t u\|_{L_{\frac53}(0,T;J_{\frac53}^{-1}(\Omega))}\;\le\;\|\nabla u\|_{L_2(Q_T)}+\|u\|^2_{L_{\frac{10}{3}}(Q_T)}.$$

5.6 Двумерный случай

1. **Свойства конвективного члена в 2D**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — произвольная область (огр. или неогр.). Тогда для любой функции $u \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap L_2(0,T; \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega))$ имеет место включение

   $$u \otimes u : \nabla u \in L_1(Q_T)$$

   и при п.в. $t \in (0,T)$

   $$\int\limits_\Omega u(t) \otimes u(t) : \nabla u(t)\ dx \ = \ 0.$$

2. **Энергетическое тождество в 2D**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$, u — решение Лере–Хопфа уравнений (NS). Тогда

   $$\forall\ t \in [0,T] \qquad \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u(x,t)|^2\ dx \ + \ \int\limits_0^t \int\limits_\Omega |\nabla u(x,\tau)|^2\ dx d\tau \ = \ \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |a(x)|^2\ dx$$

3. **Теорема единственности в 2D**

   Следующая теорема доказана:

   - 1958, О.А. Ладыженская — для случая $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$
   - 1959, J.L. Lions & Prodi — для случая $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$. Предположим, что u_1 и u_2 — два решения Лере–Хопфа системы уравнений Навье–Стокса (NS), соответствующих начальному данному a. Тогда $u_1 = u_2$ п.в. в Q_T.

5.7 Существование давления

1. **Суммируемость конвективного члена в трехмерном случае**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — произвольная область (огр. или неогр.). Тогда для любой функции $u \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$ справедливы оценки

   $$\|(u\cdot\nabla)u\|_{L_{\frac54}(Q_T)} \leq c\left(\|u\|^2_{L_{2,\infty}(Q_T)} + \|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)} \right)$$

   Более того, для любых $s \in (1, \frac32)$, $l \in (1,2)$, таких что

   $$\frac{3}{s} + \frac{2}{l} = 4,$$

   $$\|(u\cdot\nabla)u\|_{L_{s,l}(Q_T)} \leq c\left(\|u\|^2_{L_{2,\infty}(Q_T)} + \|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)} \right)$$

2. **Существование вторых производных из $L_{\frac54}(Q_{\delta,T})$ и давления из $L_{\frac53}(Q_{\delta,T})$**

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и $a \in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$. Пусть u — решение Лере–Хопфа уравнений (NS). Тогда имеет место включение

   $$\forall\ \delta \in (0,T) \qquad u \in W^{2,1}_{\frac54}(Q_{\delta,T}), \qquad Q_{\delta,T} := \Omega \times (\delta, T)$$

   и существует единственная функция $p : Q_T \to \mathbb{R}$, $[p(t)]_\Omega = 0$ п.в. $t \in (0,T)$, такая что

   $$\forall\ \delta \in (0,T) \qquad p \in W^{1,0}_{\frac54}(Q_{\delta,T}) \cap L_{\frac53}(Q_{\delta,T})$$

   и при этом функции u и p удовлетворяют системе Навье–Стокса п.в. в Q_T.

3. **Комментарии**

   1) По параболической теореме вложения при $n = 3$ вытекает

   $$u \in W^{2,1}_{\frac54}(Q_{\delta,T}) \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla u \in L_{\frac53}(Q_{\delta,T}),$$

   но не $\nabla u \in L_2(Q_{\delta,T})$. Так что в случае $n = 3$ из коэрцитивной оценки для старших произодных не удается восстановить даже той информации о гладкости решения, которая у нас была изначально из энергетической оценки. Поэтому коэрцитивную оценку для решений Лере-Хопфа нужно воспринимать как очень слабенькую.

   2) Из полученного нам включения $p \in W^{1,0}_{\frac54}(Q_{\delta,T})$ и вложения

   $$W^{1,0}_{\frac54}(Q_{\delta,T}) \hookrightarrow L_{\frac{15}{7},\frac54}(Q_{\delta,T})$$

   вытекает принадлежность p анизотропному пространству $p \in L_{\frac{15}{7},\frac54}(Q_{\delta,T})$.

