Параболические уравнения

Курс Т.Н. Шилкина (ПОМИ РАН)

Аннотация

Данный спецкурс посвящен общей теории параболических уравнений. Первая часть курса фактически является прямым продолжением второго семестра общего курса матфизики в бакалавриате МКН. Все основные концепции из общего курса (понятие слабых решений, энергетические оценки, сильные решения, теоремы вложения итд), развитые ранее для эллиптических уравнений, будут перенесены на случай параболических задач. Вторая часть курса является своеобразным “мостиком” от базовой теории уравнений эволюционного типа к ее “продвинутым” разделам — таким, как, например, теория уравнений Навье-Стокса, теория регулярности, теория устойчивости, теория аттракторов и многим другим.

Приблизительный план курса

- Уравнение теплопроводности в ограниченной области. Сходимость метода Фурье. “Параболические” (анизотропные) пространства Соболева. Функции со слабой производной по времени.
- Слабые решения линейных параболических уравнений. Энергетическая оценка, единственность слабых решений. Метод Галеркина, существование слабых решений. Сильные решения.
- Локальная гладкость слабых решений параболических уравнений и систем. Критерий Кампанато непрерывности функции по Гельдеру, непрерывность по Гельдеру слабых решений.
- Мультипликативные неравенства. Параболические теоремы вложения. Теоремы о компактности. Вложения в пространства Гельдера.

Содержание

Список литературы

Параболические уравнения

[1] О.А. Ладыженская, “Краевые задачи математической физики”, Москва, “Наука”, 1973.

[2] Л.К. Эванс, “Уравнения с частными производными”, Новосибирск, Издательство Т. Рожковской, 2003.

Теория регулярности

[3] M. Giaquinta, L. Martinazzi, An introduction to the regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs. Publications of the Scuola Normale Superiore, 2012.

[4] Q. Han, F.-H. Lin, Elliptic partial differential equations, AMS, 2000.

[5] А.А. Архипова, И.В. Нежинская, Регулярность решений линейных эллиптических и параболических систем уравнений, изд–во СПбГУ, 2014.

Функции со значениями в банаховом пространстве

[6] К. Иосида, “Функциональный анализ”, Москва, “Мир”, 1967.

[7] Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, “Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения”, Москва, “Мир”, 1978.

Обозначения

Всюду в нашем курсе:

- по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 1 до n
- $a \cdot b = a_j b_j \equiv \sum_{j=1}^n a_j b_j, \quad \forall\, a,\, b \in \mathbb{R}^n$
- индекс j после запятой означает дифференцирование по x_j, т.е. $\varphi_{,j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$, $u_{j,k} = \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$ итд
- $\partial_t u := \frac{\partial u}{\partial t}$
- если $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, то $\nabla \varphi = (\varphi_{,j})$, $\nabla^2 \varphi = (\varphi_{,jk})$
- $\| \cdot \|_X$ — норма в банаховом пространстве X
- $(\cdot, \cdot)_H$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве H
- $X \hookrightarrow Y$ — непрерывное вложение банаховых пространств $X \subset Y$, $\|x\|_Y \le c\, \|x\|_X, \forall\, x \in X$
- $\| \cdot \|_X \asymp \| \cdot \|_Y \quad \iff \quad \exists\, c_1,\, c_2 > 0\colon \quad c_1\, \|u\|_X \le \|u\|_Y \le c_2\, \|u\|_X \quad \forall\, u \in X \cap Y$
- X^* — пр–во, сопряженное к сеперабельному банаховому пр–ву X, $\|f\|_{X^*} := \sup\limits_{\|x\|_X \le 1} |f(x)|$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — отношение двойственности X и X^*, $\langle f, x \rangle \equiv \langle x, f \rangle := f(x)$, $x \in X$, $f \in X^*$
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса C^2, $|\Omega|$ — n-мерная мера Лебега Ω
- $Q_T := \Omega \times (0, T]$, $|Q_T|$ — $(n+1)$-мерная мера Лебега Q_T
- $\partial \Omega$ — граница Ω, $\partial' Q_T := \bar{Q}_T \setminus Q_T$ — параболическая граница Q_T
- $E_1 \Subset E_2 \quad \iff \quad E_1$ — компакт и $\bar{E}_1 \subset E_2 \quad (E_1,\, E_2 \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{E}_1$ — замыкание $E_1)$
- Если $u : Q_T \to \mathbb{R}$, то через $u(t) := u(\cdot, t)$ мы обозначаем функции $x \in \Omega \mapsto u(x, t)$. Как правило, эти функции определены как минимум при п.в. $t \in (0, T)$.
- $u = u(x) \quad \Longrightarrow \quad [u]_\Omega := \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega u(x)\, dx = \fint\limits_\Omega u(x)\, dx$
- $u = u(x,t) \quad \Longrightarrow \quad (u)_{Q_T} := \frac{1}{|Q_T|} \int\limits_{Q_T} u(x,t)\, dxdt, \quad [u(t)]_\Omega := \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega u(x,t)\, dx$
- $B_R(x_0) := \{\, x \in \mathbb{R}^n : \ |x - x_0| < R \,\}$, $Q_R(x_0, t_0) := B_R(x_0) \times (t_0 - R^2, t_0]$
- $B_R := B_R(0)$, $Q_R := Q_R(0,0)$
- $z \in \mathbb{R}^{n+1}$, $z = (x,t)$ где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$
- $\int\limits_{Q_T} u\, dz := \int\limits_{Q_T} u(x,t)\, dxdt, \quad \fint\limits_{Q_T} u\, dz := \frac{1}{|Q_T|} \int\limits_{Q_T} u(x,t)\, dxdt$
- Как правило, в обозначении функциональных классов мы не делаем различния между пространствами скалярных, векторозначных или матричнозначных функций, используя для них одни и те же обозначения. В зависимости от контекста $L_p(\Omega)$ может обозначать либо пространство скалярных функций со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, либо пространство векторозначных функций $L_p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ итд. Однако в тех случаях, где это необходимо, иногда мы будем явно указывать пространство образов в обозначениях функциональных классов: $C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $L_p(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ итд.
- $C_0^\infty(\Omega) := \{\, u \in C^\infty(\bar{\Omega}) :\ \operatorname{supp} u$ — компакт, $\operatorname{supp} u \Subset \Omega \,\}$
- $L_p(\Omega)$ — пространство Лебега, $p \in [1, +\infty]$
- $W_p^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ — пространство Соболева, $\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega) = \mathrm{Closure}_{W_p^k(\Omega)}\, C_0^\infty(\Omega)$

- $u \in W^1_p(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad u|_{\partial\Omega} \in L_p(\partial\Omega)$ — след функции u на $\partial\Omega$
- $W^{1,0}_p(Q_T) := \{\ u \in L_p(Q_T) :\ \nabla u \in L_p(Q_T)\ \}$
- $W^{1,1}_p(Q_T) := \{\ u \in L_p(Q_T) :\ \nabla u,\ \partial_t u \in L_p(Q_T)\ \}$
- $W^{2,1}_p(Q_T) := \{\ u \in W^{1,0}_p(Q_T) :\ \nabla^2 u,\ \partial_t u \in L_p(Q_T)\ \}$
- $W^{-1}_p(\Omega) = \big(\overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega)\big)^*, \quad p \in (1, +\infty), \quad p' = \frac{p}{p-1}$

$$\|f\|_{W^{-1}_p(\Omega)} \ := \sup_{\eta \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega),\ \|\eta\|_{W^1_{p'}(\Omega)} \le 1} |\langle f, \eta\rangle|$$

- $C^\mu(\bar\Omega)$, $\mu \in (0,1)$ — пространство функций, непрерывных по Гельдеру, с нормой

$$\|u\|_{C^\mu(\bar\Omega)} = \|u\|_{C(\bar\Omega)} + \langle u\rangle_{C^\mu(\bar\Omega)}, \qquad \langle u\rangle_{C^\mu(\bar\Omega)} \ := \sup_{x', x'' \in \bar\Omega,\, x' \ne x''} \frac{|u(x') - u(x'')|}{|x' - x''|^\mu}$$

- $C^{\mu, \frac{\mu}{2}}(\bar Q_T)$, $\mu \in (0,1)$ — пространство функций, непрерывных по Гельдеру в параболической метрике, с нормой

$$\|u\|_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar Q_T)} = \|u\|_{C(\bar Q_T)} + \langle u\rangle_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar Q_T)}, \qquad \langle u\rangle_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar Q_T)} \ := \sup_{(x',t') \ne (x'',t'')} \frac{|u(x',t') - u(x'',t'')|}{|x' - x''|^\mu + |t' - t''|^{\frac{\mu}{2}}}$$

1 Уравнение теплопроводности в ограниченной области

1.1 Метод Фурье для оператора Лапласа

1. **Собств. числа и собств. функции задачи Дирихле для оператора Лапласа**

   Всюду в нашем курсе $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область. Заметим, что в этом случае

   $$\text{вложение} \quad \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \quad \text{компактно.}$$

   Определение. Функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ называется *собственной функцией* задачи Дирихле для оператора $-\Delta$, соответствующей собственному числу $\lambda \in \mathbb{C}$, если $u \not\equiv 0$ в Ω и справедливо тождество

   $$\int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla \eta \, dx \;=\; \lambda \int\limits_\Omega u\eta \, dx, \qquad \forall\, \eta \in C_0^\infty(\Omega). \tag{$*$}$$

2. **Операторное уравнение, соответствующее задаче** $(*)$

   Рассмотрим гильбертово пространство $H := \big(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), [\cdot,\cdot]\big)$ со скалярным произведением

   $$[u,\eta] \;:=\; (\nabla u, \nabla \eta)_{L_2(\Omega)}.$$

   Тогда задача $(*)$ эквивалентна выполнению операторного уравнения

   $$u \in H: \qquad u \;=\; \lambda\, K u \qquad \text{в} \quad H, \tag{$*$}$$

   где $K : H \to H$ — компактный с/с положительный оператор, заданный билинейной формой

   $$[Ku, \eta] \;=\; \int\limits_\Omega u\eta \, dx, \qquad \forall\, u, \eta \in H.$$

3. **Теорема Гильберта–Шмидта**

   Теорема.

   1) собственные λ_k числа задачи $(*)$ вещественны и положительны;
   2) собств. числа λ_k задчи $(*)$ образуют счетное мн–во и накапливаются только на $+\infty$;
   3) собственные п/пр–ва $\mathcal{N}_{\lambda_k} \subset H$, отвечающие собственным числам λ_k, конечномерны;
   4) собственные функции $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ задачи $(*)$ орбазуют ортогональный базис в H

4. **Обозначения** (всюду в нашем курсе)

   - $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — с.ч. задачи $(*)$, занумерованные в порядке возрастания с учетом кратности

     $$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots \le \lambda_k \le \ldots \;\to\; +\infty$$

   - $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ – с.ф. задачи $(*)$, отвечающие $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, ортонормированнные в $L_2(\Omega)$:

     $$\|\varphi_k\|_{L_2(\Omega)} \;=\; 1, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

5. **Полнота системы собственных функций задачи Дирихле для оператора Лапласа**

Теорема. Пусть $u \in L_2(\Omega)$ и $f \in W_2^{-1}(\Omega)$. Обозначим

$$c_k := (u, \varphi_k)_{L_2(\Omega)}, \qquad f_k := \langle f, \varphi_k \rangle, \qquad k = 1, 2, \dots$$

и для любого $N \in \mathbb{N}$ обозначим

$$u^N(x) := \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k(x), \qquad f^N(x) = \sum_{k=1}^{N} f_k \varphi_k(x)$$

Тогда u^N, $f^N \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и

1) набор $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортонормированный базис пространства $L_2(\Omega)$, то есть

$$\operatorname{Closure}_{L_2(\Omega)} \operatorname{Lin}\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} = L_2(\Omega),$$

и, следовательно,

$$\forall\, u \in L_2(\Omega) \qquad u^N \to u \quad \text{в} \quad L_2(\Omega), \qquad \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2;$$

2) набор $\left\{\frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, снабженного скалярным произведением $(\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)}$ и, следовательно,

$$\forall\, u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \qquad u^N \to u \quad \text{в} \quad W_2^1(\Omega), \qquad \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \asymp \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |c_k|^2;$$

3) для любого $f \in W_2^{-1}(\Omega)$

$$f^N \to f \quad \text{в} \quad W_2^{-1}(\Omega), \qquad \|f\|_{W_2^{-1}(\Omega)}^2 \asymp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k|^2}{\lambda_k} < +\infty;$$

4) если $\partial\Omega \subset C^2$, то набор $\left\{\frac{\varphi_k}{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$, снабженного скалярным произведением $(\Delta u, \Delta v)_{L_2(\Omega)}$. При этом

$$\forall\, u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega) \qquad u^N \to u \quad \text{в} \quad W_2^2(\Omega), \qquad \|u\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \asymp \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |c_k|^2.$$

Доказательство: Обозначим $[u, v] := (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)}$, $u, v \in H$. Система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортогональным базисом в H, то есть выполняется импликация

$$f \in H, \qquad [f, \varphi_k] = 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad f = 0$$

Кроме того, по условию мы считаем функции φ_k нормированными в пространстве $L_2(\Omega)$:

$$\|\varphi_k\|_{L_2(\Omega)} = 1.$$

1. Докажем, что $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$. Сначала докажем, что это ортогональная система в $L_2(\Omega)$. Действительно,

$$\varphi_k = \lambda_k K\varphi_k \quad \text{в} \quad H \qquad \Longrightarrow \qquad \underbrace{(\nabla\varphi_k, \nabla\varphi_j)_{L_2(\Omega)}}_{=[\varphi_k,\varphi_j]=\delta_{kj}} \; = \; \lambda_k(\varphi_k, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}$$

Так как $\lambda_k \neq 0$, получаем $(\varphi_k, \varphi_j)_{L_2(\Omega)} = \delta_{kj}$.

Теперь докажем, что $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис в $L_2(\Omega)$. Пусть $f \in L_2(\Omega)$ такова, что

$$(f, \varphi_k)_{L_2(\Omega)} = 0, \qquad \forall\; k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — (единственное) обобщенное решение задачи

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Тогда $(\nabla u, \nabla\eta)_{L_2(\Omega)} = (f, \eta)_{L_2(\Omega)}$, $\forall\; \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Полагая $\eta = \varphi_k$, получаем

$$[u, \varphi_k] \equiv (\nabla u, \nabla\varphi_k)_{L_2(\Omega)} = (f, \varphi_k)_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Поскольку $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональный базис в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $[\cdot,\cdot]$, заключаем что $u = 0$, откуда $f = 0$. Следовательно, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$. Тогда свойства

$$\forall\; u \in L_2(\Omega) \qquad u^N \to u \quad \text{в} \quad L_2(\Omega), \qquad \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \; = \; \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2;$$

вытекают из общих свойств рядов Фурье в гильбертовых пространствах.

2. Функции $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образуют ортогональный базис в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $[\cdot,\cdot]$ по построению (или по теореме Гильберта–Шмидта). Докажем, что функции $\frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}}$ нормированы в H. Действительно

$$\|\varphi_k\|^2_H = [\varphi_k, \varphi_k] = (\nabla\varphi_k, \nabla\varphi_k)_{L_2(\Omega)} = \lambda_k \underbrace{(\varphi_k, \varphi_k)_{L_2(\Omega)}}_{=\,1} = \lambda_k.$$

Итак, $\left\{\frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $(H, [\cdot,\cdot])$. Поскольку на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ норма $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$ эквивалентна норме $\sqrt{[u,u]}$, из общих свойств рядов Фурье в гильбертовых пространствах получаем, что

$$\forall\; u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \qquad \sum_{k=1}^{N} d_k \frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \to u \quad \text{в} \quad W_2^1(\Omega), \qquad d_k := \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}[u, \varphi_k]$$

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \; \asymp \; [u,u] \; = \; \sum_{k=1}^{\infty} |d_k|^2.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$d_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}[u, \varphi_k] = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\,(\nabla u, \nabla\varphi_k)_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\lambda_k}\,(u, \varphi_k)_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\lambda_k}\,c_k$$

3. Пусть $f \in W_2^{-1}(\Omega)$ и $f_k := \langle f, \varphi_k \rangle$. Докажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k|^2}{\lambda_k}$ сходится.

Рассмотрим функцию $\eta^N := \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{f_k}{\lambda_k} \varphi_k \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Из пункта **2** мы знаем, что

$$\|\eta^N\|^2_{W_2^1(\Omega)} \asymp \sum_{k=1}^{N} \frac{|f_k|^2}{\lambda_k}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{|f_k|^2}{\lambda_k} \le |\langle f, \eta^N \rangle| \le \|f\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \|\eta^N\|_{W_2^1(\Omega)} \le c\, \|f\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \Big(\sum_{k=1}^{N} \frac{|f_k|^2}{\lambda_k} \Big)^{1/2}$$

что дает

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k|^2}{\lambda_k} \le c\, \|f\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)}$$

Докажем обратное неравенство. Пусть $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — произвольная. Тогда из пункта **2** мы имеем

$$\eta^N = \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \to \eta \quad \text{в} \quad \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \qquad \|\eta\|^2_{W_2^1(\Omega)} \asymp \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |c_k|^2, \qquad c_k = (\eta, \varphi_k)_{L_2(\Omega)}$$

Тогда

$$\langle f, \eta \rangle = \lim_{N \to \infty} \langle f, \eta^N \rangle, \qquad \langle f, \eta^N \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} f_k c_k$$

Поэтому

$$|\langle f, \eta^N \rangle| \le \Big(\sum_{k=1}^{N} \frac{|f_k|^2}{\lambda_k} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k |c_k|^2 \Big)^{1/2} \le c\, \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k|^2}{\lambda_k} \Big)^{1/2} \|\eta\|_{W_2^1(\Omega)}$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем

$$|\langle f, \eta \rangle| \le c\, \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k|^2}{\lambda_k} \Big)^{1/2} \|\eta\|_{W_2^1(\Omega)}, \qquad \forall\, \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$

то есть

$$\|f\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)} \le c\, \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k|^2}{\lambda_k} \Big)^{1/2}.$$

Наконец, обозначим $f^N := \sum\limits_{k=1}^{N} f_k \varphi_k \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тогда по уже доказанному неравенству

$$\|f - f^N\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \le c\, \Big(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|f_k|^2}{\lambda_k} \Big)^{1/2} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

4. Обозначим $[[u, v]] = (\Delta u, \Delta v)_{L_2(\Omega)}$. При $\partial\Omega \subset C^2$ мы имеем $\varphi_k \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$ и $-\Delta \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$ п.в. в Ω. Тогда

$$[[\varphi_k, \varphi_j]] = (\Delta \varphi_k, \Delta \varphi_j)_{L_2(\Omega)} = \lambda_k \lambda_j\, (\varphi_k, \varphi_j)_{L_2(\Omega)} = \lambda_k^2\, \delta_{kj},$$

и, следовательно, $\left\{\frac{\varphi_k}{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)\cap W^2_2(\Omega)$ относительно скалярного произведения $[[u,v]]$. Докажем, что эта система является базисом. Пусть $f\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)\cap W^2_2(\Omega)$ такова, что

$$[[f,\varphi_k]]=0, \qquad \forall\ k\in\mathbb{N}.$$

Тогда

$$0\ =\ (\Delta f,\Delta\varphi_k)_{L_2(\Omega)}\ =\ \lambda_k(\Delta f,\varphi_k)_{L_2(\Omega)} \qquad (\Delta f,\varphi_k)_{L_2(\Omega)}=0, \qquad \forall\ k\in\mathbb{N}.$$

Поскольку $\{\varphi_j\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, заключаем, что $\Delta f=0$ п.в. в Ω. Следовательно, $f\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)\cap W^2_2(\Omega)$ — сильное решение задачи

$$\begin{cases} -\Delta f=0 \quad \text{в} \quad \Omega\\ \quad f|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

По теореме единственности получаем $f\equiv 0$. Поэтому $\left\{\frac{\varphi_k}{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)\cap W^2_2(\Omega)$ со скалярным произведением $[[\cdot,\cdot]]$.

Поскольку на $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)\cap W^2_2(\Omega)$ норма $\|u\|_{2,2,\Omega}$ эквивалентна норме $\sqrt{[[u,u]]}$, из общих свойств рядов Фурье в гильбертовых пространствах получаем, что

$$\forall\ u\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)\cap W^2_2(\Omega) \qquad \sum_{k=1}^{N} d_k\frac{\varphi_k}{\lambda_k}\to u \quad \text{в} \quad W^2_2(\Omega), \qquad d_k:=\frac{1}{\lambda_k}[[u,\varphi_k]]$$

$$\|u\|^2_{W^2_2(\Omega)}\ \asymp\ [[u,u]]\ =\ \sum_{k=1}^{\infty}|d_k|^2.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$d_k=\frac{1}{\lambda_k}[[u,\varphi_k]]=\frac{1}{\lambda_k}(\Delta u,\Delta\varphi_k)_{L_2(\Omega)}=-(\Delta u,\varphi_k)_{L_2(\Omega)}=-(u,\Delta\varphi_k)_{L_2(\Omega)}=\lambda_k c_k.$$

Теорема доказана полностью. $\square$

6. **Метод Фурье для оператора Лапласа**

Теорема. Пусть $f\in W_2^{-1}(\Omega)$. Обозначим

$$f_k\ :=\langle f,\varphi_k\rangle, \qquad c_k\ :=\ \frac{1}{\lambda_k}\,f_k, \qquad u^N(x)\ :=\ \sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k(x).$$

Тогда u^N сходятся в $W^1_2(\Omega)$ к обобщенному решению $u\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ задачи

$$\begin{cases} -\Delta u=f \quad \text{в} \quad \Omega\\ \quad u|_{\partial\Omega}=0\end{cases} \qquad (\mathcal{D})$$

Доказательство: Если $f\in W_2^{-1}(\Omega)$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|c_k|^2\ =\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|f_k|^2}{\lambda_k}\ \le\ c\,\|f\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)}\ <\ +\infty,$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$ сходится в $W_2^1(\Omega)$. Следовательно, существует $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, такая что

$$u^N \to u \quad \text{в} \quad W_2^1(\Omega).$$

Докажем, что u — обобщенное решение задачи $(\mathcal{D})$. Действительно, для любого $j \in \mathbb{N}$ при $N \geq j$ справедливо тождество

$$(\nabla u^N, \nabla\varphi_j)_{L_2(\Omega)} \;=\; \langle f, \varphi_j\rangle \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_j = \frac{1}{\lambda_j}\, f_j$$

Фиксируя $j \in \mathbb{N}$ и переходя в этом тождестве к пределу при $N \to \infty$, получаем

$$(\nabla u, \nabla\varphi_j)_{L_2(\Omega)} \;=\; \langle f, \varphi_j\rangle, \qquad \forall\; j \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$(\nabla u, \nabla\eta^N)_{L_2(\Omega)} \;=\; \langle f, \eta^N\rangle, \qquad \forall\; \eta^N \in \mathrm{Lin}\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Поскольку $\mathrm{Lin}\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ всюду плотно в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, получаем

$$(\nabla u, \nabla\eta)_{L_2(\Omega)} \;=\; \langle f, \eta\rangle, \qquad \forall\; \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$

то есть $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — обобщенное решение задачи $(\mathcal{D})$. $\square$

7. **Сходимость ряда Фурье в пространстве $W_2^2(\Omega)$**

Теорема. Пусть $\partial\Omega \subset C^2$, $f \in L_2(\Omega)$ и коэффициенты c_k определены по формуле

$$f_k \;:=\; (f, \varphi_k)_{L_2(\Omega)}, \qquad c_k \;:=\; \frac{1}{\lambda_k}\, f_k, \qquad u^N(x) \;:=\; \sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k(x).$$

Тогда u^N сходится в $W_2^2(\Omega)$ к сильному решению $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$ задачи $(\mathcal{D})$.

Доказательство: Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |c_k|^2 \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \;=\; \|f\|_{2,\Omega}^2 \;<\; +\infty,$$

ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$ сходится в $W_2^2(\Omega)$. Следовательно, $u^N \to u$ в $W_2^2(\Omega)$ и $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$ — сильное решение задачи $(\mathcal{D})$. $\square$

1.2 “Параболические” пространства Соболева

1. **Пространство $L_p(Q_T)$ как пространство банаховозначных функций**

   Пусть $Q_T := \Omega \times (0,T]$, $u \in L_p(Q_T)$, $p \in [1,+\infty)$. Тогда

   $$L_p(Q_T) \;=\; L_p(0,T;L_p(\Omega))$$

   т.е. для п.в. $t \in (0,T)$ функция $x \in \Omega \mapsto u(x,t)$ принадлежит $L_p(\Omega)$ и

   $$t \in (0,T) \;\mapsto\; \|u(\cdot,t)\|_{L_p(\Omega)} \;\in\; L_p(0,T), \qquad \|u\|^p_{L_p(Q_T)} \;=\; \int\limits_0^T \|u(\cdot,t)\|^p_{L_p(\Omega)}\,dt$$

2. **Разложение в ряд Фурье функций, зависящих от времени**

   Для любой $u \in L_2(Q_T)$ будем обозначать через u^N частичную сумму ряда Фурье функции u по собсвенному базису $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ задачи Дирихле для оператора $-\Delta$ в Ω:

   $$u^N(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^N c_k(t)\varphi_k(x), \qquad c_k(t) \;:=\; \int\limits_\Omega u(x,t)\varphi_k(x)\,dx$$

   Очевидно, что

   $$u \in L_2(Q_T) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{c} c_k \in L_2(0,T), \\ \|u\|^2_{L_2(Q_T)} \;=\; \sum\limits_{k=1}^\infty \int\limits_0^T |c_k(t)|^2\,dt \;<\; +\infty \end{array} \right.$$

   и

   $$u \in L_2(Q_T) \qquad \Longrightarrow \qquad \|u^N - u\|_{L_2(Q_T)} \;\to\; 0$$

3. **Пространства $L_\infty(0,T;L_p(\Omega))$ и $C([0,T];L_p(\Omega))$**

   Для любого $p \in [1,+\infty)$ определим

   $$L_\infty(0,T;L_p(\Omega)) \;:=\; \Big\{ u \in L_p(Q_T): \; t \in (0,T) \mapsto \|u(\cdot,t)\|_{L_p(\Omega)} \text{ сущ. огранич. на } (0,T) \Big\}$$

   $$C([0,T];L_p(\Omega)) \;:=\; \Big\{ u \in L_p(Q_T): \; \forall\, t \in [0,T] \;\; u(\cdot,t) \in L_p(\Omega) \;\text{ и }\; \|u(\cdot,t) - u(\cdot,t_0)\|_{L_p(\Omega)} \underset{t \to t_0}{\to} 0 \Big\}$$

   При этом

   $$\|u\|_{L_\infty(0,T;L_p(\Omega))} := \operatorname*{esssup}_{t \in (0,T)} \|u(\cdot,t)\|_{L_p(\Omega)}, \qquad \|u\|_{C([0,T];L_p(\Omega))} := \sup_{t \in (0,T)} \|u(\cdot,t)\|_{L_p(\Omega)}$$

   Заметим, что если $u \in C([0,T];L_p(\Omega))$ то функция $t \in [0,T] \;\mapsto\; \|u(t)\|_{L_p(\Omega)}$ непрерывна и

   $$C([0,T];L_p(\Omega)) \;\hookrightarrow\; L_\infty(0,T;L_p(\Omega))$$

4. **Пространство $W_p^{1,0}(Q_T)$**

Пусть $u \in L_p(Q_T)$, $p \in [1, +\infty)$. Тогда можно говорить о том, что у функции u существуют обобщенные производные в смысле Соболева по переменным $x_1, \ldots, x_n$.

$$W_p^{1,0}(Q_T) := \{\, u \in L_p(Q_T) : \nabla u \in L_p(Q_T) \,\}, \qquad \|u\|_{W_p^{1,0}(Q_T)} := \|u\|_{L_p(Q_T)} + \|\nabla u\|_{L_p(Q_T)}$$

Заметим, что

$$W_p^{1,0}(Q_T) = L_p(0,T; W_p^1(\Omega)),$$

т.е. для п.в. $t \in (0,T)$ функция $x \in \Omega \mapsto u(x,t)$ принадлежит $W_p^1(\Omega)$ и

$$t \in (0,T) \mapsto \|u(\cdot,t)\|_{W_p^1(\Omega)} \in L_p(0,T), \qquad \|u\|^p_{W_p^{1,0}(Q_T)} \asymp \int_0^T \|u(\cdot,t)\|^p_{W_p^1(\Omega)}\, dt$$

5. **“Энергетическое” пространство**

В пространстве $W_2^{1,0}(Q_T)$ можно выделить подпространство функций

$$W_{2,0}^{1,0}(Q_T) := L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),$$

обращающихся в ноль на боковой поверхности $\partial\Omega \times (0,T)$ цилиндра $Q_T = \Omega \times (0,T)$. При решении первой начально-краевой задачи для параболического уравнения это пространство играет роль “энергетического пространсва”, в котором мы будем доказывать существование слабых решений. Очевидно, что

$$u \in W_{2,0}^{1,0}(Q_T) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} c_k \in L_2(0,T), \\ \|u\|^2_{W_2^{1,0}(Q_T)} \asymp \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int\limits_0^T |c_k(t)|^2 < +\infty \end{cases}$$

и

$$u \in W_{2,0}^{1,0}(Q_T) \qquad \Longrightarrow \qquad \|u^N - u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \to 0$$

6. **Пространство $W_p^{1,1}(Q_T)$**

Пространство $W_p^{1,1}(Q_T)$ — это самое обычное пространство Соболева для функций $(n+1)$ переменной $x_1, \ldots, x_n, t$, определенных в области Q_T. Очевидно, что оно является подпространством $W_p^{1,0}(Q_T)$ и

$$\|u\|_{W_p^{1,1}(Q_T)} := \|u\|_{W_p^{1,0}(Q_T)} + \|\partial_t u\|_{L_p(Q_T)}$$

7. **Вложение пространства $W_p^{1,1}(Q_T)$ в $C([0,T]; L_p(\Omega))$**

Теорема. $p \in [1, +\infty) \quad \Longrightarrow \quad W_p^{1,1}(Q_T)$ непрерывно вкладывается в $C([0,T]; L_p(\Omega))$.

8. **Дифференцирование ряда Фурье по времени**

Пусть $u \in L_2(Q_T)$ и $c_k \in L_2(0,T)$ — коэффициенты Фурье функции u отн. $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$. Тогда

$$\partial_t u \in L_2(Q_T) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} c_k \in W_2^1(0,T), \\ \|\partial_t u\|^2_{L_2(Q_T)} \;=\; \sum\limits_{k=1}^\infty \int\limits_0^T |c_k'(t)|^2\,dt \;<\; +\infty \end{cases}$$

9. **Пространство “пробных функций”**

Когда мы будем решать первую начально-краевую задачу для параболического уравнения, нам понадобится подпространство $W_2^{1,1}(Q_T)$, состоящие из функций, обращающихся в ноль на боковой поверхности $\partial\Omega \times (0,T)$ цилиндра Q_T:

$$W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \;:=\; W_2^{1,1}(Q_T) \cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$$

Очевидно, что

$$u \in W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} c_k \in W_2^1(0,T), \\ \|u\|^2_{W_2^{1,1}(Q_T)} \asymp \sum\limits_{k=1}^\infty \Big(\lambda_k \int\limits_0^T |c_k(t)|^2\,dt + \int\limits_0^T |c_k'(t)|^2\,dt\Big) \;<\; +\infty \end{cases}$$

и

$$u \in W_{2,0}^{1,1}(Q_T) \qquad \Longrightarrow \qquad \|u^N - u\|_{W_2^{1,1}(Q_T)} \;\to\; 0$$

10. **Ограниченные линейные функционалы, зависящие от времени**

Напомним, что $W_p^{-1}(\Omega) := (\overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega))^*$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Пусть отображение $f : (0,T) \to W_p^{-1}(\Omega)$ сопоставляет почти каждому $t \in (0,T)$ линейный ограниченный функционал $f(t) \in W_p^{-1}(\Omega)$. Норма этого функционала определяется как

$$\|f(t)\|_{W_p^{-1}(\Omega)} \;=\; \sup_{w \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega):\, \|w\|_{W^1_{p'}(\Omega)} \le 1} |\langle f(t), w\rangle|$$

Тогда

$$L_p(0,T;W_p^{-1}(\Omega)) \;=\; \Big\{ f : (0,T) \to W_p^{-1}(\Omega) :\; \|f\|_{L_p(0,T;W_p^{-1}(\Omega))} < +\infty \Big\}$$

где

$$\|f\|^p_{L_p(0,T;W_p^{-1}(\Omega))} \;:=\; \int\limits_0^T \|f(t)\|^p_{W_p^{-1}(\Omega)}\,dt$$

11. **Пространство “правых частей”**

Для $f \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$ можно определить частичную сумму ряда Фурье

$$f^N(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^N f_k(t)\varphi_k(x), \qquad f_k(t) := \langle f(t), \varphi_k\rangle$$

Очевидно, что

$$f \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{c} f_k \in L_2(0,T), \\ \|f\|^2_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \ = \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_k} \int\limits_0^T |f_k(t)|^2\, dt \ < \ +\infty \end{array} \right.$$

и

$$f \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega)) \qquad \Longrightarrow \qquad \|f^N - f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \ \to \ 0$$

12. **Пространство $W_p^{2,1}(Q_T)$**

Пусть $u \in W_p^{1,1}(Q_T)$. Можно говорить о том, что у функции u существуют вторые обобщенные производные в смысле Соболева по пространственным переменным.

$$W_p^{2,1}(Q_T) \ := \ \{\, u \in W_p^{1,1}(Q_T) : \ \nabla^2 u \in L_p(Q_T)\,\},$$
$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q_T)} := \|u\|_{W_p^{1,1}(Q_T)} + \|\nabla^2 u\|_{L_p(Q_T)}$$

Заметим, что

$$W_p^{2,1}(Q_T) \ = \ W_p^{1,1}(Q_T) \cap L_p(0,T;W_p^2(\Omega))$$

т.е. для п.в. $t \in (0,T)$ функция $x \in \Omega \mapsto u(x,t)$ принадлежит $W_p^2(\Omega)$, а $x \in \Omega \mapsto \partial_t u(x,t)$ принадлежит $L_p(\Omega)$, причем

$$t \in (0,T) \ \mapsto \ \|u(\cdot,t)\|_{W_p^2(\Omega)} \ \in \ L_p(0,T), \qquad t \in (0,T) \ \mapsto \ \|\partial_t u(\cdot,t)\|_{L_p(\Omega)} \ \in \ L_p(0,T),$$

$$\|u\|^p_{W_p^{2,1}(Q_T)} \ \asymp \ \int\limits_0^T \Big(\|u(\cdot,t)\|^p_{W_p^2(\Omega)} + \|\partial_t u(\cdot,t)\|^p_{L_p(\Omega)} \Big)\, dt$$

13. **Пространство "сильных решений"**

В пространстве $W_2^{2,1}(Q_T)$ можно выделить подпространство функций, обращающихся в ноль на боковой поверхности $\partial\Omega \times (0,T]$ цилиндра Q_T:

$$W_{2,0}^{2,1}(Q_T) \ := \ W_2^{2,1}(Q_T) \cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$$

Если $\partial\Omega \subset C^2$, то $\varphi_k \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$ и

$$u \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{c} c_k \in W_2^1(0,T), \\ \|u\|^2_{W_2^{2,1}(Q_T)} \asymp \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Big(\lambda_k^2 \int\limits_0^T |c_k(t)|^2\, dt + \int\limits_0^T |c_k'(t)|^2\, dt \Big) \ < \ +\infty \end{array} \right.$$

и

$$u \in W_{2,0}^{2,1}(Q_T) \qquad \Longrightarrow \qquad \|u^N - u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \ \to \ 0$$

1.3 Слабая производная по времени

1. **Определение слабой производной по времени**

   Определение. Пусть $p \in (1, +\infty)$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Будем говорить, что $u \in L_p(Q_T)$ имеет *слабую производную по времени* $\partial_t u \in L_p(0, T; W_p^{-1}(\Omega))$, если существует $v \in L_p(0, T; W_p^{-1}(\Omega))$, такая что

$$\int\limits_{Q_T} u(x,t)w(x)\xi'(t)\,dxdt \;=\; -\int\limits_0^T \langle v(t), w\rangle\, \xi(t)\,dt, \qquad \forall\, w \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p'}(\Omega), \quad \forall\, \xi \in C_0^\infty(0,T).$$

2. **Ряд Фурье для функций со слабой производной по времени**

   Пусть $u \in L_2(Q_T)$ и $c_k \in L_2(0,T)$ — коэффициенты Фурье функции u отн. $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$. Тогда

$$\partial_t u \in L_2(0,T; W_2^{-1}(\Omega)) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} c_k \in W_2^1(0,T), \\ \|\partial_t u\|^2_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} = \displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_0^T |c_k'(t)|^2\,dt \;<\; +\infty \end{array} \right.$$

   При этом

$$\|u^N - u\|_{L_2(Q_T)} \;\to\; 0, \qquad \|\partial_t u^N - \partial_t u\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \;\to\; 0$$

3. **Теорема о сильной непрерывности**

   Теорема. Пусть $u \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$ такова, что $\partial_t u \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$. Тогда

   1) функция $t \mapsto \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$ и

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;=\; 2\,\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle, \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T).$$

   2) $u \in C([0,T]; L_2(\Omega))$ и

$$\|u\|_{C([0,T];L_2(\Omega))} \;\leq\; c\left(\|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}\right)$$

1.4 Метод Фурье для уравнения теплопроводности

1. **Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности**

   Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $Q_T := \Omega \times (0,T)$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u \ = \ f \quad \text{в} \quad Q_T \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} \ = \ 0 \\ u|_{t=0} \ = \ a \end{cases} \tag{$*$}$$

   Здесь $u : Q_T \to \mathbb{R}$ — неизвестная, а $f : Q_T \to \mathbb{R}$ и $a : \Omega \to \mathbb{R}$ — заданные функции.

2. **Формальная схема метода Фурье**

   Пусть

$$a \in L_2(\Omega), \qquad f \in L_2(0,T; W_2^{-1}(\Omega)).$$

   Разложим a и f в ряды Фурье по собственным функциям $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ задачи Дирихле для оператора $-\Delta$ в Ω:

$$a(x) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \varphi_k(x), \qquad a_k \ := \ \int\limits_{\Omega} a(x)\varphi_k(x)\, dx$$

$$f(t) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k, \qquad f_k(t) \ := \ \langle f(t), \varphi_k \rangle$$

   Будем искать решение u в виде ряда

$$u(x,t) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\varphi_k(x)$$

   Формально подставляя этот ряд в уравнение и учитывая, что

$$-\Delta\varphi_k \ = \ \lambda_k\, \varphi_k \qquad \text{в} \quad \Omega, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

   получаем

$$\partial_t u - \Delta u - f \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{dc_k}{dt} + \lambda_k c_k - f_k \Big) \varphi_k \ = \ 0 \qquad \text{в} \quad Q_T$$

   Поскольку функции $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образуют базис в $L_2(\Omega)$, заключаем, что коэффициенты $c_k(t)$ при п.в. $t \in (0,T)$ удовлетворяют ODE

$$\frac{dc_k}{dt}(t) + \lambda_k c_k(t) \ = \ f_k(t), \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

   Из соотношения $u(x,0) = a(x)$ при $x \in \Omega$ заключаем, что

$$c_k(0) \ = \ a_k, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

   Следовательно, при всех $k \in \mathbb{N}$ функции $c_k(t)$ являются решениями задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dc_k}{dt}(t) + \lambda_k c_k(t) \ = \ f_k(t), \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T) \\ c_k(0) \ = \ a_k \end{cases}$$

3. **Явные выражения для коэффициентов Фурье решения**

Так как $f_k \in L_2(0,T)$, мы заключаем, что $c_k \in W_2^1(0,T)$ и находим

$$c_k(t) \;=\; e^{-\lambda_k t}\left(a_k \;+\; \int\limits_0^t e^{\lambda_k \tau} f_k(\tau)\, d\tau\right), \qquad \forall, k \in \mathbb{N}$$

Нас интересует вопрос, какой гладкостью обладает функция u, коэффициенты Фурье которой задаются полученными выше формулами?

4. **Сходимость ряда Фурье в $\boldsymbol{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}$**

Поскольку $a \in L_2(\Omega)$ и $f \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$, мы знаем, что

$$\|a\|^2_{L_2(\Omega)} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \;<\; +\infty, \qquad \|f\|^2_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \;\asymp\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_0^T |f_k(\tau)|^2\, d\tau \;<\; +\infty$$

С помощью неравенства $(x+y)^2 \le 2x^2 + 2y^2$ мы получаем

$$|c_k(t)|^2 \;\le\; 2e^{-2\lambda_k t}|a_k|^2 \;+\; 2e^{-2\lambda_k t}\left(\int\limits_0^T e^{\lambda_k \tau}|f_k(\tau)|\, d\tau\right)^2$$

По неравенству Гельдера мы имеем

$$\left(\int\limits_0^T e^{\lambda_k \tau}|f_k(\tau)|\, d\tau\right)^2 \;\le\; \int\limits_0^T e^{2\lambda_k \tau}\, d\tau \cdot \int\limits_0^T |f_k(\tau)|^2\, d\tau \;=\; \frac{e^{2\lambda_k t} - 1}{2\lambda_k} \int\limits_0^T |f_k(\tau)|^2\, d\tau$$

и, следовательно,

$$|c_k(t)|^2 \;\le\; 2\underbrace{e^{-2\lambda_k t}}_{\le 1}|a_k|^2 \;+\; \underbrace{(1 - e^{-2\lambda_k t})}_{\le 1}\,\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^T |f_k(\tau)|^2\, d\tau$$

из которой для любого $t \in [0,T]$ вытекает оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(t)|^2 \;\le\; 2\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^T |f_k(\tau)|^2\, d\tau$$

Поскольку

$$\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(t)|^2,$$

мы получаем

$$u \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)), \qquad \|u\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \;\le\; 2\,\|a\|^2_{L_2(\Omega)} \;+\; c\,\|f\|^2_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}$$

5. **Сходимость ряда Фурье в энергетическом пространстве**

Умножая соотношение $\frac{dc_k}{dt}(t) + \lambda_k c_k(t) = f_k(t)$ на $c_k(t)$, получаем

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}|c_k(t)|^2 \;+\; \lambda_k\,|c_k(t)|^2 \;=\; f_k(t)c_k(t)$$

Интегрируя данное тождество по $t \in (0,T)$ и используя неравенство Гельдера

$$\Big|\int\limits_0^T f_k(t)c_k(t)\,dt\Big| \;\le\; \frac{\lambda_k}{2}\int\limits_0^T |c_k(t)|^2\,dt \;+\; \frac{1}{2\lambda_k}\int\limits_0^T |f_k(t)|^2\,dt$$

получаем

$$\frac{1}{2}\,|c_k(T)|^2 \;+\; \frac{\lambda_k}{2}\int\limits_0^T |c_k(t)|^2 \;\le\; \frac{1}{2}\,|a_k|^2 \;+\; \frac{1}{2\lambda_k}\int\limits_0^T |f_k(t)|^2\,dt$$

откуда мы находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\int\limits_0^T |c_k(t)|^2 \;\le\; \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 \;+\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^T |f_k(t)|^2$$

что с учетом

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\int\limits_0^T |c_k(t)|^2$$

дает

$$u \in W_2^{1,0}(Q_T), \qquad \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} \;\le\; \|a\|^2_{L_2(\Omega)} \;+\; c\,\|f\|^2_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}$$

Следовательно,

$$a \in L_2(\Omega), \quad f \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega)) \quad \Longrightarrow \quad u \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$$

6. **Производная по времени решения**

Пользуясь соотношением $\frac{dc_k}{dt}(t) = f_k(t) - \lambda_k c_k(t)$, находим

$$\frac{1}{\lambda_k}\,|c_k'(t)|^2 \;\le\; 2\,\lambda_k\,|c_k(t)|^2 \;+\; \frac{2}{\lambda_k}\,|f_k(t)|^2$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\,|c_k'(t)|^2 \;\le\; 2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\,|c_k(t)|^2 \;+\; 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\,|f_k(t)|^2$$

что с учетом

$$\|\partial_t u\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \;\asymp\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^T |c_k'(t)|^2\,dt$$

дает

$$a \in L_2(\Omega), \quad f \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega)) \quad \Longrightarrow \quad \partial_t u \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$$

$$\|\partial_t u\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \;\le\; c\,\Big(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \;+\; \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}\Big)$$

7. **Сходимость ряда Фурье в пространстве** $W_2^{2,1}(Q_T)$

Если мы предположим, что данные задачи обладают большей гладкостью

$$a \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \qquad f \in L_2(Q_T), \qquad \partial\Omega \subset C^2$$

то сходятся ряды

$$\|\nabla a\|^2_{L_2(\Omega)} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |a_k|^2 \;<\; +\infty, \qquad \|f\|^2_{L_2(Q_T)} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^T |f_k(\tau)|^2\, d\tau \;<\; +\infty$$

Из пунктов 5 и 6 вытекают неравенства

$$\lambda_k^2 \int\limits_0^T |c_k(t)|^2\, dt \;\le\; \lambda_k\, |a_k|^2 \;+\; \int\limits_0^T |f_k(t)|^2\, dt,$$

$$\int\limits_0^T |c_k'(t)|^2\, dt \;\le\; 2\,\lambda_k^2 \int\limits_0^T |c_k(t)|^2\, dt \;+\; 2\int\limits_0^T |f_k(t)|^2\, dt,$$

просуммировав которые мы, с учетом,

$$\|\nabla^2 u\|^2_{L_2(Q_T)} \;\asymp\; \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \int\limits_0^T |c_k(t)|^2\, dt, \qquad \|\partial_t u\|^2_{L_2(Q_T)} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^T |c_k'(t)|^2\, dt$$

мы получим

$$a \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad f \in L_2(Q_T) \quad \Longrightarrow \quad u \in W_2^{2,1}(Q_T),$$

$$\|\nabla^2 u\|_{L_2(Q_T)} + \|\partial_t u\|_{L_2(Q_T)} \;\le\; c\Big(\|\nabla a\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}\Big)$$

8. **Итоги**

Пусть $a_k := (a, \varphi_k)_{L_2(\Omega)}$, $f_k(t) := \langle f(t), \varphi_k\rangle$ и

$$u(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\varphi_k(x),$$

где коэффициенты c_k определены по формулам

$$c_k(t) \;=\; e^{-\lambda_k t}\left(a_k \;+\; \int\limits_0^t e^{\lambda_k \tau} f_k(\tau)\, d\tau \right), \qquad \forall, k \in \mathbb{N}$$

Тогда

$$\boxed{a \in L_2(\Omega), \quad f \in L_2(0,T; W_2^{-1}(\Omega)) \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} u \in C([0,T]; L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)) \\ \partial_t u \in L_2(0,T; W_2^{-1}(\Omega)) \end{array}}$$

$$\boxed{a \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad f \in L_2(Q_T), \quad \partial\Omega \subset C^2 \quad \Longrightarrow \quad u \in W_2^{2,1}(Q_T)}$$

2 Начально-краевые задачи для параболич. уравнений

2.1 Постановка задачи

1. **Линейные параболические уравнения 2-го порядка**

   Мы будем рассмаривать PDE вида

   $$\partial_t u - \operatorname{div}\big(a(x,t)\nabla u\big) + b(x,t)\cdot\nabla u + c(x,t)u \;=\; f(x,t) \quad \text{в} \quad Q_T$$

   Здесь $u : Q_T \to \mathbb{R}$ — неизвестная функция, а функция $f : Q_T \to \mathbb{R}$ и коэффициенты a_{jk}, b_j, $c : Q_T \to \mathbb{R}$ считаются заданными.

2. **Уловия на коэффициенты дифференциального оператора**

   На протяжении всего нашего курса мы всегда будем считать, что следующие условия выполняются по умолчанию:

   - $a(x,t) := (a_{jk}(x,t))$ — симметричная вещественная $n \times n$-матрица, удовлетворяющая условию равномерной эллиптичности:

     $$a_{jk} = a_{kj}, \qquad a_{jk} \in L_\infty(Q_T),$$

   - $b(x,t) := (b_j(x,t))$ — вещественный n–мерный вектор, $c(x,t)$ — скалярная функция:

     $$b_j \in L_\infty(Q_T), \qquad c \in L_\infty(Q_T)$$

   - $\nu_1 > 0$ — мажоранта L_∞–норм коэффициентов:

     $$\|a\|_{L_\infty(Q_T)} \;+\; \|b\|_{L_\infty(Q_T)} \;+\; \|c\|_{L_\infty(Q_T)} \;\le\; \nu_1,$$

3. **Условие равномерной параболичности**

   Мы будем использовать следующие обозначения для дифференциальных операторов:

   $$\mathcal{B}u := b\cdot\nabla u + cu, \qquad \mathcal{L}u := -\operatorname{div}(a\nabla u) + \mathcal{B}u, \qquad \mathcal{M}u := \partial_t u + \mathcal{L}u$$

   На протяжении всего курса мы будем считать выполнненным следующее условие:

   $$\exists\, \nu_0 > 0: \quad a_{jk}(x,t)\xi_j\xi_k \ge \nu_0|\xi|^2, \qquad \text{п.в.} \quad (x,t) \in Q_T, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

   При выполнении этого условия дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ при п.в. $t \in (0,T)$ является равномерно эллиптическим в Ω. В этом случае соответствующий ему дифференциальный оператор $\mathcal{M} = \partial_t + \mathcal{L}$ наз. *равномерно параболическим* в Q_T.