3) Однако если на шаге **3** вместо $f\in L_{\frac54}(Q_T)$ мы заметим, что f принадлежит анизотропному пространству

$$f\in L_{\frac{15}{14},\frac53}(Q_T), \qquad \frac{3}{\frac{15}{14}}+\frac{2}{\frac53}=4,$$

и далее на шаге **4** воспользуемся коэрцитивной оценкой в анизотропных пространствах Соболева, то мы получим

$$\bar v\in W^{2,1}_{\frac{15}{14},\frac53}(Q_T), \qquad \bar p\in W^{1,0}_{\frac{15}{14},\frac53}(Q_T)$$

откуда мы получим $p\in W^{1,0}_{\frac{15}{14},\frac53}(Q_{\delta,T})$. И по параболическому вложению

$$W^{1,0}_{\frac{15}{14},\frac53}(Q_{\delta,T})=L_{\frac53}(\delta,T;W^1_{\frac{15}{14}}(\Omega)) \hookrightarrow L_{\frac53}(\delta,T;L_{\frac53}(\Omega))=L_{\frac53}(Q_{\delta,T})$$

мы получим

$$p\in L_{\frac53}(Q_{\delta,T}).$$

4. **Ассоциированное давление**

Определение. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ и $a\in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$ и u — решение Лере–Хопфа уравнений (NS). Тогда функцию

$$p\in W^{1,0}_{\frac54}(Q_{\delta,T})\cap L_{\frac53}(Q_{\delta,T}), \quad \forall\ \delta\in(0,T), \qquad [p(t)]_\Omega=0 \ \text{ п.в. } \ t\in(0,T),$$

существование которой было доказано в этом параграфе, мы будем называть *давлением, ассоциированным* с решением Лере–Хопфа u.

5. **Слабые решения удовлетворяют уравнениям Навье-Стокса в смысле распределений**

Теорема. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ и $a\in \overset{\circ}{J}_2(\Omega)$. Пусть u — решение Лере–Хопфа уравнений (NS), а p — ассоциированное с ним давление. Тогда

$$\int\limits_{Q_T}\Big(-u\cdot\partial_t\eta+\nabla u:\nabla\eta-u\otimes u:\nabla\eta\Big)\,dxdt \ = \int\limits_{Q_T}p\,\operatorname{div}\eta\,dxdt, \qquad \forall\ \eta\in C_0^\infty(Q_T)$$

6 Проблема глобальной однозначной разрешимости

6.1 Сильные решения

1. **Сильные решения**

Определение. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$. Функции u и p наз. *сильным решением* ур–ий (NS), если

$$u \in W_2^{2,1}(Q_T), \qquad p \in W_2^{1,0}(Q_T),$$

и u и p удовлетворяют уравнениям (NS) п.в. в Q_T, а начальному и краевому условию — в смысле теории следов.

Замечание.

1) если u и p — сильное решение уравнений (NS), то u является решением Лере–Хопфа
2) если u и p — сильное решение уравнений (NS), то $\nabla u \in C([0,T]; L_2(\Omega))$

2. **Теорема единственности для сильных решений**

Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ и пусть u_1 и u_2 — два решения Лере–Хопфа уравнений (NS), соответствующих начальному данному a. Тогда если

$$\nabla u_1 \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega)) \qquad \text{и} \qquad \nabla u_2 \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega)),$$

то $u_1 \equiv u_2$ в Q_T.

3. **Оценка решений регуляризованной задачи**

Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $u^\varepsilon \in W_2^{2,1}(Q_T)$ и $p^\varepsilon \in W_2^{1,0}(Q_T)$ сильное решение регуляризованной задачи

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u^\varepsilon \; - \; \Delta u^\varepsilon \; + \; (T_\varepsilon u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon \; + \; \nabla p^\varepsilon \; = \; 0 \\ \operatorname{div} u^\varepsilon \; = \; 0 \\ u^\varepsilon|_{t=0} \; = \; a, \qquad u^\varepsilon|_{\partial\Omega \times (0,T)} \; = \; 0 \end{array} \right. \qquad \text{в} \qquad Q_T$$