4. **Первая начально-краевая задача для параболических уравнений**

   Чтобы данные задачи определяли решение u однозначно, нам необходимо дополнить уравнение краевыми и начальными условиями. В нашем курсе мы будем изучать первую начально-кравевую задачу с однородными краевыми условиями.

   $$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u \;=\; f \quad \text{в} \quad Q_T \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} \;=\; 0 \\ u|_{t=0} \;=\; u_0 \end{cases} \tag{$*$}$$

   Начальное данное $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ считается заданной функцией.

2.2 Слабые решения

1. **Билинейая форма, соответствующая младшим членам**

   Определение. Определим на пространстве $W_2^{1,0}(Q_T)$ билинейную форму

$$\mathcal{B}[u,\eta] \;:=\; \int\limits_{Q_T} \Big(b\cdot\nabla u + cu\Big)\,\eta\,dxdt, \qquad u,\eta\in W_2^{1,0}(Q_T).$$

2. **Определение слабого решения**

   Определение. Пусть $u_0\in L_2(\Omega)$ и $f\in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$. Функция $u\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ наз. *слабым* решением задачи $(*)$, если она удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{Q_T}\Big(-u\partial_t\eta + a\nabla u\cdot\nabla\eta\Big)\,dxdt \;+\; \mathcal{B}[u,\eta] \;=\; \int\limits_{\Omega} u_0(x)\eta(x,0)\,dx \;+\; \int\limits_0^T\langle f(t),\eta(t)\rangle\,dt,$$
$$\forall\,\eta\in W_2^{1,1}(Q_T):\qquad \eta|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0,\qquad \eta|_{t=T}=0.$$

   Замечание. Если u гладкая, то u является классическим решением тогда и только тогда, когда она является слабым решений.

3. **Производная по времени слабого решения**

   Теорема. Пусть $u_0\in L_2(\Omega)$, $f\in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$ и $u\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ — слабое решение задачи $(*)$. Тогда

$$\partial_t u\in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega)),\qquad u\in C([0,T];L_2(\Omega)),$$

   и при п.в. $t\in(0,T)$ выполняется тождество

$$\big\langle\partial_t u(t),w\big\rangle \;+\; \big(a(t)\nabla u(t),\nabla w\big)_{L_2(\Omega)} \;+\; \big(b(t)\cdot\nabla u(t)+c(t)u(t),w\big)_{L_2(\Omega)} \;=\; \big\langle f(t),w\big\rangle,$$
$$\forall\,w\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega).$$

   В частности, справедлива оценка

$$\|\partial_t u\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \;\le\; c\Big(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \;+\; \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}\Big)$$

   Доказательство. Для п.в. $t\in(0,T)$ определим $f_0(t)\in W_2^{-1}(\Omega)$ по формуле

$$\langle f_0(t),w\rangle \;=\; \langle f(t),w\rangle - (a(t)\nabla u(t),\nabla w)_{L_2(\Omega)} - (b(t)\cdot\nabla u(t)+c(t)u(t),w)_{L_2(\Omega)},\qquad w\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

   Поскольку по определению

$$\|f_0(t)\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \;:=\; \sup_{w\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\ \|w\|_{W_2^1(\Omega)}\le 1} |\langle f_0(t),w\rangle|,$$

   при помощи неравенства Гельдера получаем, что

$$\|f_0(t)\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \;\le\; \|f(t)\|_{W_2^{-1}(\Omega)} + c(\nu_1)\|u(t)\|_{W_2^1(\Omega)}$$

и, следовательно, $f_0 \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$ и

$$\|f_0\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \ \le\ \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} + c(\nu_1)\,\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}$$

Покажем, что u имеет слабую производную по времени и $\partial_t u = f_0$.

Пусть $w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $\xi \in C_0^\infty(0,T)$ — произвольные. Возьмем в интегральном тождестве из определения слабого решения пробную функцию η, равную

$$\eta(x,t) \ =\ w(x)\xi(t).$$

Поскольку

$$\eta \in W_2^{1,1}(Q_T), \qquad \eta|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \qquad \eta|_{t=0} = \eta|_{t=T} = 0,$$

такая пробная функция допустима и мы получаем тождество

$$\int\limits_{Q_T} u(x,t)w(x)\xi'(t)\,dxdt \ =\ -\int\limits_0^T \langle f_0(t), w\rangle\,\xi(t)\,dt, \qquad \forall\, w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad \forall\, \xi \in C_0^\infty(0,T).$$

Согласно определению слабой производной из параграфа §1.3, это тождество означает, что функция u имеет слабую производную по времени и

$$\partial_t u \ =\ f_0 \ \in\ L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$$

Следовательно,

$$\|\partial_t u\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \ \le\ c(\nu_1)\,\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \ +\ c\,\|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}$$

Теперь из теоремы о сильной непрерывности вытекает $u \in C([0,T];L_2(\Omega))$. $\square$

4. **Лемма Гронуолла**

Теорема. Пусть $a \in L_1(0,T)$ и $f \in L_1(0,T)$ — неотрицатиельные функции, и предположим, что неотрицательная функция $y \in W_1^1(0,T)$ удовлетворяет неравенству

$$y'(t) \ \le\ a(t)y(t) \ +\ f(t), \qquad \text{п.в. } t \in (0,T).$$

Тогда для всех $t \in [0,T]$ справедлива оценка

$$y(t) \ \le\ e^{\int\limits_0^t a(\tau)\ d\tau} \left(y(0) \ +\ \int\limits_0^t f(\tau)\ d\tau \right).$$

Доказательство. Заметим, что

$$t \ \mapsto\ y(t)\,e^{-\int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau} \ \in\ W_1^1(0,T),$$

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)e^{-\int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau} \right) \ =\ y'(t)\,e^{-\int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau} \ -\ a(t)\,y(t)\,e^{-\int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau} \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T)$$

Поэтому из условия вытекает оценка

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)\, e^{-\int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau}\right) \;\le\; f(t)\, e^{-\int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau} \qquad \text{п.в.} \quad t\in(0,T)$$

интегрируя которую по $t\in(0,t_0)$ мы получаем

$$y(t_0)\, e^{-\int\limits_0^{t_0} a(\tau)\,d\tau} \;\le\; y(0) \;+\; \int\limits_0^{t_0} f(t)\, \underbrace{e^{-\int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau}}_{\le 1 \ \text{т.к.}\ a\ge 0}\,dt$$

5. **Энергетическое неравенство для слабых решений**

Теорема. Пусть $u_0\in L_2(\Omega)$, $f\in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$ и $u\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ — слабое решение задачи $(*)$. Тогда

$$u\in C([0,T];L_2(\Omega))$$

и u удовлетворяет *энергетическому неравенству*

$$\|u\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \;+\; \|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \;\le\; c\Big(\|u_0\|_{L_2(\Omega)} \;+\; \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}\Big)$$

Доказательство. Пусть u — об. решение задачи $(*)$.

1. Оценка $\|u\|_{L_{2,\infty}(Q_T)}$. По теореме §2.2 п.4 для любой $w\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ выполняется соотношение

$$\langle\partial_t u(t),w\rangle \;+\int\limits_\Omega\Big(a(t)\nabla u(t)\cdot\nabla w+b(t)\cdot\nabla u(t)\,w+c(t)u(t)w\Big)\,dx \;=\; \langle f(t),w\rangle,$$

$$\text{п.в.}\;\; t\in(0,T).$$

Полагая в этом тождестве $w=u(t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, с учетом равенства

$$\frac12\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;=\; \langle\partial_t u(t),u(t)\rangle, \qquad \text{п.в.}\quad t\in(0,T),$$

получаем соотношение

$$\frac12\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;+\; \int\limits_\Omega\Big(a(t)\nabla u(t)\cdot\nabla u(t)+b(t)\cdot\nabla u(t)\,u(t)+c(t)|u(t)|^2\Big)\,dx \;=\; \langle f(t),u(t)\rangle$$

Из условия равномерной эллиптичности матрицы $a(t)$ вытекает оценка

$$\int\limits_\Omega a(t)\nabla u(t)\cdot\nabla u(t)\,dx \;\ge\; \nu_0\,\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Следовательно, мы получаем оценку

$$\frac12\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;+\; \nu_0\,\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;\le$$

$$\le\; \nu_1\Big(\|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)}\|u(t)\|_{L_2(\Omega)}+\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\Big) \;+\; \|f(t)\|_{W_2^{-1}(\Omega)}\|u(t)\|_{W_2^1(\Omega)}$$

Используя неравенство Фридрихса

$$\|u(t)\|_{W_2^1(\Omega)} \ \le \ c_\Omega \, \|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)}, \qquad u(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$

а также неравенство Юнга $ab \le \varepsilon a^2 + C_\varepsilon b^2$, получаем оценку

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ + \ \frac{\nu_0}{2}\,\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ \le \ c(\nu_1,\nu_0)\,\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ + \ c(\Omega,\nu_0)\,\|f(t)\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)}$$

Обозначим

$$y(t) := \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad g(t) := \|f(t)\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)}.$$

Тогда $y \in W_1^1(0,T)$ и $g \in L_1(0,T)$. При этом функции $y(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют оценке

$$y'(t) \ \le \ c(\nu_0,\nu_1)\,y(t) \ + \ c(\Omega,\nu_0)\,g(t), \qquad \text{п.в.} \quad t\in(0,T).$$

По лемме Гронуолла получаем оценку

$$y(t) \ \le \ e^{c_1 t}\left(y(0) + \int\limits_0^t g(\tau)d\tau\right), \qquad \forall\ t\in(0,T)$$

Расширяя пределы интегрирования в правой части и переходя к супремуму по $t\in(0,T)$ в левой части, получаем

$$\sup_{t\in(0,T)} y(t) \ \le \ e^{c_1 T}\left(y(0) + \int\limits_0^T g(\tau)d\tau\right),$$

что эквивалентно

$$\|u\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \ \le \ c\Big(\ \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \ + \ \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \ \Big)$$

2. Оценка $\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}$. Для п.в. $t\in(0,T)$ мы знаем оценку

$$\frac{\nu_0}{2}\,\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ \le \ c(\nu_1,\nu_0)\,\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \ + \ c(\Omega,\nu_0)\,\|f(t)\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)} \ - \ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Интегрируя это неравенство по $t\in(0,T)$, мы получим

$$\frac{\nu_0}{2}\int\limits_0^T \|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt \ \le \ c(\nu_1,\nu_0)\int\limits_0^T \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt \ + \ c(\Omega,\nu_0)\int\limits_0^T \|f(t)\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)}\,dt \ +$$
$$+ \ \frac{1}{2}\Big(\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} - \|u(\cdot,T)\|^2_{L_2(\Omega)}\Big),$$

откуда

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)} \ \le \ c(\nu_1,\nu_0)\,\|u\|^2_{L_2(Q_T)} \ + \ c(\Omega,\nu_0)\,\|f\|^2_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \ + \ c\,\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}$$

С учетом неравенства

$$\|u\|_{L_2(Q_T)} \ \le \ T^{1/2}\|u\|_{L_{2,\infty}(Q_T)}$$

мы получаем

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \ \le \ c(\nu_0,\nu_1,T)\,\|u\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \ + \ c\Big(\ \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \ + \ \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \ \Big)$$

откуда с учетом уже доказанного в **1** вытекает требуемая оценка. $\square$

6. **Теорема единственности для слабых решений**

Теорема. Пусть u_1 и u_2 — два слабых решения задачи $(*)$ в Q_T, соответствующие одному и тому же начальному данному $a \in L_2(\Omega)$ и правой части $f \in L_2(0,T; W_2^{-1}(\Omega))$. Тогда $u_1 \equiv u_2$ п.в. в Q_T.

Доказательство. Функция $u := u_2 - u_1$ является обобщенным решением задачи

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u + \mathcal{L}u &=& 0 \quad \text{в} \quad Q_T \\ u|_{\partial' Q_T} &=& 0 \end{array} \right.$$

Тогда из энергетической оценки вытекает, что $u \equiv 0$ в Q_T. $\square$

2.3 Существование слабых решений. Метод Галеркина

1. **Базисные функции в методе Галеркина**

   Пусть функции $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ образуют фундаментальную систему в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$:

   - $\mathrm{Lin}\{\,\varphi_1, \varphi_2, \dots\,\}$ (= конечные лин. комбинации φ_k) всюду плотны в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$
   - $\forall\, N \in \mathbb{N}$ конечная подсистема $\{\,\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_N\,\}$ линейно независима

   Для удобства будем также предполагать, что

   - $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$

2. **Галеркинские приближения**

   Определение. Пусть $u_0 \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$ и $N \in \mathbb{N}$. Функции

   $$u^N(x,t) \;:=\; \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t)\varphi_k(x), \qquad C_k^N \in W_2^1(0,T), \qquad k = 1,\dots,N,$$

   называются *галеркинскими приближениями* в задаче $(*)$, если они удовлетворяют

   $$(\partial_t u^N(t), \varphi_k) + (a(t)\nabla u^N(t), \nabla\varphi_k) + (b(t)\nabla u^N(t), \varphi_k) + (c(t)u^N(t), \varphi_k) \;=\; \langle f(t), \varphi_k\rangle,$$

   а также начальному условию

   $$u^N(x,0) \;=\; u_0^N(x) \qquad \text{п.в.} \quad x \in \Omega,$$

   Здесь $(u,v) := (u,v)_{L_2(\Omega)}$ и

   $$u_0^N(x) \;:=\; \sum_{k=1}^{N} a_k\,\varphi_k(x), \qquad a_k \;:=\; \int\limits_{\Omega} u_0(x)\varphi_k(x)\;dx, \qquad k = 1,2,\dots$$

3. **Система ODE для коэффициентов галеркинских приближений**

   Теорема. Функция

   $$u^N(x,t) \;:=\; \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t)\varphi_k(x)$$

   является галеркинским приближением в задаче $(*)$ тогда и только тогда, когда коэффициенты $\{C_k^N\}_{k=1}^{N} \subset W_2^1(0,T)$ являются решениями следующей системы ODE:

   $$\begin{cases} \dfrac{dC_k^N}{dt}(t) \;+\; \displaystyle\sum_{j=1}^{N} A_{kj}(t)C_j^N(t) \;=\; F_k(t), \\ C_k^N(0) \;=\; a_k \end{cases} \qquad k = 1,2,\dots,N.$$

   где

   $$A_{kj}(t) \;:=\; \int\limits_{\Omega} \Big(a(x,t)\nabla\varphi_k(x)\cdot\nabla\varphi_j(x) + b(x,t)\cdot\nabla\varphi_k(x)\varphi_j(x) + c(x,t)\varphi_k(x)\varphi_j(x)\Big)\,dx$$

   $$F_k(t) \;:=\; \langle f(t), \varphi_k\rangle$$

Заметим, что из условий ка коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ и правую часть f вытекает, что

$$A_{kj} \in L_\infty(0,T), \qquad F_k \in L_2(0,T).$$

В матричной форме эта система имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dC^N}{dt}(t) \; + \; A^N(t)C^N(t) \; = \; F^N(t), \qquad t \in (0,T) \\ C^N(0) \; = \; a^N \end{cases}$$

где

- $C^N(t) = (C_1^N(t), C_2^N(t), \dots, C_N^N(t))$ — N–мерный вектор
- $F^N(t) = (F_1(t), F_2(t), \dots, F_N(t))$ — N–мерный вектор
- $A^N(t) = (A_{kj}(t))$ — $N \times N$–матрица
- $a^N = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ — N–мерный вектор

4. **Метод Фурье — частный случай метода Галеркина**

Пусть $b \equiv 0$, $c = c(x)$, $c \geq 0$ и $a = a(x)$ (т.е. эллиптическая матрица a и неотрицательная скалярная функция c не зависят от t). Тогда эллиптический оператор $\mathcal{L}$ является формально самосопряженным и положительным, и по теореме Гильберта–Шмидта собственные функции задачи Дирихле для оператора $\mathcal{L}$ в Ω

$$\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$

являющиеся обобщенными решениями краевых задач

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)\nabla\varphi_k) + c(x)u \; = \; \lambda_k \varphi_k \qquad \text{в} \quad \Omega \\ \varphi_k|_{\partial\Omega} \; = \; 0 \end{cases}$$

образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, а также фундаментальную систему в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Поэтому функции $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ можно взять в качестве базисных функций в методе Галеркина. Причем при таком выборе базисных функций

- $N \times N$-матрица A^N из предыдущего пункта диагонализуется: $A^N = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$
- коэффициенты $C_k(t) := C_k^N(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{dC_k}{dt}(t) \; + \; \lambda_k C_k(t) \; = \; F_k(t), \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \\ C_k(0) \; = \; a_k \end{cases}$$

- каждый из коэффициентов $C_k(t)$ эволюционирует сам по себе, эволюция других мод Фурье $C_j(t)$ не влияет на эволюцию данной моды;
- коэффициенты $C_k(t)$ выражаются через λ_k и коэффициенты Фурье данных задачи при помощи явной формулы

$$C_k(t) \; = \; e^{-\lambda_k t} \left(a_k + \int\limits_0^t e^{\lambda_k \tau} F_k(\tau)\, d\tau \right)$$

- метод Галеркина превращается в классический метод Фурье (разложение решения по собственным функциям самосопряженного эллиптического оператора);

- тем самым все результаты о сходимости метода Галеркина, которые будут получены в данной главе, автоматически остаются справедливыми и для частичных сумм ряда Фурье решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в ограниченной области.
- В частности, в этой главе мы установим, что соответствующие частичные суммы ряда Фурье сходятся к слабому (или сильному, в зависимости от гладкости данных задачи) решению первой начально-краевой задачи. Этот результат не был установлен в предыдущей главе, там мы доказали только то, что соответствующие ряды сходятся в тех или иных функциональных пространствах. А то, что предел частичных сумм является решением соответствующей начально-краевой задачи, мы как раз установим в этом параграфе, причем в получим этот результат в общей форме метода Галеркина, а не только для его частного случая (каковым является метод Фурье).

5. **Проблема выбора базисных функций в методе Галеркина**

Если речь идет о формальном доказательстве теорем существования, то выбор в качестве $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ полной системы собственных функций некоторого самосопряженного оператора часто оказывается удобным и упрощает выкладки.

Проблема в том, что даже в случае оператора Лапласа мы очень редко (т.е. для очень ограниченного круга задач) знаем явные выражения для собственных функций. Поэтому если нам требуется не просто доказать теорему существования, но также построить алгоритм приближенного нахождения решения, то в качестве базиса необходимо взять какую-либо фундаментальную систему в Ω, для которой имеются явные выражения.

6. **Разрешимость системы ODE для коэффициентов галеркинских приближений**

Теорема. Для любого $N \in \mathbb{N}$, для любого $T>0$, и для любого набора данных

$$A_{kj} \in L_\infty(0,T), \qquad F_k \in L_2(0,T), \qquad a_k \in \mathbb{R}, \qquad k,j = 1,2,\dots,N,$$

существует единственный набор функций $C_k^N \in W_2^1(0,T)$, $k=1,2,\dots,N$, являющихся решением линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dC_k^N}{dt}(t) \ + \ \sum_{j=1}^N A_{kj}(t) C_j^N(t) \ &= \ F_k(t), \\ C_k^N(0) \ &= \ a_k \end{aligned}\right. \qquad k=1,2,\dots,N.$$

Доказательство. См. курс ODE. $\square$

7. **Интегральное тождество для галеркинских приближений**

Теорема. Для любого $m \le N$ и для любой функции $\eta^m \in W_2^{1,1}(Q_T)$ вида

$$\eta^m(x,t) \ = \ \sum_{k=1}^m \xi_k(t)\varphi_k(x), \qquad \xi_k \in W_2^1(0,T): \qquad \xi_k(T)=0.$$

функции u^N, f и u_0 удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} \Big(-u^N \partial_t \eta^m + a\nabla u^N \cdot \nabla \eta^m \Big)\, dxdt \ + \ \mathcal{B}[u^N, \eta^m] \ = \ \int\limits_\Omega u_0(x)\eta^m(x,0)\, dx \ + \ \int\limits_0^T \langle f(t), \eta^m(t)\rangle\, dt$$

Доказательство. Заметим, что $u^N \in W_2^{1,1}(Q_T)$ и поэтому для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\big(\partial_t u^N(t), \varphi_k\big) \;=\; \frac{dC_k^N}{dt}(t) \;=\; \frac{d}{dt}\big(u^N(t), \varphi_k\big)$$

Умножим каждое из соотношений

$$\frac{d}{dt}(u^N(t), \varphi_k) + (a(t)\nabla u^N(t), \nabla\varphi_k) + (b(t)\cdot\nabla u^N(t) + c(t)u^N(t), \varphi_k) \;=\; \langle f(t), \varphi_k\rangle, \qquad (\star)$$

на ξ_k, проинтегрируем результат по $t \in (0,T)$ и проинтегрируем по частям в слагаемом

$$\int\limits_0^T \xi_k(t)\,\frac{d}{dt}(u^N(t), \varphi_k)\,dt \;=\; (u^N(T), \varphi_k)\,\underbrace{\xi_k(T)}_{=0} - (u^N(0), \varphi_k)\xi_k(0) - \int\limits_0^T (u^N(t), \varphi_k)\xi_k'(t)\,dt$$

Получим

$$\int\limits_0^T \Big(- \big(u^N(t), \varphi_k\big)_{L_2(\Omega)}\,\xi_k'(t) + \big(a(t)\nabla u^N(t), \nabla\varphi_k\big)_{L_2(\Omega)}\,\xi_k(t)\Big)\,dt \;+\; \mathcal{B}[u^N, \varphi_k\xi_k] \;=$$

$$=\; (u_0, \varphi_k)_{L_2(\Omega)}\xi(0) \;+\; \int\limits_0^T \langle f(t), \varphi_k\rangle\,\xi_k(t)\,dt$$

Суммируя полученные тождества по k от 1 до m, для любого $N \geq m$ получаем тождество

$$\int\limits_{Q_T} \left(-u^N\partial_t\eta^m + a\nabla u^N\cdot\nabla\eta^m\right)\,dxdt \;+\; \mathcal{B}[u^N, \eta^m] \;=\; \int\limits_\Omega u_0(x)\eta^m(x,0)\;dx \;+\; \int\limits_0^T \langle f(t), \eta^m(t)\rangle\;dt$$

8. **Энергетическая оценка для галеркинских приближений**

Теорема. Существует постоянная $C = C(\Omega, T, n, \nu_0, \nu_1) > 0$, такая что для любого $N \in \mathbb{N}$ галеркинские приближения $u^N \in W_2^{1,1}(Q_T)$ удовлетворяют оценкам

$$\|u^N\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \;+\; \|u^N\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \;\leq\; C\,\Big(\;\|u_0\|_{L_2(\Omega)} \;+\; \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))}\Big)$$

Доказательство. Умножим каждое из соотношений

$$(\partial_t u^N(t), \varphi_k) + \big(a(t)\nabla u^N(t), \nabla\varphi_k\big) + \big(b(t)\cdot\nabla u^N(t) + c(t)u^N(t), \varphi_k\big) \;=\; \langle f(t), \varphi_k\rangle,$$

на $C_k^N(t)$ и просуммируем полученные соотношения по k от 1 до N. Получим тождество

$$(\partial_t u^N(t), u^N(t)) + \big(a(t)\nabla u^N(t), \nabla u^N(t)\big) + \big(b(t)\cdot\nabla u^N(t) + c(t)u^N(t), u^N(t)\big) \;=\; \langle f(t), u^N(t)\rangle,$$

которое выполняется при п.в. $t \in (0,T)$. Заметим, что $u^N \in W_2^{1,1}(Q_T)$ и поэтому функция $t \mapsto \|u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$ абсолютно непрерывна на $(0,T)$ и

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;=\; (\partial_t u^N(t), u^N(t)) \qquad \text{п.в.} \quad t \in (0,T).$$

Используя стандартную технику, получаем оценку

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \; + \; \frac{\nu_0}{2}\,\|\nabla u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \; \le \; c(\nu_1,\nu_0)\,\|u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \; + \; c(\Omega,\nu_0)\,\|f(t)\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)}$$

откуда по лемме Гронуолла получаем оценку

$$\|u^N\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \; \le \; c\Big(\, \|u_0^N\|_{L_2(\Omega)} \; + \; \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \, \Big)$$

Поскольку функция u_0^N является частичной суммой ряда Фурье функции u_0, справедлива оценка

$$\|u_0^N\|_{L_2(\Omega)} \; \le \; \|u_0\|_{L_2(\Omega)},$$

откуда

$$\|u^N\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \; \le \; c\Big(\, \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \; + \; \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \, \Big)$$

Выражая

$$\frac{\nu_0}{2}\,\|\nabla u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \; \le \; c(\nu_1,\nu_0)\,\|u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \; + \; c(\Omega,\nu_0)\,\|f(t)\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)} \; - \; \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

и интегрируя данное неравенство по $t \in (0,T)$, получаем

$$\|\nabla u^N\|^2_{L_2(Q_T)} \; \le \; c(\nu_1,\nu_0)\,\|u^N\|^2_{L_2(Q_T)} \; + \; c(\Omega,\nu_0)\,\|f\|^2_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \; + \; c\,\underbrace{\|u_0^N\|^2_{L_2(\Omega)}}_{\le \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}}$$

С учетом неравенства

$$\|u^N\|_{L_2(Q_T)} \; \le \; T^{1/2}\|u^N\|_{L_{2,\infty}(Q_T)}$$

мы получаем

$$\|u^N\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \; \le \; c(\nu_0,\nu_1,T)\,\|u^N\|_{L_{2,\infty}(Q_T)} \; + \; c\Big(\, \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \; + \; \|f\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \, \Big)$$

откуда с учетом уже доказанной оценки для $\|u^N\|_{L_{2,\infty}(Q_T)}$ мы получаем требуемое неравенство. $\square$

9. Предельный переход в интегральном тождестве для слабых решений

Теорема. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный в $L_2(\Omega)$ базис из собственных функций задачи Дирихле для оператора $-\Delta$ в Ω, и пусть подпоследовательность $\{u^N\} \subset W_2^{1,1}(Q_T)$ галеркинских приближений в задаче $(*)$ сходится слабо в $W_2^{1,0}(Q_T)$ к некоторой функции $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$, т.е.

$$u^N \rightharpoonup u \;\; \text{в} \;\; L_2(Q_T), \qquad \nabla u^N \rightharpoonup \nabla u \;\; \text{в} \;\; L_2(Q_T).$$

Тогда u является слабым решением задачи $(*)$. В силу единственности слабого решения задачи $(*)$ вся последовательность галеркинских приближений (а не только какая-то ее подпоследовательность) сходится к функции u целиком.

Доказательство. Для любой пробной функции

$$\eta \in W_2^{1,1}(Q_T), \qquad \eta|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \qquad \eta|_{t=T} = 0$$

обозначим через $\eta^m \in W_2^{1,1}(Q_T)$ частичную сумму ее ряда Фурье:

$$\eta^m(x,t) \ = \ \sum_{k=1}^{m} \xi_k(t)\varphi_k(x), \qquad \xi_k(t) \ := \ \int\limits_{\Omega} \eta(x,t)\varphi_k(x)\, dx$$

Поскольку $\eta|_{t=0} = 0$, заключаем, что $\xi_k(T) = 0$, $k = 1, \ldots, m$, и, следовательно, при фиксированном $m \in \mathbb{N}$ для любого $N \geq m$ справедливы тождества

$$\int\limits_{Q_T} (-u^N \partial_t \eta^m + a\nabla u^N \cdot \nabla \eta^m) \ dxdt \ + \ \mathcal{B}[u^N, \eta^m] \ = \ \int\limits_{\Omega} u_0(x)\eta^m(x,0) \ dx \ + \ \int\limits_0^T \langle f(t), \eta^m(t)\rangle \ dt$$

С учетом

$$u^N \rightharpoonup u \ \text{ в } \ L_2(Q_T), \qquad \nabla u^N \rightharpoonup \nabla u \ \text{ в } \ L_2(Q_T),$$

при фиксированном $m \in \mathbb{N}$ устремляя $N \to \infty$ получаем сходимости

$$\int\limits_{Q_T} (-u^N \partial_t \eta^m + a\nabla u^N \cdot \nabla \eta^m) \ dxdt \ \to \ \int\limits_{Q_T} (-u \partial_t \eta^m + a\nabla u \cdot \nabla \eta^m) \ dxdt,$$

$$\mathcal{B}[u^N, \eta^m] \ = \ \int\limits_{Q_T} (b \cdot \nabla u^N + cu^N)\eta^m \, dxdt \ \to \ \mathcal{B}[u, \eta^m],$$

из которых вытекает тождество

$$\int\limits_{Q_T} (-u \partial_t \eta^m + a\nabla u \cdot \nabla \eta^m) \ dxdt \ + \ \mathcal{B}[u, \eta^m] \ = \ \int\limits_{\Omega} u_0(x)\eta^m(x,0) \ dx \ + \ \int\limits_0^T \langle f(t), \eta^m(t)\rangle \ dt \quad (\star)$$

Поскольку $\eta \in W_{2,0}^{1,1}(Q_T) := L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)) \cap W_2^{1,1}(Q_T)$ и $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный в $L_2(\Omega)$ базис из собственных функций задачи Дирихле для оператора $-\Delta$ в Ω, из §1.2 мы знаем, что частичные суммы ряда Фурье функции η сходятся в пространстве $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$, т.е.

$$\eta^m \to \eta \ \text{ в } \ L_2(Q_T), \qquad \nabla \eta^m \to \nabla \eta \ \text{ в } \ L_2(Q_T), \qquad \partial_t \eta^m \to \partial_t \eta \ \text{ в } \ L_2(Q_T)$$

и, следовательно, при $m \to \infty$

$$\int\limits_{Q_T} (-u \partial_t \eta^m + a\nabla u \cdot \nabla \eta^m) \ dxdt \ \to \ \int\limits_{Q_T} (-u \partial_t \eta + a\nabla u \cdot \nabla \eta) \ dxdt,$$

$$\mathcal{B}[u, \eta^m] \ = \ \int\limits_{Q_T} (b \cdot \nabla u + cu)\eta^m \, dxdt \ \to \ \mathcal{B}[u, \eta]$$

Поскольку $\eta|_{t=0} \in L_2(\Omega)$ и ряд Фурье сходится в $L_2(\Omega)$, получаем $\eta^m|_{t=0} \to \eta|_{t=0}$ в $L_2(\Omega)$ и

$$\int\limits_{\Omega} u_0(x)\eta^m(x,0) \ dx \ \to \ \int\limits_{\Omega} u_0(x)\eta(x,0) \ dx$$

Наконец, поскольку f является непрерывным линейным функционалом на $L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ и $\eta^m \to \eta$ в $L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, мы получаем

$$\int\limits_0^T \langle f(t), \eta^m(t)\rangle \ dt \quad \to \quad \int\limits_0^T \langle f(t), \eta(t)\rangle \ dt$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ в соотношении ($\star$), получаем

$$\int\limits_{Q_T} (-u\partial_t \eta + a\nabla u \cdot \nabla \eta)\ dxdt \ + \ \mathcal{B}[u,\eta] \ = \ \int\limits_{\Omega} u_0(x)\eta(x,0)\ dx \ + \ \int\limits_0^T \langle f(t), \eta(t)\rangle\ dt$$

Следовательно, $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ является обобщенным решением задачи ($*$). $\square$

10. **Теорема существования в классе слабых решений**

    Теорема. Для любых $u_0 \in L_2(\Omega)$ и $f \in L_2(0,T; W_2^{-1}(\Omega))$ существует единственное слабое решение $u \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ задачи ($*$).

    Доказательство. Пусть u^N — галеркинские приближения в задаче ($*$) по ортонормированному в $L_2(\Omega)$ базису из собственных функций задачи Дирихле для оператора $-\Delta$ в Ω. Тогда $u^N \rightharpoonup u$ в $W_2^{1,0}(Q_T)$, где u — слабое решение задачи ($*$). Единственность u вытекает из энергетического неравенства для слабых решений. $\square$

2.4 Сильные решения

1. **Определение сильного решения**

   Определение. Пусть $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $f \in L_2(Q_T)$, $\nabla a \in L_\infty(Q_T)$. *Сильным* решением задачи

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu &=& f \quad \text{в} \quad Q_T \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} &=& 0 \\ u|_{t=0} &=& u_0 \end{array} \right. \tag{$*$}$$

   мы будем называть функцию $u \in W^{2,1}_2(Q_T)$, удовлетворяющую уравнению п.в. в Q_T, а начальному и краевому условию — в смысле следов.

   Теорема. При заявленных предположениях на гладкость a, u_0, f

   - всякое сильное решение является слабым;
   - обратно, если u — слабое решение и $u \in W^{2,1}_2(Q_T)$, то u — сильное решение.

   Доказательство. Формула интегрирования по частям и лемма Дю Буа–Реймонда. $\square$

2. **Теорема существования в классе сильных решений**

   Теорема. Пусть $\partial\Omega$ класса C^2 и a_{kj} непрерывны по Липщицу по (x,t) в Q_T, т.е.

$$\exists\ \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_l} \in L_\infty(Q_T), \qquad \exists\ \frac{\partial a_{jk}}{\partial t} \in L_\infty(Q_T), \qquad \|\nabla a\|_{L_\infty(Q_T)} + \|\partial_t a\|_{L_\infty(Q_T)} \ \le\ \nu_2.$$

   Тогда если $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $f \in L_2(Q_T)$ и $u \in W^{1,0}_2(Q_T)$ — слабое решение задачи $(*)$, то $u \in W^{2,1}_2(Q_T)$, т.е. слабое решение является сильным. При этом имеет место оценка

$$\|u\|_{W^{2,1}_2(Q_T)} \ \le\ c\Big(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W^1_2(\Omega)} \Big),$$

   в которой постоянная $c > 0$ зависит только от n, Ω, T, ν_0, ν_1 и ν_2.

3. **Вспомогательная задача**

   Теорема. Пусть $u \in W^{1,0}_2(Q_T)$ — слабое решение задачи $(*)$. Обозначим

$$f_0 \ := \ f - b\cdot\nabla u - cu, \qquad f_0 \in L_2(Q_T)$$

   Тогда $f_0 \in L_2(Q_T)$ и $u \in W^{1,0}_2(Q_T)$ является слабым решением задачи

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) &=& f_0 \qquad \text{в} \quad Q_T \\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} &=& 0 \\ u|_{t=0} &=& u_0 \end{array} \right. \tag{$**$}$$

   Кроме того, с учетом энергетического неравенства

$$\|u\|_{W^{1,0}_2(Q_T)} \ \le\ c\Big(\|f\|_{L_2(0,T;W^{-1}_2(\Omega))} + \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \Big) \ \le\ c\Big(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \Big)$$

   для f_0 справедлива оценка

$$\|f_0\|_{L_2(Q_T)} \ \le\ c\Big(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \Big)$$

4. **Галеркинские приближения для вспомогательной задачи**

Обозначим через $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированный в $L_2(\Omega)$ базис из собственных функций задачи Дирихле для оператора Лапласа в ограниченной области Ω

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_k \;=\; \lambda_k\,\varphi_k \quad \text{в} \quad \Omega \\ \varphi_k|_{\partial\Omega} \;=\; 0 \end{cases}$$

Построим галеркинские приближения для задачи $(**)$:

$$u^N(x,t) \;:=\; \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t)\varphi_k(x), \qquad u^N \in W_2^{1,1}(Q_T)$$

где $C_k^N \in W_2^1(0,T)$ и функции u^N для любого $k = 1, 2, \dots, N$ удовлетворяют тождеству

$$\begin{cases} (\partial_t u^N(t), \varphi_k) + (a(t)\nabla u^N(t), \nabla\varphi_k) \;=\; (f_0(t), \varphi_k), \qquad t \in (0,T) \\ u^N|_{t=0} \;=\; u_0^N \end{cases}$$

где

$$u_0^N(x) \;:=\; \sum_{k=1}^{N} a_k\,\varphi_k(x), \qquad a_k \;:=\; (u_0, w_k)$$

Мы уже знаем, что

$$\|u^N\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \;\le\; c\Big(\|f_0\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{L_2(\Omega)}\Big),$$

и

$$u^N \rightharpoonup v \quad \text{в} \quad L_2(Q_T),$$

где $v \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap W_2^{1,0}(Q_T)$ — некоторое слабое решение задачи $(**)$. Но тогда v и u — два слабых решения задачи $(**)$, соответствующие одному и тому же начальному данному u_0 и одной и той же правой части f_0. По теореме единственности для слабых решений получаем $v \equiv u$ п.в. в Q_T.

5. **Оценка производной по времени**

Умножим каждое из тождеств

$$(\partial_t u^N(t), \varphi_k) + (a(t)\nabla u^N(t), \nabla\varphi_k) \;=\; (f_0(t), \varphi_k)$$

на $\frac{dC_k^N}{dt}(t)$ и просуммиуем по k от 1 до N. Получим тождество

$$\big(\partial_t u^N(t), \partial_t u^N\big) + \big(a(t)\nabla u^N(t), \partial_t\nabla u^N\big) \;=\; \big(f_0(t), \partial_t u^N\big)$$

Заметим, что

$$u^N,\ \partial_t u^N \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$$

Второе слагаемое в левой части имеет вид

$$\big(a(t)\nabla u^N(t), \partial_t\nabla u^N\big) \;:=\; \int\limits_{\Omega} a(x,t)\nabla u^N(x,t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\nabla u^N(x,t)\;dx \;=\; \int\limits_{\Omega} a_{jk}u^N_{,j}\partial_t u^N_{,k}\;dx$$

Заметим, что в силу условия $a_{jk} = a_{kj}$ при п.в. $x \in \Omega$ справедливы тождества

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(a\nabla u^N \cdot \nabla u^N\big) \;=\; \partial_t\big(a_{jk}u^N_{,j}u^N_{,k}\big) \;=\; a_{jk}\partial_t u^N_{,j}u^N_{,k} \;+\; a_{jk}u^N_{,j}\partial_t u^N_{,k} \;+\; \frac{\partial a_{jk}}{\partial t}u^N_{,j}u^N_{,k} \;=$$

$$= \;(a_{kj}+a_{jk})u^N_{,j}\partial_t u^N_{,k} \;+\; \frac{\partial a_{jk}}{\partial t}u^N_{,j}u^N_{,k} \;=\; 2\,a_{jk}u^N_{,j}\partial_t u^N_{,k} \;+\; \frac{\partial a_{jk}}{\partial t}u^N_{,j}u^N_{,k} \;=$$

$$= \;2\,a\nabla u^N\cdot\partial_t\nabla u^N \;+\; \frac{\partial a}{\partial t}\nabla u^N\cdot\nabla u^N$$

Поэтому для u^N при п.в. $t \in (0,T)$ выполняется тождество

$$2\,\|\partial_t u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;+\; \frac{d}{dt}\Big(a(t)\nabla u^N(t),\nabla u^N(t)\Big) \;=\; 2\,\Big(f_0(t),\partial_t u^N(t)\Big) \;+\; \Big(\frac{\partial a}{\partial t}\nabla u^N(t),\nabla u^N(t)\Big)$$

из которого при помощи неравенства Юнга при п.в. $t \in (0,T)$ вытекает оценка

$$\|\partial_t u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;+\; \frac{d}{dt}\Big(a(t)\nabla u^N(t),\nabla u^N(t)\Big) \;\le\; c\,\|f_0(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \;+\; c\,\|\nabla u^N(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Фиксируем $t_0 \in (0,T)$ и проинтегрируем последнее неравенство по $t \in (0,t_0)$. Получим

$$\|\partial_t u^N\|^2_{L_2(Q_{t_0})} + \Big(a(t_0)\nabla u^N(t_0),\nabla u^N(t_0)\Big) \;\le\; c\,\|f_0\|^2_{L_2(Q_T)} + c\,\|\nabla u^N\|^2_{L_2(Q_T)} + \Big(a(0)\nabla u^N_0,\nabla u^N_0\Big)$$

С учетом эллиптичности матрицы a оцениваем

$$\Big(a(t_0)\nabla u^N(t_0),\nabla u^N(t_0)\Big) \;\ge\; \nu_0\,\|\nabla u^N(t_0)\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad \Big(a(0)\nabla u^N_0,\nabla u^N_0\Big) \;\le\; \nu_1\,\|\nabla u^N_0\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Переходя к супремуму по $t_0 \in (0,T)$, получаем неравенство

$$\|\partial_t u^N\|_{L_2(Q_T)} \;+\; \|\nabla u^N\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \;\le\; c\,\Big(\|f_0\|_{L_2(Q_T)} + \|\nabla u^N\|_{L_2(Q_T)} + \|\nabla u^N_0\|_{L_2(\Omega)}\Big)$$

Принимая во внимание энергетическую оценку

$$\|\nabla u^N\|_{L_2(Q_T)} \;\le\; c\,\Big(\|f_0\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{L_2(\Omega)}\Big)$$

получаем

$$\|\partial_t u^N\|_{L_2(Q_T)} \;+\; \|\nabla u^N\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \;\le\; c\,\Big(\|f_0\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u^N_0\|_{L_2(\Omega)}\Big)$$

Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ собственные числа, соответствующие собственным функциям $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ задачи Дирихле для оператора $-\Delta$ в области Ω. Тогда

$$\|\nabla u_0\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k|a_k|^2, \qquad a_k := (u_0,\varphi_k)_{L_2(\Omega)}$$

С другой стороны,

$$\|\nabla u^N_0\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^N \lambda_k|a_k|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \|\nabla u^N_0\|^2_{L_2(\Omega)} \;\le\; \|\nabla u_0\|^2_{L_2(\Omega)}$$

и мы получаем

$$\|\partial_t u^N\|_{L_2(Q_T)} \;+\; \|\nabla u^N\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \;\le\; c\,\Big(\|f_0\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W^1_2(\Omega)}\Big)$$

Следовательно, $\partial_t u^N$ ограничена в $L_2(Q_T)$, откуда с учетом $u^N \rightharpoonup u$ в $L_2(Q_T)$ вытекает, что

$$\partial_t u \in L_2(Q_T), \qquad \|\partial_t u\|_{L_2(Q_T)} \;\le\; c\,\Big(\|f_0\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W^1_2(\Omega)}\Big)$$

6. **Применение эллиптической теории**

Обозначим $f_1 := f_0 - \partial_t u$. Тогда с учетом оценок $\|f_0\|_{L_2(Q_T)}$ и $\|\partial_t u\|_{L_2(Q_T)}$ получаем

$$\|f_1\|_{L_2(Q_T)} \ \le \ c\left(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}\right)$$

Из теоремы Фубини вытекает, что для п.в. $t \in (0,T)$ имеет место включение $f_1(t) \in L_2(\Omega)$. Кроме того, для слабого решения задачи $(*)$ при п.в. $t \in (0,T)$ справедливо интегральное тождество

$$(a(t)\nabla u(t), \nabla w) \ = \ (f_1(t), w), \qquad \forall\, w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Следовательно, для п.в. $t \in (0,T)$ функция $u(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ является обобщенным решением задачи Дирихле для эллиптического уравнения

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\operatorname{div}(a(t)\nabla u(t)) & = & f_1(t) \quad \text{в} \quad \Omega \\ u(t)|_{\partial\Omega} & = & 0 \end{array}\right.$$

Поскольку Ω — класса C^2, $a(t) \in W_\infty^1(\Omega)$ и $f_1(t) \in L_2(\Omega)$, из эллиптической теории заключаем, что

$$\text{при п.в. } t \in (0,T) \qquad u(t) \in W_2^2(\Omega), \qquad \|u(t)\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \ \le \ c\,\|f_1(t)\|_{L_2(\Omega)}^2$$

откуда интегрированием этой оценки по $t \in (0,T)$ получаем

$$\|u\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \ \le \ c\,\|f_1\|_{L_2(Q_T)}$$

Следовательно, $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$. Таким образом, u является сильным решением задачи $(*)$. Кроме того,

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \ = \ \|\partial_t u\|_{L_2(Q_T)} \ + \ \|u\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \ \le$$
$$\le \ c\left(\|f_0\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}\right) \ + \ c\,\|f_1\|_{L_2(Q_T)} \ \le \ c\left(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}\right)$$

Единственность решения u имеет место в более широком классе обобщенных решений. $\square$

3 Локальная гладкость слабых решений

3.1 Локальное энергетическое тождество

1. **Локализация**

Теорема. Пусть $a \in L_\infty(Q_T)$, $f \in L_2(Q_T)$, $g \in L_2(Q_T)$ и $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое решение уравнения

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) \; = \; f - \operatorname{div} g \qquad \text{в} \qquad \mathcal{D}'(Q_T). \tag{$*$}$$

Пусть $\zeta \in C_0^\infty(Q_T)$, то есть $\operatorname{supp}\zeta \subset \Omega \times (0,T]$. Определим функции

$$v := \zeta u, \qquad f_0 := \zeta f + g\cdot\nabla\zeta + u\partial_t\zeta - a\nabla u\cdot\nabla\zeta, \qquad g_0 := \zeta g + ua\nabla\zeta$$

Тогда

$$v \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)), \qquad f_0 \in L_2(Q_T), \qquad g_0 \in L_2(Q_T)$$

и v является слабым решением начально-краевой задачи

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t v - \operatorname{div}(a\nabla v) \; &= \; f_0 - \operatorname{div} g_0 \quad \text{в} \quad Q_T \\ v|_{\partial\Omega\times(0,T)} \; &= \; 0 \\ v|_{t=0} \; &= \; 0 \end{aligned} \right. \tag{$**$}$$

Доказательство. Возьмем произвольную

$$\eta \in W_2^{1,1}(Q_T), \qquad \eta|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \qquad \eta|_{t=T} = 0. \tag{$\star$}$$

Возьмем в интегральном тождестве

$$\int\limits_{Q_T} \Big(- u\partial_t\tilde\eta + a\nabla u\cdot\nabla\tilde\eta\Big)\, dxdt \; = \; \int\limits_{Q_T} \big(f\tilde\eta + g\cdot\nabla\tilde\eta\big)\, dxdt, \qquad \tilde\eta \in C_0^\infty(\Omega\times(0,T))$$

пробную функцию

$$\tilde\eta \; = \; \zeta\eta.$$

Отметим, что такая $\tilde\eta$ обращается в ноль на всей границе ∂Q_T целиком, т.е.

$$\tilde\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, \tilde\eta_m \in C_0^\infty(\Omega\times(0,T)) : \quad \tilde\eta_m \to \tilde\eta \quad \text{в} \quad W_2^{1,1}(Q_T),$$

и поэтому такая пробная функция $\tilde\eta$ является допустимой для нашего интегального тождества. С учетом тождеств

$$u\partial_t\tilde\eta \; = \; v\partial_t\eta + u\partial_t\zeta\eta, \qquad a\nabla u\cdot\nabla\tilde\eta \; = \; a\nabla v\cdot\nabla\eta - ua\nabla\zeta\cdot\nabla\eta + a\nabla u\cdot\nabla\zeta\,\eta$$

$$f\tilde\eta + g\cdot\nabla\tilde\eta \; = \; \zeta f\eta + g\cdot\nabla\zeta\,\eta + \zeta g\cdot\nabla\eta$$

мы получаем

$$\int\limits_{Q_T} \Big(-v\partial_t\eta + a\nabla v\cdot\nabla\eta\Big)\, dxdt \; = \; \int\limits_{Q_T} \Big((\zeta f + u\partial_t\zeta - a\nabla u\cdot\nabla\zeta + g\cdot\nabla\zeta)\,\eta + (\zeta g + ua\nabla\zeta)\cdot\nabla\eta\Big)\, dxdt,$$

Следовательно, мы получаем тождество

$$\int\limits_{Q_T} \Big(- v\partial_t\eta + a\nabla v \cdot \nabla\eta\Big)\, dxdt \; = \int\limits_{Q_T} \big(f_0\eta + g_0\cdot\nabla\eta\big)\, dxdt,$$

которое выполняется для любой η, удовлетворяющей ($\star$). Это означает, что $v \in W_2^{1,0}(Q_T)$ является решением первой начально-краевой задачи ($**$). $\square$

2. Локальное энергетическое тождество

Теорема. Пусть $a \in L_\infty(Q_T)$, $f \equiv 0$, $g \in L_2(Q_T)$ и $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое решение уравнения ($*$). Тогда для любой подобласти $\Omega' \Subset \Omega$ и любого $\delta \in (0,T]$ имеет место включение

$$u \in C([\delta,T]; L_2(\Omega'))$$

и для любых $\zeta \in C_0^\infty(Q_T)$ и $t\in(0,T]$ справедливо тождество

$$\tfrac12 \int\limits_\Omega \zeta^2(x,t)|u(x,t)|^2\, dx \; + \int\limits_{Q_t} \zeta^2 a\nabla u\cdot\nabla u\, dxdt \; =$$

$$= \; \tfrac12 \int\limits_{Q_t} |u|^2\partial_t\zeta^2\, dxdt \; - \int\limits_{Q_t} u\, a\nabla u\cdot\nabla\zeta^2\, dxdt \; + \int\limits_{Q_t} g(\zeta^2\nabla u + u\nabla\zeta^2)\, dxdt$$

где $Q_t := \Omega\times(0,t]$.