Тогда для п.в. $t \in (0,T)$ выполняется неравенство

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla^2 u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \; \le \; c_\Omega \, \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^4_{L_2(\Omega)} \Big(1 + \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \Big)$$

4. **Глобальное существование сильных решений при малых начальных данных**

Теорема. Существует постоянная $c_\Omega > 0$, такая что для любого $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$, такого что

$$\operatorname{arctg} \|\nabla a\|^2_{L_2(\Omega)} \ + \ c_\Omega \ \|a\|^2_{L_2(\Omega)} \ < \ \frac{\pi}{2},$$

и для любого $T > 0$ существует сильное решение u и p уравнений (NS) в Q_T.

5. **Локальное по времени существование сильных решений и оценка Лере**

Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$, $a \not\equiv 0$, и обозначим

$$T_0 \ := \ \frac{c(\Omega)}{\|\nabla a\|^4_{L_2(\Omega)}} \qquad \text{— наз. } \textit{временем Лере} \text{ для нач. данного } a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega),$$

где $c(\Omega) > 0$ — некоторая фиксированная постоянная. Тогда в области $Q_{T_0} = \Omega \times (0, T_0)$ существует сильное решение уравнений (NS).

6.2 “Weak-strong” теорема единственности

1. **“Слабая–сильная” теорема единственности**

   Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$. Пусть u и p — сильное решение уравнений (NS) в Q_T, а v — решение Лере–Хопфа уравнений (NS) в Q_T, соответствующее тому же начальному данному a. Тогда $u = v$ п.в. в Q_T.

2. **Ингредиенты доказательства**

   - формулы для разности квадратов:

   $$\|u(t) - v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} - 2(u(t), v(t))_{L_2(\Omega)} \tag{1}$$

   $$2\|\nabla u - \nabla v\|^2_{L_2(Q_t)} = 2\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_t)} + 2\|\nabla v\|^2_{L_2(Q_t)} - 4(\nabla u, \nabla v)_{L_2(Q_t)} \tag{2}$$

   - энергетические тождество для u и неравенство для v:

   $$\begin{aligned} \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_t)} &= \|a\|^2_{L_2(\Omega)} \\ \|v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|\nabla v\|^2_{L_2(Q_t)} &\le \|a\|^2_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

   - обоснование возможности использования в качестве тестовых функций:
     – гладкой u в уравнении для негладкой v
     – негладкой v в уравнении для гладкой u

     и вытекающие из этого тождества для скалярных произведений

   $$(u(t), v(t))_{L_2(\Omega)} + 2(\nabla u, \nabla v)_{L_2(Q_t)} = \|a\|^2_{L_2(\Omega)} + (u \otimes u, \nabla v)_{L_2(Q_t)} \tag{3}$$

   $$(v(t), u(t))_{L_2(\Omega)} + 2(\nabla v, \nabla u)_{L_2(Q_t)} = \|a\|^2_{L_2(\Omega)} + (v \otimes v, \nabla u)_{L_2(Q_t)} \tag{4}$$

   - $(1) + (2) + (3) + (4) \quad \Longrightarrow$

   $$\|u(t) - v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|\nabla u - \nabla v\|^2_{L_2(Q_t)} \le -(u \otimes u, \nabla v)_{L_2(Q_t)} - (v \otimes v, \nabla u)_{L_2(Q_t)}$$

   - свойство взаимной компенсации конвективных членов:

   $$(u \otimes u, \nabla v)_{L_2(Q_t)} + (v \otimes v, \nabla u)_{L_2(Q_t)} = ((u - v) \otimes (u - v), \nabla u)_{L_2(Q_t)}$$

   - лемма Гронуолла

   $$\|u(t) - v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le c\, \|\nabla u\|^4_{L_{2,\infty}(Q_T)} \int\limits_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}\, d\tau$$

3. **Начало доказательства**

4. Вспомогательная лемма

Теорема. Пусть V, V_1 — рефлексивные сеперабельные банаховы пространства, H — гильбертово пространство, причем

$$V_1 \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} V \overset{\text{dense}}{\hookrightarrow} H \hookrightarrow V^* \hookrightarrow V_1^*$$

Предположим, что функции u и v таковы, что

$$u \in L_{\frac{5}{2}}(I; V_1): \qquad \exists\, \frac{du}{dt} \in L_2(I; V^*),$$

$$v \in L_2(I; V): \qquad \exists\, \frac{dv}{dt} \in L_{\frac{5}{3}}(I; V_1^*).$$

Тогда функция $t \mapsto (u(t), v(t))$ является абсолютно непрерывной на $\bar{I}$ и

$$\frac{d}{dt}(u(t), v(t)) \;=\; \left\langle \frac{du}{dt}(t), v(t) \right\rangle + \left\langle \frac{dv}{dt}(t), u(t) \right\rangle, \qquad \textit{п.в.} \quad t \in I.$$

5. Продолжение доказательства

6.3 Blow up time

1. **Эквивалентная характеризация сильных решений**

   Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ и u — решение Лере-Хопфа уравнений (NS) в Q_T, и пусть p — ассоциированное с ним давление. Тогда если

   $$\nabla u \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$$

   то u и p является сильным решением уравнений (NS) в Q_T.

2. **Blow up time**

   Определение. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$. Определим $T_* \in (0,+\infty]$

   $$T_* \ = \ \sup \Big\{ \ T>0 \ \Big| \ \exists \ u \text{ и } p \text{ — сильное решение (NS) в } Q_T = \Omega\times(0,T) \ \Big\}$$

   Число T_*, зависящее от a, мы будем называть *blow up time* для начального даннного a.

3. **Замечания.**

   1) $T_* = +\infty$ означает, что для начального данного a уравнение (NS) имеет сильное решение на любом конечном промежутке веремени $(0,T)$.
   2) $T_*>0$, поскольку $T_* \geq T_0 = \frac{c_\Omega}{\|\nabla a\|^4_{L_2(\Omega)}}$ — время Лере для нач. данного $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$.
   3) если $\|a\|_{W^1_2(\Omega)} \ll 1$, то $T_* = +\infty$.

4. **Поведение нормы $\|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)}$ при приближении к blow up time**

   Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$, и пусть T_* — это blow up time для a. Тогда если $T_* < +\infty$, то

   $$\|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)} \ \geq \ \frac{c(\Omega)^{1/4}}{(T_*-t)^{1/4}} \qquad \forall\ t \in (0,T_*),$$

   где $c(\Omega)>0$ — это постоянная из определения времени Лере для сильного решения.

6.4 Условие Ладыженской–Проди–Серрина

1. **Условие LPS**

   Определение. Будем говорить, что функция $u : Q_T \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет *условию Ладыженской-Проди-Серрина*, если существуют s и l, такие что

$$u \in L_{s,l}(Q_T), \qquad \frac{3}{s} + \frac{2}{l} \ = \ 1, \quad s \in (3, +\infty], \quad l \in [2, +\infty). \tag{LPS}$$

2. **Импликация $\boldsymbol{u \in L_{s,l}(Q_T) \implies \nabla u \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega))}$**

   Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ и пусть u удовлетворяет условию (LPS). Пусть функции u и p являются сильным решением уравнений (NS) в Q_T. Тогда справедлива оценка

$$\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ \le \ \|\nabla a\|^2_{L_2(\Omega)} \, e^{c\,\|u\|^l_{L_{s,l}(Q_T)}}, \qquad \forall\, t \in (0,T).$$

3. **Решения Лере-Хопфа, удовлетворяющие условию LPS, являются сильными**

   Теорема. Пусть $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ и u — решение Лере–Хопфа уравнений (NS) в Q_T, а p — ассоциированное с ним давление. Предположим дополнительно, что для некоторых $s \in (3, +\infty]$, $l \in [2, +\infty)$ функция u удовлетворяет условию (LPS). Тогда

$$u \in W^{2,1}_2(Q_T), \qquad p \in W^{1,0}_2(Q_T),$$

   и u и p являются сильным решением (NS) в Q_T.