Доказательство. Определим функции

$$v := \zeta u, \qquad f_0 := g\cdot\nabla\zeta + u\partial_t\zeta - a\nabla u\cdot\nabla\zeta, \qquad g_0 := \zeta g + ua\nabla\zeta$$

Поскольку $v \in W_2^{1,0}(Q_T)$ является слабым решением начально-краевой задачи ($**$), с учетом теоремы о сильной непрерывности имеют место включения

$$\partial_t v \in L_2(0,T; W_2^{-1}(\Omega)), \qquad v\in C([0,T]; L_2(\Omega)).$$

В частности, если мы возьмем $\zeta\equiv 1$ на $\Omega'\times(\delta,T]$, мы получим $v\equiv u$ на $\Omega'\times(\delta,T]$ и тогда $u\in C([\delta,T];L_2(\Omega'))$. Кроме того, для слабого решения v при п.в. $t\in(0,T)$ справедливо тождество

$$\langle \partial_t v(t), w\rangle + (a(t)\nabla v(t), \nabla w) \; = \; (f_0(t), w) + (g_0(t),\nabla w), \qquad \forall\, w\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Поскольку при п.в. $t\in(0,T)$ мы имеем $v(t)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, полагая в этом тождестве $w = v(t)$, с учетом соотношений

$$\langle\partial_t v(t), v(t)\rangle \; = \; \frac12\frac{d}{dt}\,\|v(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \; = \; \frac12\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \zeta^2(x,t)|u(x,t)|^2\, dx$$

$$(a(t)\nabla v(t),\nabla v(t)) \; = \; \big(a(\zeta\nabla u + u\nabla\zeta), \zeta\nabla u + u\nabla\zeta\big) \; = \; (\zeta^2 a\nabla u,\nabla u) + 2(\zeta a\nabla u, u\nabla\zeta) + (u^2 a\nabla\zeta,\nabla\zeta)$$

$$(f_0(t), v(t)) + (g_0(t),\nabla v(t)) \; = \; (g\cdot\nabla\zeta + u\partial_t\zeta - a\nabla u\cdot\nabla\zeta, \zeta u) \; + \; (\zeta g + ua\nabla\zeta, \zeta\nabla u + u\nabla\zeta) \; =$$

$$= \; (g, 2u\zeta\nabla\zeta + \zeta^2\nabla u) \; + \int\limits_\Omega |u|^2 \underbrace{\zeta\partial_t\zeta}_{=\frac12\partial_t\zeta^2}\, dx \; \underbrace{-\, (a\nabla u\cdot\nabla\zeta, \zeta u) \; + \; (ua\nabla\zeta,\zeta\nabla u)}_{=0} \; + \; (ua\nabla\zeta, u\nabla\zeta)$$

при п.в. $t \in (0,T)$ мы получаем равенство

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\zeta^2(x,t)|u(x,t)|^2\,dx \;+\; \int\limits_{\Omega}\zeta^2 a\nabla u\cdot\nabla u\,dx \;=$$

$$=\;\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u|^2\partial_t\zeta^2\,dx \;-\; \int\limits_{\Omega}u\,a\nabla u\cdot\nabla\zeta^2 dx \;+\; \int\limits_{\Omega}g(\zeta^2\nabla u + u\nabla\zeta^2)\,dx,$$

Интегрируя это равенство по t, мы получаем энергетическое тождество. $\square$

3. **Локальное энергетическое неравенство**

Теорема. Пусть $a \in L_\infty(Q_T)$, $f \equiv 0$, $g \in L_2(Q_T)$ и $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое решение уравнения $(*)$. Тогда для любой $\zeta \in C_0^\infty(Q_T)$, $0 \le \zeta \le 1$, и любого $t \in (0,T]$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega}\zeta^2(x,t)|u(x,t)|^2\,dx \;+\; \int\limits_{Q_t}\zeta^2|\nabla u|^2\,dxdt \;\le\; c\int\limits_{Q_t}|u|^2\left(|\nabla\zeta|^2+|\partial_t\zeta|\right)\,dxdt \;+\; c\int\limits_{Q_t}\zeta^2|g|^2\,dxdt$$

где постоянная $c>0$ зависит только от ν_0, ν_1.

Доказательство. Вытекает из тождества при помощи формулы $ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2$. $\square$

4. **Слабые решения являются сильными локально**

Теорема. Пусть $a \in L_\infty(Q_T)$, $f \in L_2(Q_T)$, $g \equiv 0$ и $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое решение уравнения $(*)$. Предположим дополнительно, что

$$\nabla a \in L_\infty(Q_T), \quad \partial_t a \in L_\infty(Q_T), \qquad \|\nabla a\|_{L_\infty(Q_T)} + \|\partial_t a\|_{L_\infty(Q_T)} \;\le\; \nu_2$$

Тогда для любого $\Omega' \Subset \Omega$ и $\delta \in (0,T)$

$$u \in W_2^{2,1}(Q'_{\delta,T}), \qquad Q'_{\delta,T} := \Omega' \times (\delta, T],$$

и справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q'_{\delta,T})} \;\le\; c\left(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}\right)$$

в которой постоянная $c>0$ зависит только от n, ν_0, ν_1, ν_2, Ω, Ω', T и δ.

Доказательство. Пусть $\zeta \in C_0^\infty(Q_T)$ такова, что

$$\operatorname{supp}\zeta \subset \Omega\times(0,T], \qquad \zeta \equiv 1 \quad \text{на} \quad Q'_{\delta,T}, \qquad 0 \le \zeta \le 1 \quad \text{в} \quad Q_T.$$

Определим функции

$$v := \zeta u, \qquad f_0 := \zeta f + u\partial_t\zeta - a\nabla u\cdot\nabla\zeta, \qquad g_0 = ua\nabla\zeta$$

и заметим, что справедлива оценка

$$\|f_0\|_{L_2(Q_T)} + \|\nabla g_0\|_{L_2(Q_T)} \;\le\; \|f\|_{L_2(Q_T)} \;+\; c\,\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)}.$$

в которой постоянная $c>0$ зависит только от ν_1, ν_2 и ζ. Тогда $v \in W_2^{1,0}(Q_T)$ является слабым решением начально-краевой задачи $(**)$.

Поскольку v обращается в ноль в окрестности параболической границы $\partial' Q_T$, не ограничивая общность мы можем считать, что $\partial\Omega$ является C^2-гладкой (иначе мы с самого начала можем заменить Ω на гладкую область Ω'', такую что $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ и взять $\zeta \in C_0^\infty(\Omega'' \times (0,T]))$. Поскольку при условиях

$$\partial\Omega \subset C^2, \quad \nabla a \in L_\infty(Q_T), \quad \partial_t a \in L_\infty(Q_T), \quad f_0 - \operatorname{div} g_0 \in L_2(Q_T)$$

слабое решение $v \in W_2^{1,0}(Q_T)$ задачи $(**)$ является сильным, мы получаем

$$v \in W_2^{2,1}(Q_T), \qquad \|v\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \ \le \ c\left(\|f_0\|_{L_2(Q_T)} + \|\nabla g_0\|_{L_2(Q_T)}\right)$$

Поскольку $v \equiv u$ в $Q'_{\delta,T}$, мы получаем требуемое утверждение. $\square$

3.2 Уравнения с гладкими коэффициентами

1. **Постановка задачи**

Пусть $Q_R = B_R \times (-R^2, 0]$. В этом параграфе мы будем рассматривать параболическое уравнение с гладкими коэффициентами вида

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a(x,t)\nabla u) \;=\; f \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q_R) \tag{$*$}$$

где

$$a \in C^\infty(Q_R), \qquad f \in C^\infty(Q_R)$$

Методы, развитые в этом параграфе, без труда могут быть распространены на уравенения с младшими коэффициентами

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a(x,t)\nabla u) + b(x,t)\cdot\nabla u + c(x,t)u \;=\; f \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q_R)$$

при условии

$$a \in C^\infty(Q_R), \quad b \in C^\infty(Q_R), \quad c \in C^\infty(Q_R), \quad f \in C^\infty(Q_R)$$

Однако ради сокращения выкладок мы ограничимся изучением уравнения вида ($*$).

2. **Производная по координате слабого решения является слабым решением**

Теорема. Предположим, что

$$a \in C^1(\bar Q_R), \qquad f \in L_2(Q_R).$$

Пусть $u \in W^{1,0}_2(Q_R)$ удовлетворяет уравнению ($*$) в $\mathcal{D}'(Q_R)$. Тогда $\nabla u \in W^{1,0}_{2,loc}(Q_R)$ и для любого $k = 1,\dots,n$ функция $v := u_{,k} \equiv \frac{\partial u}{\partial x_k}$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t v - \operatorname{div}(a\nabla v) \;=\; g \qquad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q_R),$$

где

$$g \;:=\; f_{,k} \;+\; \operatorname{div}\Big(\frac{\partial a}{\partial x_k}\,\nabla u\Big), \qquad g \in L_2(-R^2, 0; W^{-1}_2(B_R))$$

Доказательство. Обозначим $v = u_{,k}$. Поскольку $a \in C^1(\bar Q_R)$ и $f \in L_2(Q_T)$, слабое решение u является сильным, и поэтому

$$u \in W^{1,0}_2(Q_R) \quad\Longrightarrow\quad u \in W^{2,1}_2(Q_r) \quad\Longrightarrow\quad u_{,k} \in W^{1,0}_2(Q_r) \quad\Longrightarrow\quad v \in W^{1,0}_2(Q_r)$$

Возьмем в интегральном тождестве

$$\int\limits_{Q_R} \Big(-u\partial_t\tilde\eta + a\nabla u\cdot\nabla\tilde\eta\Big)\,dxdt \;=\; \int\limits_{Q_R} f\tilde\eta\,dxdt, \qquad \tilde\eta \in C^\infty_0(B_R\times(-R^2,0))$$

пробную функцию

$$\tilde\eta \;=\; \eta_{,k}, \qquad \eta \in C^\infty_0(B_R\times(-R^2,0)).$$

Так как $u \in W^{2,1}_{2,loc}(Q_R)$ и $a \in C^1(\bar Q_R)$, мы можем проинтегрировать по частям

$$\int\limits_{Q_R} \Big(-u\partial_t\eta_{,k} + a\nabla u\cdot\nabla\eta_{,k}\Big)\,dxdt \;=\; -\int\limits_{Q_R} \Big(-u_{,k}\partial_t\eta + a\nabla u_{,k}\cdot\nabla\eta + \frac{\partial a}{\partial x_k}\,\nabla u\cdot\nabla\eta\Big)\,dxdt,$$

С другой стороны, мы имеем

$$\int\limits_{-R^2}^{0} \langle g(t), \eta(t)\rangle\, dt \;=\; -\int\limits_{Q_R} \Big(f\eta_{,k} + \frac{\partial a}{\partial x_k}\,\nabla u\cdot\nabla\eta\Big)\, dxdt$$

В итоге мы получаем

$$\int\limits_{Q_R} \Big(-v\partial_t\eta + a\nabla v\cdot\nabla\eta\Big)\, dxdt \;=\; \int\limits_{-R^2}^{0} \langle g(t), \eta(t)\rangle\, dt, \qquad \eta\in C_0^\infty(B_R\times(-R^2,0))$$

Это тождество означает, что $v\in W^{1,0}_{2,loc}(Q_R)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t v - \operatorname{div}(a\nabla v) \;=\; g \qquad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q_R).$$

3. **Гладкость решений по пространственным переменным**

Теорема. Пусть $a\in C^\infty(Q_R)$ и существует $m\in\mathbb{Z}_+$, такое что

$$f\in L_2(-R^2,0;W_2^m(B_R)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nabla^k f\in L_2(Q_R), \qquad \forall\, k=0,1,2,\dots,m$$

$$\|f\|_{L_2(-R^2,0;W_2^m(B_R))} \;:=\; \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha f\|_{L_2(Q_R)} \;<\; +\infty$$

Пусть $u\in W_2^{1,0}(Q_R)$ удовлетворяет уравнению $(*)$ в $\mathcal{D}'(Q_R)$. Тогда

$$\forall\, |\alpha|\le m \qquad D^\alpha u\in W^{2,1}_{2,loc}(Q_R), \qquad D^\alpha u \;:=\; \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

и для любых $0<\rho<R$ справедлива оценка

$$\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_{W_2^{2,1}(Q_\rho)} \;\le\; c_{m,a}\Big(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_R)} + \|f\|_{L_2(-R^2,0;W_2^m(B_R))}\Big)$$

в которой постоянная $c_{m,a}>0$ зависит только от n, m, ρ, R и a. В частности,

$$u\in W_2^{1,0}(Q_R), \quad f\in C^\infty(Q_R) \qquad \Longrightarrow \qquad u\in L_{2,loc}(-R^2,0;C^\infty_{loc}(B_R))$$

Доказательство. Индукция по m.

База при $m=0$ вытекает из того, что всякое слабое решение является сильным.

Индукционное предположение при m. Пусть мы знаем, что если $u\in W_2^{1,0}(Q_R)$ — какое-либо слабое решение уравнения $(*)$ в $\mathcal{D}'(Q_R)$ и $f\in L_2(-R^2,0;W_2^m(B_R))$, то $D^\alpha u\in W^{2,1}_{2,loc}(Q_R)$ для любого $|\alpha|\le m$ и при $r<R$

$$\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_{W_2^{2,1}(Q_r)} \;\le\; c_{m,a}\Big(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_R)} + \|f\|_{L_2(-r^2,0;W_2^m(B_R))}\Big)$$

Переход $m\to m+1$. Пусть $u\in W_2^{1,0}(Q_R)$ — слабое решение $(*)$ и

$$f\in L_2(-R^2,0;W_2^{m+1}(B_R)).$$

Обозначим $v = u_{,k}$ и $r = \frac{1}{2}(\rho+R)$. Тогда $v \in W_2^{1,0}(Q_r)$ является слабым решением уравнения

$$\partial_t v - \operatorname{div}(a\nabla v) \ = \ g \qquad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q_r).$$

где

$$g \ := \ f_{,k} \ + \ \operatorname{div}\Big(\frac{\partial a}{\partial x_k}\,\nabla u\Big)$$

Для правой части g мы можем написать оценку

$$\|g\|_{L_2\left(-r^2,0;W_2^m(B_r)\right)} \ \le \ c\,\left(\|f\|_{L_2\left(-r^2,0;W_2^{m+1}(B_r)\right)} + \sum_{|\alpha|\le m}\Big\|D^\alpha \operatorname{div}\Big(\frac{\partial a}{\partial x_k}\,\nabla u\Big)\Big\|_{L_2(Q_r)}\right)$$

В силу индукционного предположения мы имеем

$$\sum_{|\alpha|\le m}\Big\|D^\alpha \operatorname{div}\Big(\frac{\partial a}{\partial x_k}\,\nabla u\Big)\Big\|_{L_2(Q_r)} \ \le \ c_a \sum_{|\alpha|\le m}\|D^\alpha u\|_{W_2^{2,1}(Q_r)} \ \le$$
$$\le \ c_a\, c_{m,a}\,\Big(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_R)} + \|f\|_{L_2\left(-R^2,0;W_2^m(B_R)\right)}\Big),$$

откуда

$$\|g\|_{L_2\left(-r^2,0;W_2^m(B_r)\right)} \ \le \ c_{m,a}\,\Big(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_R)} + \|f\|_{L_2\left(-R^2,0;W_2^{m+1}(B_R)\right)}\Big) \qquad (\star)$$

Таким образом

$$g \in L_2(-r^2,0;W_2^m(B_r))$$

По индукционному предположению мы получаем включение

$$\forall\,|\alpha|\le m \qquad D^\alpha v \in W_{2,loc}^{2,1}(Q_r),$$

а также оценку

$$\sum_{|\alpha|\le m}\|D^\alpha v\|_{W_2^{2,1}(Q_\rho)} \ \le \ c_{m,a}\,\Big(\|v\|_{W_2^{1,0}(Q_r)} + \|g\|_{L_2(-r^2,0;W_2^m(B_r))}\Big)$$

С учетом $v = u_{,k}$ и оценки $(\star)$ последние два утверждения означают, что

$$\forall\,|\alpha|\le m+1 \qquad D^\alpha u \in W_{2,loc}^{2,1}(Q_r),$$

а также оценку

$$\sum_{|\alpha|\le m+1}\|D^\alpha u\|_{W_2^{2,1}(Q_\rho)} \ \le \ c_m\,\Big(\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_r)} + \|f\|_{L_2(-R^2,0;W_2^{m+1}(B_R))}\Big)$$

С учетом оценки

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_r)} \ \le \ c\,\Big(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_R)} + \|f\|_{L_2(Q_R)}\Big)$$

получаем требуемое утверждение. $\square$

4. **Производная по времени слабого решения является слабым решением**

Теорема. Предположим, что

$$a \in C^{2,1}(\bar{Q}_R), \qquad f \in W_2^{1,1}(Q_R).$$

Пусть $u \in W_2^{1,0}(Q_R)$ удовлетворяет уравнению $(*)$ в $\mathcal{D}'(Q_R)$. Тогда $\partial_t u \in W_{2,loc}^{1,0}(Q_R)$ и функция $v := \partial_t u$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t v - \operatorname{div}(a\nabla v) \; = \; g \qquad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q_R),$$

где

$$g \; := \; \partial_t f \; + \; \operatorname{div}\Big(\frac{\partial a}{\partial t}\,\nabla u\Big), \qquad g \in L_2(-R^2, 0; W_2^{-1}(B_R)).$$

Доказательство. Обозначим $v = \partial_t u$. Поскольку $a \in C^1(\bar{Q}_R)$ и $f \in L_2(Q_R)$, мы знаем, что слабое решение u является сильным, и поэтому

$$u \in W_2^{1,0}(Q_R) \quad \Longrightarrow \quad u \in W_{2,loc}^{2,1}(Q_R) \quad \Longrightarrow \quad \partial_t u \in L_{2,loc}(Q_R) \quad \Longrightarrow \quad v \in L_{2,loc}(Q_R)$$

и для любого $k = 1, \dots, n$ функция $u_{,k}$ также является слабым решением уравнения

$$\partial_t u_{,k} - \operatorname{div}(a\nabla u_{,k}) \; = \; g_k \qquad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q_r).$$

где

$$g_k \; := \; f_{,k} \; + \; \operatorname{div}\Big(\frac{\partial a}{\partial x_k}\,\nabla u\Big), \qquad g_k \in L_{2,loc}(Q_R).$$

Но поскольку в этом уравнении $a \in C^1(Q_R)$ и $g_k \in L_{2,loc}(Q_R)$, мы знаем, что слабое решение $u_{,k}$ также является сильным, и поэтому

$$\nabla u \in W_{2,loc}^{1,0}(Q_R) \quad \Longrightarrow \quad \nabla u \in W_{2,loc}^{2,1}(Q_R) \quad \Longrightarrow \quad \partial_t \nabla u \in L_{2,loc}(Q_R) \quad \Longrightarrow \quad \nabla v \in L_{2,loc}(Q_R)$$

откуда мы заключаем, что

$$v \in W_{2,loc}^{1,0}(Q_R).$$

Возьмем в интегральном тождестве

$$\int\limits_{Q_R} \Big(- u\partial_t \tilde{\eta} + a\nabla u \cdot \nabla \tilde{\eta}\Big)\, dxdt \; = \; \int\limits_{Q_R} f\tilde{\eta}\, dxdt, \qquad \tilde{\eta} \in C_0^\infty(B_R \times (-R^2, 0))$$

пробную функцию

$$\tilde{\eta} \; = \; \partial_t \eta, \qquad \eta \in C_0^\infty(B_R \times (-R^2, 0)).$$

Так как u, $\nabla u \in W_{2,loc}^{2,1}(Q_R)$ и f, $\partial_t f \in L_2(Q_R)$, мы можем проинтегрировать по частям

$$\int\limits_{Q_R} \Big(- u\partial_t^2 \eta + a\nabla u \cdot \nabla(\partial_t \eta)\Big)\, dxdt \; = \; - \int\limits_{Q_R} \Big(- \partial_t u \partial_t \eta + a\nabla(\partial_t u) \cdot \nabla \eta + \frac{\partial a}{\partial t}\,\nabla u \cdot \nabla \eta\Big)\, dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_R} f\partial_t \eta\, dxdt \; = \; - \int\limits_{Q_R} \partial_t f \eta\, dxdt,$$

Так как $\frac{\partial a}{\partial t}\,\nabla u \in L_{2,loc}(Q_R)$, мы имеем $g \in L_2(-R^2, 0; W_2^{-1}(B_R))$ и

$$\int\limits_{-R^2}^{0} \langle g(t), \eta(t)\rangle\, dt \; = \; \int\limits_{Q_R} \Big(\partial_t f\, \eta - \frac{\partial a}{\partial t}\,\nabla u \cdot \nabla \eta\Big)\, dxdt$$

В итоге мы получаем

$$\int\limits_{Q_R} \Big(- v\partial_t\eta + a\nabla v\cdot\nabla\eta\Big)\,dxdt \;=\; \int\limits_{-R^2}^{0} \langle g(t),\eta(t)\rangle\,dt, \qquad \eta\in C_0^\infty(B_R\times(-R^2,0))$$

Последнее тождество означает, что $v\in W^{1,0}_{2,loc}(Q_R)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t v - \operatorname{div}(a\nabla v) \;=\; g \qquad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q_R).$$

где

$$g \;:=\; \partial_t f \;+\; \operatorname{div}\Big(\frac{\partial a}{\partial t}\,\nabla u\Big), \qquad g\in L_2(-R^2,0;W_2^{-1}(B_R)).$$

5. **Оценка производных по времени**

Теорема. Пусть $a\in C^\infty(Q_R)$ и существуют m, $l\in\mathbb{N}$, такие что

$$f,\ \partial_t f,\ \partial_t^2 f,\ \ldots,\ \partial_t^l f \;\in\; L_2(-R^2,0;W_2^m(B_R))$$

Пусть $u\in W_2^{1,0}(Q_R)$ удовлетворяет уравнению $(*)$ в $\mathcal{D}'(Q_R)$. Тогда

$$\forall\, k\le l, \qquad \forall\,|\alpha|\le m \qquad \partial_t^k D^\alpha u\in W^{2,1}_{2,loc}(Q_R),$$

и для любых $0<\rho<R$ справедлива оценка

$$\sum_{k=0}^{l}\sum_{|\alpha|\le m}\|\partial_t^k D^\alpha u\|_{W_2^{2,1}(Q_\rho)} \;\le\; c_{m,l,a}\Big(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_R)}+\sum_{k=0}^{l}\|\partial_t^k f\|_{L_2(-R^2,0;W_2^m(B_R))}\Big)$$

в которой постоянная $c_{m,l,a}>0$ зависит только от n, m, l, ρ, R и a.

Доказательство. Индукция по l.