6.5 "NSE Millenium Problem"

1. **NSE Millennium Problem**

   Open problem. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей. Требуется

   - либо доказать, что для любых $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ и $T > 0$ существует сильное решение u и p уравнений (NS) в $Q_T = \Omega \times (0, T)$;
   - либо предъявить $a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)$ и $T < +\infty$, такие что сильное решение u и p уравнений (NS) существует в $\bar{\Omega} \times (0, T')$ для любого $T' < T$ и при этом "разрушается" в момент времени $t = T$, т.е.

   $$\|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)} \ \to\ +\infty \qquad \text{при} \quad t \to T - 0$$

2. **Замечания**

   1) Чтобы избежать влияния граничных эффектов на возможное возникновение особенностей у решения, в официальном описании проблемы на сайте института Клэя область Ω предполагается равной либо $\mathbb{R}^3$ (некомпактная область), либо трехмерному тору $\mathbb{T}^3 := \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ (компактная область с периодическими краевыми условиями).
   2) Также в официальном описании проблемы на сайте института Клэя решения предполагаются гладкими ($u \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ и $p \in C^\infty(\bar{Q}_T)$), но можно показать, что при условиях $a \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и $\partial\Omega \subset C^\infty$ сильные решения автоматически обладают этими свойствами.
   3) В терминах blow up time T_* проблему можно сформулировать более лаконично:

   $$\text{либо доказать, что для любого } a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega) \text{ справедливо } T_* = +\infty$$
   $$\text{либо построить } a \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(\Omega)\text{, такое что } T_* < +\infty$$

3. **Конечный "зазор" между классами существования и единственности**

   Пусть $a \in J^\infty_0(\Omega)$. При таком a нам известно глобальное (т.е. в Q_T при любом сколь угодно большом T) существование (одного или нескольких) слабых решений Лере–Хопфа уравнений (NS). В силу теоремы вложения все эти решения удовлетворяют условию

   $$u \in L_{s',l'}(Q_T), \qquad \frac{3}{s'} + \frac{2}{l'} \ \geq\ \frac{3}{2}, \qquad s' \in [2, 6], \quad l' \in [2, +\infty].$$

   С другой стороны, для того, чтобы получить единственность, нам необходимо доказать существование хотя бы одного решения в классе

   $$u \in L_{s,l}(Q_T), \qquad \frac{3}{s} + \frac{2}{l} \ \leq\ 1, \qquad s \in [3, +\infty], \qquad l \in [2, +\infty].$$

Как мы видим, между существованием и единственностью решений существует конечный промежуток в диапазоне показателей суммируемости. Например, если $s = l$, то

$$\text{имеем:} \quad u \in L_{\frac{10}{3}}(Q_T), \qquad \text{хотим:} \quad u \in L_5(Q_T).$$

Преодоление этого “конечного зазора” (доказательство регулярности слабых решений) — один из возможных способов решения “Шестой проблемы тысячелетия”.

Часть III

Уравнения Навье-Стокса, “продвинутая” теория

1 Теория регулярности

1.1 Пространства Морри

1. **Условие на область**

   Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область. Будем говорить, что Ω удовлетворяет условию (A), если

   $$\exists\ A \in (0,1), \quad \exists\ \rho_0 > 0: \quad \forall\ x_0 \in \bar{\Omega}, \quad \forall\ 0 < \rho < \rho_0 \quad |\Omega_\rho(x_0)| \ \geq\ A\ \rho^n \tag{A}$$

   где мы обозначаем $\Omega_\rho(x_0) := \Omega \cap B_\rho(x_0)$.

   Замечание. Липшицевы области удовлетворяют условию (A).

2. **Пространства Морри** $L^{p,\lambda}(\Omega)$

   Определение. Пусть $1 \leq p < +\infty$, $\lambda \geq 0$. *Пространством Морри* $L^{p,\lambda}(\Omega)$ наз.

   $$L^{p,\lambda}(\Omega) \ := \ \left\{ \ u \in L_p(\Omega): \ \|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} \ < \ +\infty \ \right\}$$

   где

   $$\|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} \ := \ \left(\sup_{x_0 \in \Omega} \ \sup_{0<\rho<\operatorname{diam}\Omega} \ \frac{1}{\rho^\lambda} \int\limits_{\Omega_\rho(x_0)} |u(x)|^p \ dx \right)^{1/p}$$

3. **Полнота пространства Морри**

   Теорема. Пространство $L^{p,\lambda}(\Omega)$ является банаховым относительно нормы $\|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$.

4. **Свойства пространств Морри**

   Теорема.

   1) $1 \leq p < +\infty \quad \Longrightarrow \quad L^{p,0}(\Omega) \ = \ L_p(\Omega)$

   2) $1 \leq p \leq q < +\infty, \quad \lambda = n\left(1 - \frac{p}{q}\right) \quad \Longrightarrow \quad L_q(\Omega) \hookrightarrow L^{p,\lambda}(\Omega)$

3) $1 \le p < q < +\infty, \quad 0 \le \mu, \lambda \le n, \quad \frac{n-\mu}{q} \le \frac{n-\lambda}{p} \quad \Longrightarrow \quad L^{q,\mu}(\Omega) \hookrightarrow L^{p,\lambda}(\Omega)$

4) $1 \le p < +\infty \quad \Longrightarrow \quad L^{p,n}(\Omega) = L_\infty(\Omega)$

5) $1 \le p < +\infty, \quad \lambda > n \quad \Longrightarrow \quad L^{p,\lambda}(\Omega) = \{0\}$

5. Примеры

1) $L_n(\Omega) \hookrightarrow L^{p,n-p}(\Omega), \quad 1 \le p < n$
2) $u(x) = \frac{1}{|x|} \quad \Longrightarrow \quad u \notin L_n(B)$, но $u \in L^{p,n-p}(B), \quad \forall\, 1 \le p < n$

6. Теорема вложения для пространств Морри

Теорема. Пусть Ω — выпуклая, $1 \le p < n$, $\lambda \in [0, n-p)$. Пусть $u \in W^1_p(\Omega)$. Тогда

$$\nabla u \in L^{p,\lambda}(\Omega) \qquad \Longrightarrow \qquad u \in L^{q,\lambda}(\Omega), \quad \text{где} \quad q = \frac{(n-\lambda)p}{n-\lambda-p}$$

и

$$\|u - u_\Omega\|_{L^{q,\lambda}(\Omega)} \ \le\ c(n,p,\lambda,\Omega)\, \|\nabla u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$$

где $u_\Omega := \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega u\, dx$.

7. Билинейная форма, соответствующая дрифту из пространства Морри

Теорема. Пусть $n \ge 3$, $b \in L^{p,n-p}(\Omega)$, где $p \in (2, n]$. Обозначим

$$\mathcal{B}[u,\eta] \ :=\ \int\limits_\Omega \eta\, b \cdot \nabla u\, dx, \qquad \forall\, u,\ \eta \in C_0^\infty(\Omega).$$

Тогда

$$|B[u,\eta]| \ \le\ c\, \|b\|_{L^{p,n-p}(\Omega)} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \eta\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\, u, \eta \in C_0^\infty(\Omega).$$

1.2 Пространства Кампанато

1. **Пространства Кампанато**

   Определение. Пусть $1 \le p < +\infty$, $\lambda \ge 0$. *Пространством Кампанато* $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ наз.

   $$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \ := \ \left\{ \ u \in L_p(\Omega) : \ [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \ < \ +\infty \ \right\}$$

   где

   $$[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \ := \ \left(\sup_{x_0 \in \Omega} \ \sup_{0<\rho<\operatorname{diam}\Omega} \ \frac{1}{\rho^\lambda} \int\limits_{\Omega_\rho(x_0)} |u - (u)_{x_0,\rho}|^p \ dx \right)^{1/p}$$

   и $(u)_{x_0,\rho} := \frac{1}{|\Omega_\rho(x_0)|} \int\limits_{\Omega_\rho(x_0)} u(x) \ dx.$

2. **Полнота пространства Кампанато**

   Теорема. Пространство Кампанато $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ является банаховым отн. нормы

   $$\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \ = \ \|u\|_{L_p(\Omega)} \ + \ [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)}$$

3. **Свойства пространств Кампанато**

   Теорема.