База $l=1$. Пусть $m\in\mathbb{N}$ произвольное и $r=\frac{1}{2}(\rho+R)$. Поскольку $a\in C^\infty(\bar Q_R)$ и $f\in L_2(-R^2,0;W_2^m(B_R))$, из пункта **3** мы получаем оценку

$$\sum_{|\alpha|\le m}\|D^\alpha u\|_{W_2^{2,1}(Q_r)} \;\le\; c_{m,a}\Big(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_R)}+\|f\|_{L_2(-R^2,0;W_2^m(B_R))}\Big) \tag{$\star$}$$

Поскольку $a\in C^{2,1}(\bar Q_R)$ и $f\in W_2^{1,1}(Q_R)$, из пункта **4** мы заключаем, что $v\in W^{1,0}_{2,loc}(Q_R)$ является слабым решением уравнения

$$\partial_t v - \operatorname{div}(a\nabla v) \;=\; g \qquad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q_R),$$

где

$$g \;:=\; \partial_t f \;+\; \operatorname{div}\Big(\frac{\partial a}{\partial t}\,\nabla u\Big).$$

Для функции g мы имеем оценку

$$\|g\|_{L_2(-R^2,0;W_2^m(B_R))} \;\le\; \|\partial_t f\|_{L_2(-R^2,0;W_2^m(B_R))} \;+\; c_a\sum_{|\alpha|\le m}\|D^\alpha u\|_{W_2^{2,1}(Q_r)}$$

что с учетом оценки ($\star$) дает

$$\|g\|_{L_2(-R^2,0;W_2^m(B_R))} \ \le \ c_{m,a}\left(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_R)} + \|f\|_{L_2(-R^2,0;W_2^m(B_R))} + \|\partial_t f\|_{L_2(-R^2,0;W_2^m(B_R))}\right)$$

Таким образом, $g \in L_2(-R^2,0;W_2^m(B_R))$ и поэтому из пункта **3** мы получаем оценку

$$\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha v\|_{W_2^{2,1}(Q_\rho)} \ \le \ c_{m,a}\left(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_r)} + \|g\|_{L_2(-R^2,0;W_2^m(B_r))}\right)$$

Складывая эту оценку с ($\star$) мы получаем

$$\sum_{k=0}^{1}\sum_{|\alpha|\le m} \|\partial_t^k D^\alpha u\|_{W_2^{2,1}(Q_\rho)} \ \le \ c_{m,a}\left(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_R)} + \sum_{k=0}^{1}\|\partial_t^k f\|_{L_2(-R^2,0;W_2^m(B_R))}\right)$$

Индукционное предположение при l. Пусть мы знаем, что если $u \in W_2^{1,0}(Q_R)$ — какое-либо слабое решение уравнения ($*$) в $\mathcal{D}'(Q_R)$ и

$$f,\ \partial_t f,\ \partial_t^2 f,\ \dots,\ \partial_t^l f \ \in \ L_2(-R^2,0;W_2^m(B_R)), \qquad l,m\in\mathbb{N},$$

то $\partial_t^k D^\alpha u \in W_{2,loc}^{2,1}(Q_R)$ для любых $k\le l$, $|\alpha|\le m$, причем при $r<R$ справедлива оценка

$$\sum_{k=0}^{l}\sum_{|\alpha|\le m} \|\partial_t^k D^\alpha u\|_{W_2^{2,1}(Q_r)} \ \le \ c_{m,l,a}\left(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_R)} + \sum_{k=0}^{l}\|\partial_t^k f\|_{L_2\left(-r^2,0;W_2^m(B_R)\right)}\right) \qquad (\star\star)$$

Переход $l\to l+1$. Пусть $u\in W_2^{1,0}(Q_R)$ — слабое решение ($*$) и предположим, что

$$f,\ \partial_t f,\ \partial_t^2 f,\ \dots,\ \partial_t^{l+1} f \ \in \ L_2(-R^2,0;W_2^m(B_R)), \qquad l,m\in\mathbb{N},$$

Тогда по индукционному предположению мы знаем оценку ($\star\star$). Обозначим $v=\partial_t u$ и $r=\frac{1}{2}(\rho+R)$. Поскольку $a\in C^{2,1}(\bar Q_R)$ и $f\in W_2^{1,1}(Q_R)$ из пункта **4** мы заключаем, что $v\in W_2^{1,0}(Q_r)$ является слабым решением уравнения

$$\partial_t v - \operatorname{div}(a\nabla v) \ = \ g \qquad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q_r),$$

где

$$g \ := \ \partial_t f \ + \ \operatorname{div}\left(\frac{\partial a}{\partial t}\,\nabla u\right)$$

Для правой части g мы можем написать оценку

$$\sum_{k=0}^{l}\|\partial_t^k g\|_{L_2\left(-r^2,0;W_2^m(B_r)\right)} \ \le \ \sum_{k=0}^{l}\|\partial_t^{k+1} f\|_{L_2\left(-r^2,0;W_2^m(B_r)\right)} + c_{m,l,a}\sum_{k=0}^{l}\sum_{|\alpha|\le m}\|\partial_t^k D^\alpha u\|_{W_2^{2,1}(Q_r)}$$

В силу ($\star\star$) мы имеем

$$\sum_{k=0}^{l}\sum_{|\alpha|\le m} \|\partial_t^k D^\alpha u\|_{W_2^{2,1}(Q_r)} \ \le \ c_{m,l,a}\left(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_R)} + \sum_{k=0}^{l}\|\partial_t^k f\|_{L_2\left(-r^2,0;W_2^m(B_R)\right)}\right),$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{l} \|\partial_t^k g\|_{L_2\left(-r^2,0;W_2^m(B_r)\right)} \;\le\; c_{m,l,a}\left(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_R)} + \sum_{k=0}^{l+1} \|\partial_t^k f\|_{L_2\left(-r^2,0;W_2^m(B_R)\right)}\right)$$

Таким образом

$$g,\ \partial_t g,\ \partial_t^2 g,\ \ldots,\ \partial_t^l g \;\in\; L_2(-R^2,0;W_2^m(B_r)),$$

и по индукционному предположению мы получаем включения

$$\partial_t^k D^\alpha v \in W^{2,1}_{2,loc}(Q_r), \qquad \forall\, k \le l, \qquad \forall\, |\alpha| \le m,$$

причем при $\rho < r$ справедлива оценка

$$\sum_{k=0}^{l} \sum_{|\alpha|\le m} \|\partial_t^k D^\alpha v\|_{W_2^{2,1}(Q_r)} \;\le\; c_{m,l,a}\left(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_R)} + \sum_{k=0}^{l} \|\partial_t^k g\|_{L_2\left(-r^2,0;W_2^m(B_R)\right)}\right)$$

то есть

$$\sum_{k=1}^{l+1} \sum_{|\alpha|\le m} \|\partial_t^k D^\alpha u\|_{W_2^{2,1}(Q_r)} \;\le\; c_{m,l,a}\left(\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_R)} + \sum_{k=0}^{l+1} \|\partial_t^k f\|_{L_2\left(-r^2,0;W_2^m(B_R)\right)}\right)$$

Складывая эту оценку с оценкой ($\star\star$), мы получаем требуемое утверждение.

6. **Гипоэллиптичность параболич. уравнений с постоянными коэффициентами**

Теорема. Пусть $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ удовлетворяет уравнению ($*$) в $\mathcal{D}'(Q_T)$ и пусть

$$a \in C^\infty(Q_T), \qquad f \in C^\infty(Q_T).$$

Тогда функция u является гладкой на множестве $Q_T := \Omega \times (0,T]$

$$u \in C^\infty(Q_T)$$

3.3 Неравенство Каччиопполи

1. **Постановка задачи**

Пусть $Q_T = \Omega\times(0,T]$. В этом параграфе мы будем рассматривать параболическое уравнение с негладкими коэффициентами вида

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a(x,t)\nabla u) \;=\; 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q_T) \tag{$*$}$$

где

$$a \in L_\infty(Q_T)$$

Напомним, что функция $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ называется слабым решением уравнения $(*)$, если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} \Big(- u\partial_t\eta + a(x,t)\nabla u\cdot\nabla\eta\Big)\, dxdt \;=\; 0, \qquad \forall\, \eta \in C_0^\infty(\Omega\times(0,T)).$$

2. **Неравенство Каччиопполи**

Теорема. Пусть $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое решение уравнения $(*)$ и $z_0 = (x_0,t_0) \in Q_T$ такова, что $Q_{2R}(z_0) := B_{2R}(x_0)\times(t_0-4R^2,t_0] \subset Q_T$. Тогда для любого $b\in\mathbb{R}$ выполняется оценка

$$\sup\limits_{t\in(t_0-R^2,t_0)} \int\limits_{B_R(x_0)} |u-b|^2\, dx \;+\; \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\, dxdt \;\le\; \frac{c}{R^2} \int\limits_{Q_{2R}(z_0)\setminus Q_R(z_0)} |u-b|^2\, dxdt$$

в которой постоянная $c>0$ зависит только от n, ν_0, ν_1.

Доказательство. Обозначим $\bar u := u - b$. Тогда $\bar u \in W_2^{1,0}(Q_{2R}(z_0))$ также является слабым решением уравнения $(*)$ в $Q_{2R}(z_0)$. Следовательно, $\bar u$ удовлетворяет локальному энергетическому неравенству (см. §3.1): для любых $\zeta \in C_0^\infty(Q_{2R}(z_0))$, $0\le\zeta\le1$ и $t\in(t_0-4R^2,t_0)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{B_{2R}(x_0)} \zeta^2(x,t)|\bar u(x,t)|^2\, dx \;+\; \int\limits_{Q_{2R}(z_0)} \zeta^2|\nabla\bar u|^2\, dxd\tau \;\le\; c \int\limits_{Q_{2R}(z_0)} |\bar u|^2\left(|\nabla\zeta|^2 + |\partial_t\zeta|\right)\, dxd\tau$$

где постоянная $c>0$ зависит только от ν_0, ν_1. Выберем какую-либо функцию $\zeta_* \in C_0^\infty(Q_2)$, такую что $\zeta_*\equiv 1$ на Q, $0\le\zeta_*\le 1$, и определим

$$\zeta_R(x,t) \;:=\; \zeta_*\left(\frac{x-x_0}{R}, \frac{t-t_0}{R^2}\right), \qquad (x,t)\in Q_{2R}(z_0)$$

Тогда $\zeta_R \in C_0^\infty(Q_{2R}(z_0))$, $0\le\zeta_R\le1$, и

$$\zeta_R \;\equiv\; 1 \;\text{ на }\; Q_R(z_0), \qquad |\nabla\zeta_R(z)| \;\le\; \frac{c}{R}, \qquad |\partial_t\zeta_R(z)| \;\le\; \frac{c}{R^2}, \qquad \forall\, z\in Q_{2R}(z_0)$$

Применяя локальное энергетическое неравенство к функции $\zeta=\zeta_R$, учитывая $\nabla\bar u = \nabla u$ и $\zeta_R\equiv 1$ на $Q_R(z_0)$, $\nabla\zeta_R = 0$ на $Q_R(z_0)$ и $\partial_t\zeta_R = 0$ на $Q_R(z_0)$, для любого $t\in(t_0-R^2,t_0)$ мы получаем требуемую оценку

$$\int\limits_{B_R(x_0)} |\bar u(x,t)|^2\, dx \;+\; \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\, dxd\tau \;\le\; \frac{c}{R^2} \int\limits_{Q_{2R}(z_0)\setminus Q_R(z_0)} |\bar u|^2\, dxd\tau$$

3. **Неравенство Пуанкаре со средними по пространственным переменным**

Напомним наши обозначения для средних значений функции $u = u(x,t)$:

$$(u)_{Q_T} \;:=\; \frac{1}{|Q_T|}\int\limits_{Q_T} u(x,t)\,dxdt, \qquad [u(t)]_\Omega \;:=\; \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} u(x,t)\,dx$$

$$(u)_{z_0,R} \;:=\; (u)_{Q_R(z_0)}, \qquad [u(t)]_{x_0,R} \;:=\; [u(t)]_{B_R(x_0)}$$

Теорема. Для любой функции $u \in W_2^{1,0}(Q_R(z_0))$ справедливо неравенство Пуанкаре со средними по пространственным переменным:

$$\int\limits_{Q_R(z_0)} |u - [u]_{x_0,R}|^2\,dxdt \;\le\; c(n)\,R^2 \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\,dxdt$$

Замечание. Однако заменить в этом неравенстве $[u]_{x_0,R}$ на $(u)_{z_0,R}$ мы не можем (поскольку тогда в правой части должна появиться производная по времени, которой у функций из класса $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ нет). Чтобы работать с такими функциями, мы определим "взвешенные" средние по пространственным переменным.

4. **"Взвешенные" средние по пространственным переменным**

Пусть $\zeta \in C_0^\infty(B_2)$ такова, что

$$0 \le \zeta \le 1 \quad \text{на} \quad B_2, \qquad \zeta(x) \;=\; 1 \qquad \forall\, x \in B.$$

Обозначим

$$\zeta_{x_0,R}(x) \;:=\; \zeta\Big(\frac{x - x_0}{R}\Big), \qquad \zeta_{x_0,R} \in C_0^\infty(B_{2R}(x_0)), \qquad \zeta_{x_0,R}(x) \;\equiv\; 1 \qquad \forall\, x \in B_R(x_0)$$

Для любой функции $u \in L_1(Q_{2R}(z_0))$ определим ее "взвешенное" среднее по пространственным переменнным как

$$b_{x_0,R}(t) \;:=\; \frac{\int\limits_{B_{2R}(x_0)} u(x,t)\zeta^2_{x_0,R}(x)\,dx}{\int\limits_{B_{2R}(x_0)} \zeta^2_{x_0,R}(x)\,dx}, \qquad t \in (t_0 - 4R^2, t_0)$$

Теорема. Пусть $u \in L_1(Q_{2R}(z_0))$ и обозначим $\bar u \;:=\; u - b_{x_0,R}$. Тогда для п.в. $t \in (t_0 - 4R^2, t_0]$

$$\int\limits_{B_{2R}(x_0)} \bar u(x,t)\,\zeta^2_{x_0,2R}(x)\,dx \;=\; 0.$$

5. **"Взвешенные" средние слабых решений суть абсолютно непрерывные функции**

Теорема. Если $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое решение уравнения $(*)$, и $b_{x_0,R}$ — его "взвешенное" среднее по пространственным переменным по шару $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$, то $b_{x_0,R} \in W_2^1(0,T)$ и для п.в. $t \in (t_0 - 4R^2, t_0)$

$$\frac{db_{x_0,R}}{dt}(t) \;=\; -\frac{1}{c_R}\int\limits_{B_{2R}(x_0)} a(x,t)\nabla u(x,t)\cdot\nabla\zeta^2_{x_0,R}(x)\,dx,$$

где

$$c_R \;:=\; \int\limits_{B_{2R}(x_0)} \zeta^2_{x_0,R}(x)\,dx \;=\; R^n \int\limits_{B_2} \zeta^2(x)\,dx$$

Доказательство. Пусть $\xi \in C_0^\infty(0,T)$ произвольная, и возьмем в интегральном тождестве

$$\int\limits_{Q_T} \Big(-u\partial_t\eta + a(x,t)\nabla u\cdot\nabla\eta\Big)\,dxdt \;=\; 0, \qquad \forall\, \eta\in C_0^\infty(\Omega\times(0,T)).$$

пробную функцию

$$\eta(x,t) \;=\; \zeta^2_{x_0,R}(x)\xi(t), \qquad \eta\in C_0^\infty(\Omega\times(0,T)).$$

Поделив результат на c_R, получим тождество

$$\int\limits_0^T b_{x_0,R}(t)\xi'(t)\,dt \;=\; -\frac{1}{c_R}\int\limits_0^T F_{x_0,R}(t)\xi(t)\,dt$$

где $F_{x_0,R}\in L_2(0,T)$,

$$F_{x_0,R}(t) \;:=\; -\int\limits_{B_{2R}(x_0)} a(x,t)\nabla u(x,t)\cdot\nabla\zeta^2_{x_0,R}(x)\,dx$$

Это означает, что функция $b_{x_0,R}$ имеет обобщенную производную, равную $\frac{1}{c_R}F_{x_0,R}$. $\square$

6. **Неравенство Каччиопполи со “взвешенным” средним по пространственным переменным**

Теорема. Пусть $u\in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое решение уравнения $(*)$. Тогда для любой точки $z_0=(x_0,t_0)\in Q_T$, такой что $Q_{2R}(z_0):=B_{2R}(x_0)\times(t_0-4R^2,t_0]\subset Q_T$, выполняется оценка

$$\sup_{t\in(t_0-R^2,t_0)} \int\limits_{B_R(x_0)} |u-b_{x_0,R}|^2\,dx \;+\; \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\,dxdt \;\le\; \frac{c}{R^2}\int\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u-b_{x_0,R}|^2\,dxdt$$

в которой постоянная $c>0$ зависит только от n, ν_0, ν_1.

Доказательство. Обозначим для краткости

$$\zeta_R(x) \;:=\; \zeta_{x_0,R}(x), \qquad b_R(t) \;:=\; b_{x_0,R}(t), \qquad \bar u := u-b_R$$

Пусть $\xi_R:=\xi_{t_0,R}\in C_0^\infty((t_0-4R^2,t_0])$ такова, что

$$0\le\xi_R\le 1, \qquad \xi_R(t)=1, \quad t\in[t_0-R^2,t_0], \qquad |\xi_R'| \;\le\; \frac{c}{R^2}.$$

В локальном энергетическом тождестве для слабого решения u

$$\tfrac12 \int\limits_{B_{2R}(x_0)} \zeta^2(x,t)|u(x,t)|^2\,dx \;+\; \int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\int\limits_{B_{2R}(x_0)} \zeta^2 a\nabla u\cdot\nabla u\,dxdt \;=$$

$$=\; \tfrac12 \int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\int\limits_{B_{2R}(x_0)} |u|^2\partial_t\zeta^2\,dxdt \;-\; \int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\int\limits_{B_{2R}(x_0)} u\,a\nabla u\cdot\nabla\zeta^2\,dxdt$$

возьмем

$$\zeta(x,t) \;=\; \zeta_R(x)\,\xi_R(t), \qquad \zeta\in C_0^\infty(Q_{2R}(z_0))$$

Заметим, что

$$\int\limits_{B_{2R}(x_0)} \zeta^2(x,t)|u(x,t)|^2\,dx \;=\; \xi_R^2(t)\int\limits_{B_{2R}(x_0)} \zeta_R^2(x)\,|\bar u(x,t)+b_R(t)|^2\,dx \;\overset{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}{=}$$

$$= \;\xi_R^2\int\limits_{B_{2R}(x_0)}\zeta_R^2\,|\bar u|^2\,dx \;+\; 2\,\xi_R^2\,b_R\underbrace{\int\limits_{B_{2R}(x_0)}\zeta_R^2\,\bar u\,dx}_{=\,0} \;+\; \underbrace{\xi_R^2\,|b_R|^2\int\limits_{B_{2R}(x_0)}\zeta_R^2\,dx}_{=\,c_R\xi_R^2(t)\,|b_R(t)|^2}$$

$$\int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\int\limits_{B_{2R}(x_0)}|u|^2\partial_t\zeta^2\,dxdt \;=\; \int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\partial_t\xi_R^2\int\limits_{B_{2R}(x_0)}|\bar u+b_R|^2\zeta_R^2\,dxdt \;=$$

$$=\;\int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\partial_t\xi_R^2\int\limits_{B_{2R}(x_0)}|\bar u|^2\zeta_R^2\,dxdt \;+\; 2\int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\partial_t\xi_R^2\,b_R dt\underbrace{\int\limits_{B_{2R}(x_0)}\zeta_R^2\bar u\,dx}_{=\,0} \;+\; c_R\int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\partial_t\xi_R^2\,|b_R|^2\,dt$$

В последнем слагаемом выполним интегрирование по частям:

$$c_R\int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\partial_t\xi_R^2\,|b_R|^2\,dt \;=\; c_R\xi_R^2(t)|b_R(t)|^2 \;-\; 2c_R\int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\xi_R^2\,b_R\frac{db_R}{dt}\,dt$$

Воспользуемся формулой для $\frac{db_R}{dt}$:

$$\frac{db_R}{dt} \;=\; -\frac{1}{c_R}\int\limits_{B_{2R}(x_0)} a\nabla u\cdot\nabla\zeta_R^2\,dx$$

Тогда

$$-\,2c_R\int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\xi_R^2\,b_R\frac{db_R}{dt}\,dt \;=\; 2\int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\int\limits_{B_{2R}(x_0)}\xi_R^2\,b_R\,a\nabla u\cdot\nabla\zeta_R^2\,dxdt$$

Но теперь это слагаемое можено объединить с другим слагаемым в локальном энергетическом тождестве:

$$-\int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\int\limits_{B_{2R}(x_0)} u\,a\nabla u\cdot\nabla\zeta^2\,dxdt \;+\; \int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\int\limits_{B_{2R}(x_0)}\xi_R^2\,b_R\,a\nabla u\cdot\nabla\zeta_R^2\,dxdt \;=$$

$$=\;-\int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\xi_R^2\int\limits_{B_{2R}(x_0)}\bar u\,a\nabla u\cdot\nabla\zeta_R^2\,dxdt$$

Таким образом, теперь локальное энергетическое тождество мы можем переписать как тождество для функции $\bar u = u - b_R$:

$$\frac12 \int\limits_{B_{2R}(x_0)} \zeta^2(x,t)|\bar u(x,t)|^2\,dx \;+\; \int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\int\limits_{B_{2R}(x_0)} \zeta^2 a\nabla u\cdot\nabla u\,dxdt \;=$$

$$=\;\frac12\int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\int\limits_{B_{2R}(x_0)} |\bar u|^2\partial_t\zeta^2\,dxdt \;-\; \int\limits_{t_0-4R^2}^{t}\int\limits_{B_{2R}(x_0)} \bar u\,a\nabla u\cdot\nabla\zeta^2\,dxdt$$

Из этого тождества неравенство Каччиопполи со "взвешенным" средним следует стандартным образом при помощи формулы $ab\le\varepsilon a^2+\frac{1}{4\varepsilon}b^2$. $\square$

7. **Неравенство Пуанкаре со "взвешенными" средними по пространственным переменным**

Теорема. Для любой функции $u\in W_2^{1,0}(Q_{2R}(z_0))$ справедливо неравенство Пуанкаре со "взвешенными" средними по пространственным переменным:

$$\int\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u-b_{x_0,R}|^2\,dxdt \;\le\; c(n)\,R^2\int\limits_{Q_{2R}(z_0)}|\nabla u|^2\,dxdt$$

где

$$b_{x_0,R}(t)\;:=\;\frac{1}{c_R}\int\limits_{B_{2R}(x_0)} u(x,t)\zeta^2_{x_0,R}(x)\,dx,\qquad c_R\;:=\int\limits_{B_{2R}(x_0)}\zeta^2_{x_0,R}(x)\,dx\;=\;R^n\int\limits_{B_2}\zeta^2(x)\,dx$$

Доказательство. При п.в. $t\in(t_0-4R^2,t_0)$ мы имеем неравенство

$$\int\limits_{B_{2R}(x_0)}|u-b_{x_0,R}|^2\,dx\;\le\;2\int\limits_{B_{2R}(x_0)}|u-[u]_{x_0,2R}|^2\,dx\;+\;2\underbrace{\int\limits_{B_{2R}(x_0)}|b_{x_0,R}-[u]_{x_0,2R}|^2\,dx}_{=\;|B_{2R}|\,|b_{x_0,R}-[u]_{x_0,2R}|^2}$$

Для второго слагаемого мы имеем оценку

$$|B_{2R}|\,\big|b_{x_0,R}-[u]_{x_0,2R}\big|^2\;=\;\frac{|B_{2R}|}{c_R^2}\left|\int\limits_{B_{2R}(x_0)}u(x,t)\zeta^2_{x_0,R}(x)\,dx\;-\;[u(t)]_{x_0,2R}\int\limits_{B_{2R}(x_0)}\zeta^2_{x_0,R}(x)\,dx\right|^2\;\le$$

$$\le\;\frac{|B_{2R}|}{c_R^2}\left(\int\limits_{B_{2R}(x_0)}\big|u(x,t)-[u(t)]_{x_0,2R}\big|\underbrace{\zeta^2_{x_0,R}(x)}_{\le 1}\,dx\right)^2\;\overset{\text{Гельдер}}{\le}\;\underbrace{\frac{|B_{2R}|^2}{c_R^2}}_{=\frac{|B_2|}{c_1}}\int\limits_{B_{2R}(x_0)}\big|u-[u]_{x_0,2R}\big|^2\,dx$$

Применяя неравенство Пуанкаре с обычными средними по пространственным переменным

$$\int\limits_{B_{2R}(x_0)}|u-[u]_{x_0,2R}|^2\,dx\;\le\;c(n)\,R^2\int\limits_{B_{2R}(x_0)}|\nabla u|^2\,dx$$

получаем требуемый результат. $\square$

8. **Среднее по времени функции $b_{x_0,R}$**

Определим среднее по времени функции $b_{x_0,R}$ как

$$\langle b_{x_0,R}\rangle \ := \ \fint_{t_0-4R^2}^{t_0} b_{x_0,R}(t)\,dt \ \equiv \ \frac{1}{4R^2}\int_{t_0-4R^2}^{t_0} b_{x_0,R}(t)\,dt$$

Теорема. Если u — слабое решение уравнения $(*)$, то справедливо неравенство

$$\fint_{t_0-4R^2}^{t_0} \big|b_{x_0,R}(t)-\langle b_{x_0,R}\rangle\big|^2\,dt \ \le \ c\,R^2 \fint_{Q_{2R}(z_0)} |\nabla u|^2\,dxdt$$

Доказательство. Заметим, что

$$b_{x_0,R}(t)-\langle b_{x_0,R}\rangle \ = \ \fint_{t_0-4R^2}^{t_0} \big(b_{x_0,R}(t)-b_{x_0,R}(s)\big)\,ds$$

$$\fint_{t_0-4R^2}^{t_0} \big|b_{x_0,R}(t)-\langle b_{x_0,R}\rangle\big|^2\,dt \ = \ \fint_{t_0-4R^2}^{t_0}\left(\ \fint_{t_0-4R^2}^{t_0} \big|b_{x_0,R}(t)-b_{x_0,R}(s)\big|\,ds\right)^2 dt \ \overset{\text{Гельдер}}{\le}$$

$$\le \ \fint_{t_0-4R^2}^{t_0}\ \fint_{t_0-4R^2}^{t_0} \big|b_{x_0,R}(t)-b_{x_0,R}(s)\big|^2\,dsdt$$

Но мы знаем, что функции $b_{x_0,R}$ абсолютно непрерывны и

$$\frac{db_{x_0,R}}{dt}(t) \ = \ -\frac{1}{c_R}\int_{B_{2R}(x_0)} a(x,t)\nabla u(x,t)\cdot\nabla\zeta^2_{x_0,R}(x)\,dx,$$

где

$$c_R \ := \int_{B_{2R}(x_0)} \zeta^2_{x_0,R}(x)\,dx \ = \ R^n\int_{B_2}\zeta^2(x)\,dx$$

Поэтому

$$\big|b_{x_0,R}(t)-b_{x_0,R}(s)\big| \ = \ \left|\ \int_s^t \frac{db_{x_0,R}}{d\tau}(\tau)\,d\tau\ \right| \ \le$$

$$\le \ \frac{1}{c_R}\int_{t_0-4R^2}^{t_0}\int_{B_{2R}(x_0)} \underbrace{|a(x,\tau)|}_{\le\nu_1}\,|\nabla u(x,\tau)|\,\underbrace{|\nabla\zeta^2_{x_0,R}(x)|}_{\le\frac{c}{R}}\,dxd\tau \ \le \ \underbrace{\frac{c}{c_R\,R}}_{=\frac{c\,R}{|Q_{2R}|}}\int_{Q_{2R}(z_0)}|\nabla u|\,dxdt$$

Следовательно, по неравенству Гельдера мы получаем

$$\big|b_{x_0,R}(t)-b_{x_0,R}(s)\big|^2 \ \le \ c\,R^2\fint_{Q_{2R}(z_0)}|\nabla u|^2\,dxdt$$

и поэтому

$$\fint_{t_0-4R^2}^{t_0} \big|b_{x_0,R}(t) - \langle b_{x_0,R}\rangle\big|^2\,dt \;\le\; \fint_{t_0-4R^2}^{t_0}\fint_{t_0-4R^2}^{t_0} \big|b_{x_0,R}(t) - b_{x_0,R}(s)\big|^2\,dsdt \;\le\; c\,R^2 \fint_{Q_{2R}(z_0)} |\nabla u|^2\,dxdt$$

9. **Неравенство для слабых решений, похожее на неравенство Пуанкаре**

Теорема. Пусть $a\in L_\infty(Q_T)$ и пусть $u\in W^{1,0}_2(Q_T)$ — слабое решение уравнения

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) \;=\; 0 \qquad \text{в} \qquad \mathcal{D}'(Q_T).$$

Тогда для любого $z_0=(x_0,t_0)\in Q_T$, такого что $Q_{2R}(z_0)\subset Q_T$, выполняется оценка

$$\int_{Q_R(z_0)} |u-(u)_{z_0,R}|^2\,dxdt \;\le\; c\,R^2 \int_{Q_{2R}(z_0)} |\nabla u|^2\,dxdt$$

где $c>0$ зависит только от n, ν_0, ν_1.

Доказательство. Поскольку

$$\int_{Q_R(z_0)} |u-(u)_{z_0,R}|^2\,dxdt \;=\; \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \int_{Q_R(z_0)} |u-\lambda|^2\,dxdt,$$

получаем

$$\begin{aligned}
\int_{Q_R(z_0)} |u-(u)_{z_0,R}|^2\,dxdt \;&\le\; \int_{Q_R(z_0)} |u-\langle b_{x_0,R}\rangle|^2\,dxdt \;\le \\
\le\; 2\int_{Q_R(z_0)} |u-b_{x_0,R}|^2\,dxdt \;&+\; 2\int_{Q_R(z_0)} \underbrace{|b_{x_0,R}-\langle b_{x_0,R}\rangle|^2}_{\text{не зависит от } x}\,dxdt \;\le \\
=\; 2\int_{Q_R(z_0)} |u-b_{x_0,R}|^2\,dxdt \;&+\; 2\,|B_R| \int_{t_0-4R^2}^{t_0} |b_{x_0,R}-\langle b_{x_0,R}\rangle|^2\,dt \;\le \\
\le\; c(n)\,R^2 \int_{Q_{2R}(z_0)} |\nabla u|^2\,dxdt \;&+\; \underbrace{\frac{c\,|B_R|\,R^4}{|Q_R|}}_{=\,c\,R^2} \int_{Q_{2R}(z_0)} |\nabla u|^2\,dxdt
\end{aligned}$$

□

3.4 Уравнения с постоянными коэффициентами

1. **Модельная задача**

   В этом параграфе мы будем изучать однородное параболическое уравнение с постоянными коэффициентами вида
$$\partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) \;=\; 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q_T) \tag{$*$}$$
   где $a \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $a = (a_{jk})$ — симметричная положительно определенная матрица, такая что
$$a_{jk}\xi_j\xi_k \;\geq\; \nu_0|\xi|^2, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \operatorname{div}(a\nabla u) = a : \nabla^2 u = a_{kj}u_{,kj}, \qquad |a| \;\leq\; \nu_1$$

2. **Локальная оценка производных**

   Теорема. Пусть $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое решение уравнения $(*)$ в Q_T. Тогда для любых l, $k \in \mathbb{Z}_+$ и любого $Q_{2R}(z_0) \subset Q_T$ справедлива оценка
$$\sup_{z\in Q_R(z_0)} |\partial_t^l \nabla^k u(z)| \;\leq\; \frac{c}{R^{k+2l}} \Big(\fint_{Q_{2R}(z_0)} |u(z)|^2\, dz \Big)^{1/2}$$
   в которой постоянная $c > 0$ зависит только от n, l, k, ν_0, ν_1 и $\fint_\omega f\,dz = \frac{1}{|\omega|}\int_\omega f\,dz$.

   Доказательство. Из §3.2 мы знаем, что $u \in C^\infty_{loc}(Q_T)$.

   Предположим сначала, что $z_0 = 0$, $R = 1$, $Q = Q_1(0)$. Воспользуемся теоремой вложения:
$$\exists\, m \in \mathbb{N}, \qquad m = m(n,k,l): \qquad W_2^m(Q) \hookrightarrow C^{k+l}(\bar{Q}), \qquad \|u\|_{C^{k+l}(\bar{Q})} \;\leq\; c_n\, \|u\|_{W_2^m(Q)}$$
   Здесь постоянная $c_n > 0$ зависит только от n, m, k и l. Заметим, что
$$\sup_{z\in Q} |\partial_t^l \nabla^k u(z)| \;\leq\; \|u\|_{C^{k+l}(\bar{Q})} \;\leq\; c_n\, \|u\|_{W_2^m(Q)}$$
   С другой стороны,
$$\|u\|_{W_2^m(Q)} \;=\; \sum_{k+|\alpha|\leq m} \|\partial_t^k D^\alpha u\|_{L_2(Q)}$$
   а в силу оценок, полученных в прошлом параграфе, мы имеем
$$\|\partial_t^k D^\alpha u\|_{L_2(Q)} \;\leq\; c_{k,\alpha}\, \|u\|_{W_2^{1,0}(Q_{\frac{3}{2}})}$$
   В этом неравенстве постоянная $c_{k,\alpha} > 0$ зависит уже от n, k, α, ν_0 и ν_1. В силу локального энергетического неравенства (см. §3.1) мы имеем
$$\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_{\frac{3}{2}})} \;\leq\; c_{\nu_0,\nu_1}\, \|u\|_{L_2(Q_2)},$$
   откуда получаем окончательно
$$\sup_{z\in Q} |\partial_t^l \nabla^k u(z)| \;\leq\; c\, \|u\|_{L_2(Q_2)}$$

Рассмотрим теперь произвольные $R > 0$ и $z_0 = (x_0, t_0)$, такие что $Q_{2R}(z_0) \subset Q_T$. Обозначим

$$u^R(x,t) \ := \ u(x_0 + Rx, t_0 + R^2 t), \qquad (x,t) \in Q_2 := B_2 \times (-4, 0]$$

Тогда $u^R \in W_2^{1,0}(Q_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t u^R - \operatorname{div}(a \nabla u^R) \ = \ 0 \qquad \text{в} \qquad \mathcal{D}'(Q_2).$$

Поэтому для u^R справедлива оценка

$$\sup_{z \in Q} |\partial_t^l \nabla^k u^R(z)| \ \leq \ c \, \|u^R\|_{L_2(Q_2)}$$

с постоянной $c > 0$, зависящей только от n, l, k, ν_0, ν_1. С другой стороны, справедливы тождества

$$\sup_{z \in Q} |\partial_t^l \nabla^k u^R(z)| \ = \ R^{k+2l} \sup_{z \in Q_R} |\partial_t^l \nabla^k u(z)|$$

$$\|u^R\|^2_{L_2(Q_2)} \ = \ \int\limits_{Q_2} |u^R(x,t)|^2 \, dxdt \ = \ \int\limits_{Q_2} |u(x_0 + Rx, t_0 + R^2 t)|^2 \, dxdt \ =$$

$$= \left[\begin{array}{c} y = x_0 + Rx \\ \tau = t_0 + R^2 t \\ dyd\tau = R^{n+2} dxdt \end{array} \right] \ = \ \frac{1}{R^{n+2}} \int\limits_{Q_2} |u(y,\tau)|^2 \, dyd\tau \ = \ \underbrace{|Q_2|}_{= c_n} \ \fint\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u(z)|^2 \, dz$$

3. **Decay estimates**

Теорема. Пусть $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое решение уравнения $(*)$. Тогда для любого $Q_R(z_0) \subset Q_T$ и любого $0 < \rho < R$ выполняются оценки

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |u|^2 \, dxdt \ \leq \ c_1 \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n+2} \int\limits_{Q_R(z_0)} |u|^2 \, dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |u - (u)_{z_0,\rho}|^2 \, dxdt \ \leq \ c_2 \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n+4} \int\limits_{Q_R(x_0)} |u - (u)_{z_0,R}|^2 \, dxdt,$$

где постоянные c_1 и c_2 зависят только от n, ν_0, ν_1.

Доказательство. Из §3.2 мы знаем, что $u \in C^\infty_{loc}(Q_T)$.

Предположим сначала, что $z_0 = 0$, $R = 1$, $Q = Q_1(0)$. Докажем, что для любого $\theta \in (0,1)$ справедливы оценки

$$\int\limits_{Q_\theta} |u|^2 \, dxdt \ \leq \ c_1 \, \theta^{n+2} \int\limits_Q |u|^2 \, dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_\theta} |u - (u)_{Q_\theta}|^2 \, dxdt \ \leq \ c_2 \, \theta^{n+4} \int\limits_Q |u - (u)_Q|^2 \, dxdt$$

Начнем с первой оценки. При $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$ эта оценка тривиальна:

$$\int\limits_{Q_\theta} |u|^2 \, dxdt \ \leq \ \int\limits_Q |u|^2 \, dxdt \ \leq \ \underbrace{2^{n+2}}_{= c_1} \underbrace{\frac{1}{2^{n+2}}}_{\leq \theta^{n+2}} \int\limits_Q |u|^2 \, dxdt \ \leq \ c_1 \, \theta^{n+2} \int\limits_Q |u|^2 \, dxdt$$

Пусть $\theta \in (0, \frac{1}{2})$. Из локальной оценки производных (см. пункт **2**) при $k = l = 0$ мы знаем

$$\|u\|_{L_\infty(Q_{1/2})} \;\le\; c \Big(\int\limits_{Q} |u(z)|^2 \, dz \Big)^{1/2}$$

Поэтому при $\theta < \frac{1}{2}$ мы получаем

$$\int\limits_{Q_\theta} |u|^2 \; dxdt \;\le\; \underbrace{\|u\|^2_{L_\infty(Q_\theta)}}_{\le \|u\|^2_{L_\infty(Q_{1/2})}} \; \underbrace{|Q_\theta|}_{= c_n \, \theta^{n+2}} \;\le\; c_n \, \theta^{n+2} \, \|u\|^2_{L_\infty(Q_{1/2})} \;\le\; c_1 \, \theta^{n+2} \int\limits_{Q} |u(z)|^2 \, dz$$

Перейдем к доказательству второй оценки. Сначала рассмотрим случай $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$. Так как

$$\int\limits_{Q_\theta} |u - (u)_{Q_\theta}|^2 \; dxdt \;=\; \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \int\limits_{Q_\theta} |u - \lambda|^2 \; dxdt,$$

получаем

$$\int\limits_{Q_\theta} |u - (u)_{Q_\theta}|^2 \; dxdt \;\le\; \int\limits_{Q_\theta} |u - (u)_{Q}|^2 \; dxdt \;\le\; \int\limits_{Q} |u - (u)_{Q}|^2 \; dxdt$$

и мы получаем тривиальную оценку

$$\int\limits_{Q_\theta} |u - (u)_{Q_\theta}|^2 \; dxdt \;\le\; \underbrace{2^{n+4}}_{= c_2} \underbrace{\frac{1}{2^{n+4}}}_{\le \theta^{n+4}} \int\limits_{Q} |u - (u)_{Q}|^2 \; dxdt \;\le\; c_2 \; \theta^{n+4} \int\limits_{Q} |u - (u)_{Q}|^2 \; dxdt$$

Перейдем к случаю $\theta \in (0, \frac{1}{2})$. Используя неравенство для слабых решений, похожее на неравенство Пуанкаре, получаем

$$\int\limits_{Q_\theta} |u - (u)_{Q_\theta}|^2 \; dxdt \;\le\; c \; \theta^2 \int\limits_{Q_\theta} |\nabla u|^2 \; dxdt$$

Правую часть мы оцениваем как

$$c \; \theta^2 \int\limits_{Q_\theta} |\nabla u|^2 \; dxdt \;\le\; c \; \theta^2 \; \underbrace{\|\nabla u\|^2_{L_\infty(Q_\theta)}}_{\le \|\nabla u\|^2_{L_\infty(Q_{1/2})}} \; |Q_\theta| \;\le\; c \, \theta^{n+4} \, \|\nabla u\|^2_{L_\infty(Q_{1/2})}$$

Из локальной оценки производных (см. пункт **2**) для функции $\bar{u} := u - (u)_Q$ при $k = 1$, $l = 0$, мы получаем

$$\|\nabla u\|_{L_\infty(Q_{1/2})} \;\le\; c \Big(\int\limits_{Q} |\bar{u}|^2 \, dxdt \Big)^{1/2} \;=\; c \Big(\int\limits_{Q} |u - (u)_Q|^2 \, dxdt \Big)^{1/2}$$

Поэтому при $\theta < \frac{1}{2}$ мы получаем

$$\int\limits_{Q_\theta} |u - (u)_{Q_\theta}|^2 \; dxdt \;\le\; c_2 \; \theta^{n+4} \int\limits_{Q} |u - (u)_{Q}|^2 \; dxdt$$

Предположим теперь, что $z_0 = (x_0, t_0)$ и $0 < \rho < R$ — произвольные. Обозначим $\theta := \frac{\rho}{R}$, $\theta \in (0,1)$, и рассмотрим функции

$$u^R(x,t) \ := \ u(x_0 + Rx, t_0 + R^2 t), \qquad (x,t) \in Q.$$

Нетрудно видеть, что $u^R \in W_2^{1,0}(Q)$ удовлеторяет уравнению

$$\partial_t u^R - \operatorname{div}(a \nabla u^R) \ = \ 0 \qquad \text{в} \qquad \mathcal{D}'(Q),$$

и, следовательно, $u^R \in C^\infty_{loc}(Q)$ и u удовлетворяет оценкам

$$\int\limits_{Q_\theta} |u^R|^2 \, dxdt \ \le \ c_1 \, \theta^{n+2} \int\limits_Q |u^R|^2 \, dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_\theta} |u^R - (u^R)_{Q_\theta}|^2 \, dxdt \ \le \ c_2 \, \theta^{n+4} \int\limits_Q |u^R - (u^R)_Q|^2 \, dxdt$$

Заметим, что

$$(u^R)_{Q_\theta} \ := \ \frac{1}{|Q_\theta|} \int\limits_{Q_\theta} u^R(x,t)\, dxdt \ = \ \frac{1}{|Q|\, \theta^{n+2}} \int\limits_{Q_\theta} u(x_0 + Rx, t_0 + R^2 t)\, dxdt \ =$$

$$= \left[\begin{array}{c} y = x_0 + Rx, \quad \tau = t_0 + R^2 t \\ dy d\tau = R^{n+2} dxdt \\ (x,t) \in Q_\theta \ \Leftrightarrow \ (y,\tau) \in Q_{\theta R}(z_0) \end{array} \right] \ = \ \frac{1}{|Q|\, \theta^{n+2} R^{n+2}} \int\limits_{Q_{\theta R}(z_0)} u(y,\tau)\, dyd\tau \ =$$

$$= \ \frac{1}{|Q_\rho(z_0)|} \int\limits_{Q_\rho} u(y,\tau)\, dyd\tau \ = \ (u)_{z_0,\rho}$$

Аналогично,

$$(u^R)_Q \ = \ (u)_{z_0,R}$$

и после замены переменных $y = x_0 + Rx$, $\tau = t_0 + R^2 t$ неравенства для u^R превращаются в decay estimates. $\Box$

3.5 Критерий Кампанато непрерывности функций по Гельдеру

1. **Параболическое пространство Гельдера**

   Определение. Пусть $Q_T := \Omega \times (0,T]$. Мы будем говорить, что функция u непрерывна по Гельдеру на Q_T с показателем $\mu \in (0,1)$ в параболической метрике, если $u \in C(\bar{Q}_T)$ и

$$\langle u \rangle_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(Q_T)} := \sup_{\substack{(x',t'),\,(x'',t'') \in Q_T \\ (x',t') \neq (x'',t'')}} \frac{|u(x',t') - u(x'',t'')|}{|x'-x''|^\mu + |t'-t''|^{\frac{\mu}{2}}} < +\infty$$

   При этом мы будем писать $u \in C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q}_T)$ и

$$\|u\|_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q}_T)} := \|u\|_{C(\bar{Q}_T)} + \langle u \rangle_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(Q_T)}$$

2. **Условие Кампанато**

   Пусть $u \in L_1(Q_T)$. Для любого $Q_\rho(z_0) \subset Q_T$ обозначим

$$\Phi_u(z_0,\rho) := \fint\limits_{Q_\rho(z_0)} |u - (u)_{z_0,\rho}|\,dxdt \equiv \frac{1}{|Q_\rho|} \int\limits_{Q_\rho(z_0)} |u - (u)_{z_0,\rho}|\,dxdt$$

   где, как обычно,

$$(u)_{z_0,\rho} := \fint\limits_{Q_\rho(z_0)} u(x,t)\,dxdt$$

   Определение. Будем говорить, что функция $u \in L_1(Q_T)$ удовлетворяет *условию Кампанато* локально в Q_T, если существуют $\mu \in (0,1)$ и $K > 0$, такие что

$$\forall\, Q_\rho(z_0) \subset Q_T \qquad \Phi_u(z_0,\rho) \le K\rho^\mu$$

3. **Непрерывность по Гельдеру $\Longrightarrow$ условие Кампанато**

   Теорема. Пусть $\mu \in (0,1)$ и $u \in C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q}_T)$. Тогда u удовлетворяет условию Кампанато с показателем μ локально в Q_T.

   Доказательство. Пусть $Q_\rho(z_0) \subset Q_T$. Тогда для любого $(x,t) \in Q_\rho(z_0)$

$$|u(x,t) - u_{z_0,\rho}| = \left| \fint\limits_{Q_\rho(z_0)} (u(x,t) - u(y,\tau))\,dyd\tau \right| \le \fint\limits_{Q_\rho(z_0)} |u(x,t) - u(y,\tau)|\,dyd\tau$$

   Заметим, что при (x,t), $(y,\tau) \in Q_\rho(z_0)$ мы имеем

$$|u(x,t) - u(y,\tau)| \le \langle u \rangle_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(Q_T)} \Big(\underbrace{|x-y|^\mu}_{\le (2\rho)^\mu} + \underbrace{|t-\tau|^{\frac{\mu}{2}}}_{\le \rho^{2\frac{\mu}{2}}} \Big) \le c\,\langle u \rangle_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(Q_T)}\,\rho^\mu$$

   и поэтому для любого $(x,t) \in Q_\rho(z_0)$

$$|u(x,t) - u_{z_0,\rho}| \le c\,\langle u \rangle_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(Q_T)}\,\rho^\mu$$

   интегрируя эту оценку по $Q_\rho(z_0)$, получаем

$$\forall\, Q_\rho(z_0) \subset Q_T \qquad \Phi_u(z_0,\rho) \le c\,\langle u \rangle_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(Q_T)}\,\rho^\mu$$

4. **Условие Кампанато $\Longrightarrow$ непрерывность по Гельдеру**

Теорема. Пусть $u \in L_1(Q_T)$ удовлетворяет условию Кампанато с показателем $\mu \in (0,1)$ локально в Q_T:

$$\forall\, Q_\rho(z_0) \subset Q_T \qquad \Phi_u(z_0,\rho) \;\le\; K\rho^\mu$$

Тогда функция u непрерывна по Гельдеру с показателем $\mu \in (0,1)$ в параболической метрике локально в Q_T, т.е. для любых $\Omega' \Subset \Omega$ и $\delta \in (0,T)$ имеет место включение

$$u \in C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q}'_{\delta,T}), \qquad Q'_{\delta,T} := \Omega' \times (\delta,T].$$

При этом справедлива оценка

$$\|u\|_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q}'_{\delta,T})} \;\le\; c\,\Big(K + \|u\|_{L_1(Q_T)}\Big),$$

в которой постоянная $c>0$ зависит только от n, Ω, Ω', T и δ.