   1) $1 \le p < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{p,0}(\Omega) \ = \ L_p(\Omega)$

   2) $1 \le p < q < +\infty, \quad 0 \le \mu, \lambda \le n, \quad \frac{n-\mu}{q} \le \frac{n-\lambda}{p} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{q,\mu}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$

   3) $1 \le p < +\infty \quad \Longrightarrow \quad L_\infty(\Omega) \subset \mathcal{L}^{p,n}(\Omega), \quad L_\infty(\Omega) \ne \mathcal{L}^{p,n}(\Omega)$

4. **Совпадение пространств Морри и Кампанато при** $0 \le \lambda < n$

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — огр. область, удовл. условию (A) и $1 \le p < +\infty$. Тогда

   $$0 \le \lambda < n \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \ = \ L^{p,\lambda}(\Omega)$$

5. **Совпадение пространств Кампанато и Гельдера при** $\lambda > n$

   Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — огр. область, удовл. условию (A) и $1 \le p < +\infty$. Тогда

   1) $n < \lambda < n + p \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \ \simeq \ C^\mu(\bar{\Omega}), \quad$ где $\quad \mu := \frac{\lambda - n}{p} \ \in \ (0, 1]$

   2) $\lambda = n + p \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \ \simeq \ \mathrm{Lip}(\Omega)$

   3) $\lambda > n + p \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \ \simeq \ \{ \ const \ \}$

6. Лемма Морри

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — огр. область, $u \in W^1_{p,loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$. Пусть

$$\exists\, \mu \in (0,1], \quad M > 0 : \qquad \int\limits_{B_\rho(x)} |\nabla u|^p \; dx \;\leq\; M^p \; \rho^{n-p+\mu p}, \qquad \forall\; B_\rho(x) \subset \Omega$$

Тогда $u \in C^\mu_{loc}(\Omega)$.

1.3 Локальная гладкость решений параболических уравнений

1. **Параболические пространства Кампанато**

   Теорема. Пусть $1 \le p < +\infty$, и пусть $u \in L_p(Q_T)$ такова, что
   $$\exists\, K > 0 : \qquad \int\limits_{Q_\rho(z_0)} |u - (u)_{z_0,\rho}|^p\, dz \;\le\; K^p \rho^{n+2+\mu p}, \qquad \forall\, Q_\rho(z_0) \Subset Q_T$$
   Тогда $u \in C^{\mu,\frac{\mu}{2}}_{loc}(Q_T)$.

2. **Параболическое неравенство Пуанкаре-Соболева**

   Теорема. Пусть $u \in W^{2,1}_p(Q_R)$, $1 \le p < \frac{n+2}{2}$, $1 \le q < \frac{\frac{n+2}{2}p}{\frac{n+2}{2} - p}$. Тогда
   $$\Big(\fint\limits_{Q_R} |u - (\nabla u)_{Q_R}\, x - (u)_{Q_R}|^q\; dxdt \Big)^{1/q} \;+\; R \Big(\fint\limits_{Q_R} |\nabla u - (\nabla u)_{Q_R}|^q\; dxdt \Big)^{1/q} \;\le$$
   $$\le\; c\; R^2 \left(\fint\limits_{Q_R} \Big(|\nabla^2 u|^p + |\partial_t u|^p \Big)\; dxdt \right)^{1/p}$$

3. **Параболическое неравенство Каччиопполи**

   Теорема. Пусть $b \in \mathbb{R}^n$, и пусть $u \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap W^{1,0}_2(Q_T)$ — слабое решение уравнения
   $$\partial_t u - \Delta u + b \cdot \nabla u \;=\; 0 \qquad \text{в} \qquad \mathcal{D}'(Q),$$
   Тогда для любого $z_0 = (x_0, t_0) \in Q_T$, такого что $Q_{2R}(z_0) := B_{2R}(x_0) \times (t_0 - 4R^2, t_0] \subset Q_T$, и для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется оценка
   $$\sup_{t \in (t_0 - R^2, t_0)} \int\limits_{B_R(x_0)} |u - \lambda|^2\, dx \;+\; \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\, dxdt \;\le\; \frac{c}{R^2} \int\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u - \lambda|^2\, dxdt$$
   в которой постоянная $c > 0$ зависит только от $|b|$ и n. В частности,
   $$\|\nabla u\|_{L_2(Q_R(z_0))} \;\le\; \frac{c}{R}\, \|u\|_{L_2(Q_{2R}(z_0))}$$

4. **Слабые решения являются сильными**

   Теорема. Пусть $f \in L_2(Q)$, $b \in \mathbb{R}^n$, и пусть $u \in W^{1,0}_2(Q)$ — слабое решение уравнения
   $$\partial_t u - \Delta u + b \cdot \nabla u \;=\; f \qquad \text{в} \qquad \mathcal{D}'(Q)$$
   Тогда $u \in W^{2,1}_{2,loc}(Q)$ и справедлива оценка
   $$\|u\|_{W^{2,1}_2(Q_{1/2})} \;\le\; c \Big(\|u\|_{L_2(Q)} + \|f\|_{L_2(Q)} \Big)$$
   в которой постоянная $c > 0$ зависит только от n и $|b|$.

5. **Гладкость решений по пространственным переменным**

Теорема. Пусть $b \in \mathbb{R}^n$, и пусть $u \in W_2^{1,0}(Q)$ — слабое решение уравнения

$$\partial_t u - \Delta u + b \cdot \nabla u \; = \; 0 \qquad \text{в} \qquad \mathcal{D}'(Q) \tag{P}$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\nabla^k u \in W^{2,1}_{2,loc}(Q)$$

и справедлива оценка

$$\|\nabla^k u\|_{W_2^{2,1}(Q_{1/2})} \; \leq \; c_k \, \|u\|_{L_2(Q)}$$

в которой постоянная $c_k > 0$ зависит только от n, k и $|b|$. В частности,

$$u \in W_2^{1,0}(Q) \qquad \Longrightarrow \qquad u \in L_{2,loc}((-1,0]; C^\infty_{loc}(B))$$

6. **Оценка производных по времени**

Теорема. Пусть $b \in \mathbb{R}^n$, и пусть $u \in W_2^{1,0}(Q)$ — слабое решение уравнения (P). Тогда для любых k, $l \in \mathbb{Z}_+$

$$\partial_t^l \nabla^k u \in W^{2,1}_{2,loc}(Q)$$

и справедлива оценка

$$\|\partial_t^l \nabla^k u\|_{W_2^{2,1}(Q_{1/2})} \; \leq \; c_{k,l} \, \|u\|_{L_2(Q)}$$

в которой постоянная $c_{k,l} > 0$ зависит только от n, k, l и $|b|$.

7. **Гипоэллиптичность параболич. уравнений с постоянными коэффициентами**

Теорема. Пусть $b \in \mathbb{R}^n$. Тогда любое слабое решение $u \in W_2^{1,0}(Q)$ уравнения (P) является гладким:

$$u \in W_2^{1,0}(Q) \qquad \Longrightarrow \qquad u \in C^\infty_{loc}(Q)$$

и для любых l, $k \in \mathbb{Z}_+$ справедлива оценка

$$\sup_{(x,t)\in Q_{1/2}} |\partial_t^l \nabla^k u(x,t)| \; \leq \; c_{l,k} \, \|u\|_{L_2(Q)}$$

в которой постоянная $c_{l,k} > 0$ зависит только от n, l, k и $|b|$.

8. **Decay estimates**

Теорема. Пусть $b \in \mathbb{R}^n$, и пусть $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое решение уравнения (P). Тогда для любого $Q_R(z_0) \subset Q_T$ и любого $0 < \rho < R$ выполняются оценки

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |u|^2 \, dxdt \; \leq \; c_1 \, \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \int\limits_{Q_R(z_0)} |u|^2 \, dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |u - (u)_{z_0,\rho}|^2 \, dx \; \leq \; c_2 \, \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+4} \int\limits_{Q_R(x_0)} |u - (u)_{z_0,R}|^2 \, dx,$$

где постоянные c_1 и c_2 зависят только от $|b|$ и n.