Доказательство. Пусть $0<\rho<R$ и $Q_R(z_0)\subset Q_T$. Тогда

$$\big|(u)_{z_0,\rho} - (u)_{z_0,R}\big| \;=\; \Big| \fint\limits_{Q_\rho(z_0)} (u(x,t)-(u)_{z_0,R})\,dxdt\Big| \;\le$$

$$\le\; \frac{1}{|Q_\rho|} \underbrace{\int\limits_{Q_\rho(z_0)\subset Q_R(z_0)} |u(x,t)-(u)_{z_0,R}|\,dxdt}_{\le\; |Q_R|\,\Phi_u(z_0,R)} \;\le\; \frac{|Q_R|}{|Q_\rho|}\,\Phi_u(z_0,R)$$

откуда, используя условие Кампанато, мы приходим к

$$|(u)_{z_0,\rho} - (u)_{z_0,R}| \;\le\; \frac{|Q_R|}{|Q_\rho|}\,\Phi_u(z_0,R) \;\le\; c\,K\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2} R^\mu$$

Обозначим теперь $R_k := \frac{R}{2^k}$, $k=0,1,\ldots$. Тогда

$$|(u)_{z_0,R_{k+1}} - (u)_{z_0,R_k}| \;\le\; c\,K\,2^{n+2}\,R_k^\mu \;=\; c_n\,K\,R_0^\mu\,2^{-\mu k}$$

и поэтому для любого $m>k$ мы имеем

$$|(u)_{z_0,R_m} - (u)_{z_0,R_k}| \;\le\; \sum_{j=k}^{m-1} |(u)_{z_0,R_{j+1}} - (u)_{z_0,R_j}| \;\le$$

$$\le\; c_n\,K\,R_0^\mu \sum_{j=k}^{m-1}\frac{1}{2^{\mu j}} \;=\; c_n\,K\,R_k^\mu \underbrace{\sum_{j=0}^{m-k-1}\frac{1}{2^{\mu j}}}_{\le 2} \;\le\; c_n\,K\,R_k^\mu$$

Пусть теперь $R_* = \mathrm{dist}_{par}\{\bar{Q}'_{\delta,T},\partial' Q_T\}$, то есть $Q_R(z)\subset Q_T$ для любой $z\in\bar{Q}'_{\delta,T}$ и любого $R\le R_*$. Пусть $R\le R_*$ произвольное, и обозначим

$$f_m(z) \;:=\; (u)_{z,R_m}, \qquad z\in Q'_{\delta,T}, \qquad R_m = \tfrac{R}{2^m}, \qquad m=0,1,2,\ldots$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега как функции множества мы имеем

$$f_m \in C(\bar{Q}'_{\delta,T}),$$

а из полученной выше оценки вытекает, что

$$\sup_{z\in\bar{Q}'_{\delta,T}} |f_m(z) - f_k(z)| \ \le\ c_n\, K\, R_k^{\mu}, \qquad \forall\, m \ge k$$

и поэтому последовательность $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ фундаментальна в $C(\bar{Q}'_{\delta,T})$. Следовательно,

$$\exists\, f\in C(\bar{Q}'_{\delta,T}): \qquad f_k \rightrightarrows f \quad \text{на} \quad \bar{Q}'_{\delta,T}$$

С другой стороны, поскольку $u\in L_1(Q_T)$, по теореме Лебега мы знаем, что

$$\text{п.в.}\quad z\in Q_T \qquad u(z) \ =\ \lim_{R_k\to 0} \ \fint\limits_{Q_{R_k}(z)} u\, dxdt \ \equiv\ \lim_{k\to\infty} (u)_{z,R_k} \ \equiv\ \lim_{k\to\infty} f_k(z)$$

Следовательно,

$$u(z) = f(z) \quad \text{п.в.}\quad z\in Q_T \qquad \Longrightarrow \qquad u\in C(\bar{Q}'_{\delta,T})$$

Зафиксируем теперь $k=0$, $z\in\bar{Q}'_{\delta,T}$ и перейдем к пределу при $m\to\infty$ в соотношении

$$|(u)_{z,R_m} - (u)_{z,R_0}| \ \le\ c_n\, K\, R_k^{\mu}$$

Поскольку $R_0 = R$ и $u(z) = \lim\limits_{m\to\infty} (u)_{z,R_m}$ для любого $z\in\bar{Q}'_{\delta,T}$, получим

$$|u(z) - (u)_{z,R}| \ \le\ c_n\, K\, R^{\mu}, \qquad \forall\, z\in\bar{Q}'_{\delta,T}.$$

Полагая $R = R_*$, для любого $z\in\bar{Q}'_{\delta,T}$ получаем

$$|u(z)| \ \le\ c_n\, K\, R_*^{\mu} \ +\ |(u)_{z,R_*}| \ \le\ c_n\, K\, (\operatorname{diam} Q_T)^{\mu} \ +\ \frac{c_n}{R_*^{n+2}} \int\limits_{Q_T} |u|\, dxdt$$

откуда вытекает

$$\|u\|_{C(\bar{Q}'_{\delta,T})} \ \le\ c\,\Big(K + \|u\|_{L_1(Q_T)}\Big)$$

с постоянной $c>0$, зависящей только от n, Ω, Ω', T и δ.

Пусть теперь $z'=(x',t')$, $z''=(x'',t'')\in Q'_{\delta,T}$ таковы, что

$$|z'-z''|_{par} \ :=\ |x'-x''| \ +\ |t'-t''|^{\frac12} \ <\ \tfrac{R_*}{4}$$

Обозначим

$$z_0 \ :=\ (x_0,t_0), \qquad x_0 \ :=\ \tfrac12\,(x'+x''), \qquad t_0 \ :=\ \max\{t',t''\}, \qquad R \ :=\ |z'-z''|_{par}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае

$$Q_{2R}(z_0)\subset Q_T, \qquad Q_R(z')\subset Q_{2R}(z_0), \qquad Q_R(z'')\subset Q_{2R}(z_0)$$

и поэтому

$$|u(z')-u(z'')| \ \le\ \underbrace{|u(z')-(u)_{z',R}|}_{\le\ c_nK\,R^{\mu}} \ +\ |(u)_{z',R}-(u)_{z'',R}| \ +\ \underbrace{|u(z'')-(u)_{z'',R}|}_{\le\ c_nK\,R^{\mu}}$$

Для “серединного” слагаемого мы имеем

$$|(u)_{z',R}-(u)_{z'',R}| \ \le\ |(u)_{z',R}-(u)_{z_0,2R}| \ +\ |(u)_{z'',R}-(u)_{z_0,2R}|$$

Поскольку $Q_R(z') \subset Q_{2R}(z_0)$, справедлива оценка

$$|(u)_{z',R} - (u)_{z_0,2R}| \;\le\; \fint_{Q_R(z')} |u - (u)_{z_0,2R}|\, dxdt \;\le\; \frac{1}{|Q_R|} \int_{Q_R(z')\subset Q_{2R}(z_0)} |u - (u)_{z_0,2R}|\, dxdt \;\le$$

$$\le\; \frac{|Q_{2R}|}{|Q_R|}\, \Phi_u(z_0, 2R) \;\le\; c_n\, K\, (2R)^\mu$$

и аналогично

$$|(u)_{z'',R} - (u)_{z_0,2R}| \;\le\; c_n\, K\, (2R)^\mu$$

Итого окончательно мы получаем

$$|u(z') - u(z'')| \;\le\; c_n\, K\, R^\mu \;=\; c_n\, K\, |z' - z''|^\mu_{par},$$

что выполняется для любых $z',\, z'' \in Q'_{\delta,T}$, таких что $|z' - z''|_{par} \le \frac{1}{4}\, R_*$.

При $|z' - z''|_{par} \ge \frac{1}{4}\, R_*$ соответствующая оценка тривиально вытекает из уже доказанной:

$$|u(z') - u(z'')| \;\le\; 2\, \|u\|_{C(\bar{Q}'_{\delta,T})} \;\le\; \underbrace{4^\mu R_*^{-\mu}}_{c(\Omega',\delta\ldots)}\, |z' - z''|^\mu_{par}\, \|u\|_{C(\bar{Q}'_{\delta,T})} \;\le$$

$$\le\; c\, \Big(K \;+\; \|u\|_{L_1(Q_T)} \Big)\, |z' - z''|^\mu_{par}$$

Таким образом,

$$\langle u \rangle_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q}'_{\delta,T})} \;\le\; c\, \Big(K \;+\; \|u\|_{L_1(Q_T)} \Big)$$

$\square$

3.6 Непрерывность по Гельдеру слабых решений

1. **Основной результат**

Теорема. Пусть $a \in C(\bar{Q}_T)$ и $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое решение уравнения

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) \; = \; 0 \qquad \text{в} \quad Q_T \tag{$*$}$$

Тогда для любого $\mu \in (0,1)$ справедливо включение

$$u \in C^{\mu,\frac{\mu}{2}}_{loc}(Q_T),$$

и для любых $\Omega' \Subset \Omega$, $\delta \in (0,T)$ справедлива оценка

$$\|u\|_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(Q'_{\delta,T})} \; \le \; c\,\|u\|_{L_2(Q_T)}$$

где постоянная $c > 0$ зависит только от n, μ, ν_0, ν_1, Ω, Ω', T, δ и модуля непрерывности функции a.

2. **"Замораживание" коэффициентов**

Теорема. Пусть $a \in C(\bar{Q}_R(z_0))$ и $u \in W_2^{1,0}(Q_R(z_0))$ — слабое решение уравнения $(*)$ в $Q_R(z_0)$. Обозначим

$$f \; := \; (a(z) - a(z_0))\nabla u, \qquad f \in L_2(Q_R(z_0))$$

и пусть $v \in W_2^{1,0}(Q_R(z_0))$ — слабое решение начально-краевой задачи

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t v - \operatorname{div}(a(z_0)\nabla v) & = & \operatorname{div} f \qquad \text{в} \quad Q_R(z_0) \\ v|_{\partial' Q_R(z_0)} & = & 0 \end{array} \right. \tag{$**$}$$

Тогда справедлива оценка

$$\int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla v|^2\, dxdt \; \le \; c\,\omega^2(z_0,R) \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\, dxdt$$

где $c > 0$ зависит только от n, ν_0, ν_1 и $\omega(z_0,R) := \sup\limits_{z \in Q_R(z_0)} |a(z) - a(z_0)|$.

Доказательство. Для слабого решения v начально-краевой задачи $(**)$ справедлива энергетическая оценка

$$\|v\|^2_{L_\infty(t_0-R^2,t_0;L_2(B_R(x_0)))} + \|\nabla v\|^2_{L_2(Q_R(z_0))} \; \le \; c\,\|f\|^2_{L_2(Q_R(z_0))},$$

которая с учетом

$$\int\limits_{Q_R(z_0)} |f|^2\, dxdt \; \le \; \omega^2(z_0,R) \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\, dxdt$$

дает требуемое неравенство.

3. **Задача сравнения**

Теорема. Пусть $a \in C(\bar{Q}_R(z_0))$ и $u \in W_2^{1,0}(Q_R(z_0))$ — слабое решение уравнения $(*)$ в $Q_R(z_0)$, а $v \in W_2^{1,0}(Q_R(z_0))$ — слабое решение задачи $(**)$ в $Q_R(z_0)$. Обозначим

$$w \;:=\; u - v$$

Тогда $w \in W_2^{1,0}(Q_R(z_0))$ является слабым решением однородного параболического уравнения с постоянными коэффициентами

$$\partial_t w - \operatorname{div}(a(z_0)\nabla w) \;=\; 0 \qquad \text{в} \quad Q_R(z_0)$$

а также удовлетворяет начально-краевым условиям

$$w|_{\partial' Q_R(z_0)} \;=\; u|_{\partial' Q_R(z_0)}$$

Доказательство. Для любой $\eta \in C_0^\infty(B_R(x_0) \times (t_0 - R^2, t_0))$

$$\int\limits_{Q_R(z_0)} (-w\partial_t\eta + a(z_0)\nabla w \cdot \nabla\eta)\, dz \;=$$

$$= \int\limits_{Q_R(z_0)} (-u\partial_t\eta + a(z_0)\nabla u \cdot \nabla\eta)\, dz \;-\; \int\limits_{Q_R(z_0)} (-v\partial_t\eta + a(z_0)\nabla v \cdot \nabla\eta)\, dz \;=$$

$$= \int\limits_{Q_R(z_0)} (a(z_0) - a(z))\nabla u \cdot \nabla\eta\, dz \;+\; \int\limits_{Q_R(z_0)} f_0 \cdot \nabla\eta\, dz \;=\; 0$$

4. **Decay estimate**

Теорема. Пусть $a \in C(\bar{Q}_T)$ и $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое решение уравнения

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) \;=\; 0 \qquad \text{в} \quad Q_T$$

Тогда для любого $Q_R(z_0) \subset Q_T$ и любого $0 < \rho < R$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u|^2\, dz \;\le\; c_* \left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} + \omega^2(z_0, R) \right] \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\, dz$$

где $c_* > 0$ зависит только от n, ν_0, ν_1 и $\omega(z_0, R) := \sup\limits_{z \in Q_R(z_0)} |a(z) - a(z_0)|$.

Доказательство. Пусть $Q_R(z_0) \subset Q_T$ и представим u в виде

$$u \;=\; v \;+\; w \quad \text{в} \quad Q_R(z_0),$$

где $v \in W_2^{1,0}(Q_R(z_0))$ — слабое решение начально краевой задачи

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t v - \operatorname{div}(a(z_0)\nabla v) \;&=\; \operatorname{div}\Big((a(z) - a(z_0))\nabla u\Big) \qquad \text{в} \quad Q_R(z_0) \\ v|_{\partial' Q_R(z_0)} \;&=\; 0 \end{aligned} \right. \tag{$**$}$$

а $w \in W_2^{1,0}(Q_R(z_0)$ — слабое (но при этом локально гладкое) решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$\partial_t w - \operatorname{div}(a(z_0)\nabla w) \ = \ 0 \qquad \text{в} \quad Q_R(z_0)$$

Поскольку $w \in W_2^{1,0}(Q_R(z_0))$ является слабым решением однородного параболического уравнения с постоянными коэффициентами, мы имеем $w \in C^\infty_{loc}(Q_T)$. Более того, для любого $k = 1, \dots, n$ функция $w_{,k} = \frac{\partial w}{\partial x_k}$ также является слабым решением того же самого уравнения, и поэтому для нее и справедливы decay estimates:

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla w|^2\, dxdt \ \le \ c\, \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla w|^2\, dxdt, \qquad 0<\rho<R$$

Следовательно, для $u = v + w$ мы имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_{Q_\rho(z_0)} \underbrace{|\nabla u|^2}_{\le 2|\nabla w|^2 + 2|\nabla v|^2} dz \ &\le \ 2 \int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla w|^2\, dz \ + \ 2 \int\limits_{Q_\rho(z_0)\subset Q_R(z_0)} |\nabla v|^2\, dz \ \le \\ &\le \ 2\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \int\limits_{Q_R(z_0)} \underbrace{|\nabla w|^2}_{\le 2|\nabla u|^2 + 2|\nabla v|^2} dz \ + \ 2\int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla v|^2\, dz \ \le \\ \le \ 2\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\, dz \ &+ \ 2\underbrace{\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2}}_{\le 1} \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla v|^2\, dz \ + \ 2 \underbrace{\int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla v|^2\, dz}_{\le\ \omega^2(z_0,R) \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\, dz} \ \le \\ &\le \ c\, \left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} + \omega^2(z_0,R)\right] \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\, dz \end{aligned}$$

5. **Useful Lemma**

Теорема. Для любых $A>0$ и $0<\beta<\alpha$ существуют постоянные $\varepsilon_0>0$ и $c_0>0$, зависящие только от A, α и β, такие что если для некоторого $B>0$ неотрицательная неубывающая функция $\phi : [0, R_*] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$\phi(\rho) \ \le \ A\, \left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^\alpha + \varepsilon_0\right]\, \phi(R) \ + \ B\, R^\beta, \qquad \forall\ \rho,\ R: \quad 0<\rho<R\le R_*,$$

то справедива оценка

$$\phi(\rho) \ \le \ c_0\, \rho^\beta\, \left(\frac{\phi(R)}{R^\beta} \ + \ B\right), \qquad \forall\ \rho,\ R: \quad 0<\rho<R\le R_*.$$

Доказательство. Обозначим $\gamma = \frac12(\alpha+\beta)$ и выберем $\theta \in (0,1)$ и $\varepsilon_0 \in (0,1)$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$A\,\theta^{\alpha-\gamma} \ = \ \tfrac12, \qquad \varepsilon_0 \ = \ \tfrac12\,\theta^\gamma$$

Пусть $0<\rho<R\le R_0$. Обозначим $R_m := \theta^m R$ и фиксируем $m = 0, 1, 2, \dots$ так, чтобы

$$R_{m+1} \ < \ \rho \ \le \ R_m$$

Тогда для любого $k = 0, \ldots, m$ мы имеем $\frac{R_{k+1}}{R_k} = \theta$ и поэтому

$$\phi(R_{k+1}) \;\le\; A\,\Big[\,\Big(\tfrac{R_{k+1}}{R_k}\Big)^{\alpha} + \varepsilon_0\Big]\,\phi(R_k) \;+\; B\,R_k^{\beta} \;=\; A\,\big(\theta^{\alpha} + \varepsilon_0\big)\,\phi(R_k) \;+\; B\,R_k^{\beta} \;=$$
$$=\; \theta^{\gamma}\,\underbrace{\Big(A\,\theta^{\alpha-\gamma} + \frac{\varepsilon_0}{\theta^{\gamma}}\Big)}_{\le 1}\,\phi(R_k) \;+\; B\,R_k^{\beta} \;\le\; \theta^{\gamma}\,\phi(R_k) \;+\; B\,R_k^{\beta}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\phi(\rho) \;&\le\; \phi(R_m) \;\le\; \theta^{\gamma}\phi(R_{m-1}) + BR_{m-1}^{\beta} \;\le \\
&\le\; \theta^{\gamma}\Big(\theta^{\gamma}\phi(R_{m-2}) + BR_{m-2}^{\beta}\Big) + BR_{m-1}^{\beta} \;= \\
&=\; \theta^{2\gamma}\phi(R_{m-2}) + B\Big(R_{m-1}^{\beta} + \theta^{\gamma}R_{m-2}^{\beta}\Big) \;\le \\
&\le\; \theta^{2\gamma}\Big(\theta^{\gamma}\phi(R_{m-3}) + BR_{m-3}^{\beta}\Big) + B\Big(R_{m-1}^{\beta} + \theta^{\gamma}R_{m-2}^{\beta}\Big) \;= \\
&=\; \theta^{3\gamma}\phi(R_{m-3}) + B\Big(R_{m-1}^{\beta} + \theta^{\gamma}R_{m-2}^{\beta} + \theta^{2\gamma}R_{m-3}^{\beta}\Big) \;\le \\
&\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots \\
&\le\; \underbrace{\theta^{m\gamma}}_{\le\,\theta^{m\beta}}\,\phi(R_0) \;+\; B\,\Big(R_{m-1}^{\beta} + \theta^{\gamma}R_{m-2}^{\beta} + \theta^{2\gamma}R_{m-3}^{\beta} + \ldots + \;\ldots\; + \theta^{(m-1)\gamma}R_0^{\beta}\Big)
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
&R_{m-1}^{\beta} + \theta^{\gamma}R_{m-2}^{\beta} + \theta^{2\gamma}R_{m-3}^{\beta} + \ldots + \;\ldots\; + \theta^{(m-1)\gamma}R_0^{\beta} \;= \\
=\;& \underbrace{R_{m-1}^{\beta}}_{\le\,\theta^{-2\beta}R_{m+1}^{\beta}\,\le\,\theta^{-2\beta}\rho^{\beta}}\;\underbrace{\Big(1 + \theta^{\gamma-\beta} + \theta^{2(\gamma-\beta)} + \ldots + \theta^{(m-1)(\gamma-\beta)}\Big)}_{\le\,\frac{1}{1-\theta^{\gamma-\beta}}} \;\le\; c_{\theta}\,\rho^{\beta}
\end{aligned}$$

Принимая во внимание неравенство

$$\theta^{m\beta} \;=\; \Big(\frac{R_m}{R_0}\Big)^{\beta} \;\le\; \theta^{-\beta}\,\Big(\frac{R_{m+1}}{R_0}\Big)^{\beta} \;\le\; \theta^{-\beta}\,\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{\beta},$$

мы приходим к

$$\phi(\rho) \;\le\; c_{\theta}\,\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{\beta}\,\phi(R) \;+\; c_{\theta}\,B\,\rho^{\beta}$$

6. **Применение Useful Lemma**

Теорема. Пусть $a \in C(\bar{Q}_T)$, и пусть $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое решение уравнения

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) \;=\; 0 \qquad \text{в} \quad Q_T$$

Тогда для любого $\mu \in (0,1)$ существует $R_0 > 0$, такое что для любого $Q_{2R_0}(z_0) \subset Q_T$ и любых $0 < \rho < R \le R_0$ справедливы оценки

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u|^2\,dz \;\le\; c\,\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2\mu} \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\,dz$$

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |u - (u)_{z_0,\rho}|^2\,dz \;\le\; c\,\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2+2\mu} \int\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u - (u)_{z_0,2R}|^2\,dz$$

где постоянная $c > 0$ зависит только от n, μ, ν_0, ν_1 и модуля непрерывности функции a.

Доказательство. Докажем первую оценку. Из пункта Decay estimate мы знаем, что для любого $Q_{2R}(z_0) \subset Q_T$ справедлива оценка

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u|^2 \, dz \ \le\ c_* \left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} + \omega^2(z_0, R) \right] \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2 \, dz, \qquad 0 < \rho < R$$

Пусть $\mu \in (0,1)$. Обозначим

$$\phi(\rho) \ :=\ \int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u|^2 \, dz, \qquad \alpha = n+2, \qquad \beta = n + 2\mu, \qquad A = c_*, \qquad B = 0,$$

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ — постоянная из Useful Lemma, построенная для данных A, α, β. Поскольку a равномерно непрерывна на $\bar{Q}_T$, для данного $\varepsilon_0 > 0$ существует $R_0 > 0$, такое что

$$\omega^2(z_0, R) \ <\ \varepsilon_0, \qquad \forall\, z_0 \in Q_T, \quad \forall\, R \le R_0 : \quad Q_{2R_0}(z_0) \subset Q_T.$$

Пусть $z_0 \in Q_T$ такова, что $Q_{2R_0}(z_0) \subset Q_T$. Тогда для ϕ справедлива оценка

$$\phi(\rho) \ \le\ \ A \left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha} + \varepsilon_0 \right] \phi(R), \qquad \forall\ \rho,\ R : \quad 0 < \rho < R \le R_0$$

откуда при помощи Useful Lemma вытекает неравенство

$$\phi(\rho) \ \le\ c_{A,\alpha,\beta} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\beta} \phi(R), \qquad \forall\ \rho,\ R : \quad 0 < \rho < R \le R_0$$

что дает нам первую из оценок.

Вторая оценка получается из первой с учетом неравенства для слабых решений, похожего на неравенство Пуанкаре

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |u - (u)_{z_0,\rho}|^2 \, dz \ \le\ c\, \rho^2 \int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u|^2 \, dz$$

и неравенства Каччиопполи

$$\int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2 \, dz \ \le\ \frac{c}{R^2} \int\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u - (u)_{z_0,2R}|^2 \, dz$$

7. **Замечание об удвоении радиуса**

Выше мы фактически доказали, что для любого $Q_R(z_0) \subset Q_T$ и любого $0 < \rho < \frac{R}{2}$ выполняется оценка

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |u - (u)_{z_0,\rho}|^2 \, dz \ \le\ c \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2+2\mu} \int\limits_{Q_R(z_0)} |u - (u)_{z_0,R}|^2 \, dz$$

Однако при $\frac{R}{2} \le \rho \le R$ данная оценка тоже выполняется тривиальным образом благодаря свойству "оптимальности" среднего значения:

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |u - (u)_{z_0,\rho}|^2 \, dz \ \le \int\limits_{Q_\rho(z_0) \subset Q_R(z_0)} |u - (u)_{z_0,R}|^2 \, dz \ \le$$

$$\le\ \underbrace{2^{n+2+2\mu} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2+2\mu}}_{\ge 1} \int\limits_{Q_R(z_0)} |u - (u)_{z_0,R}|^2 \, dz$$

8. Доказательство основного результата

Пусть $\Omega' \Subset \Omega$, $\delta \in (0,T)$, $Q'_{\delta,T} := \Omega' \times (\delta, T]$ и обозначим $R_* = \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}_{par}\{\bar{Q}'_{\delta,T}, \partial' Q_T\}$ и $\mu \in (0,1)$, то есть $Q_{2R}(z_0) \subset Q_T$ при любых $z_0 \in Q'_{\delta,T}$ и $R < R_*$.

Фиксируем произвольное $\mu \in (0,1)$, и пусть $R_0 \in (0, R_*)$ — это постоянная из предыдущего пункта, завиящая от μ и от модуля непрерывности a, такая что для любых $z_0 \in Q'_{\delta,T}$ и $0 < \rho < R \le R_0$ выполняется оценка

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |u - (u)_{z_0,\rho}|^2\,dz \;\le\; c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2+2\mu} \int\limits_{Q_{2R}(z_0)} |u - (u)_{z_0,2R}|^2\,dz$$

Тогда для $z_0 \in Q'_{\delta,T}$ и любого $0 < \rho < R_0$

$$\fint\limits_{Q_\rho(z_0)} |u - (u)_{z_0,\rho}|^2\,dz \;\le\; c\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{2\mu} \fint\limits_{Q_{2R_0}(z_0)} |u|^2\,dz$$

Поскольку по неравенству Гельдера

$$\fint\limits_{Q_\rho(z_0)} |u - (u)_{z_0,\rho}|\,dxdt \;\;\le\;\; \Big(\fint\limits_{Q_\rho(z_0)} |u - (u)_{z_0,\rho}|^2\,dxdt\Big)^{1/2}$$

функция u удовлетвояет условию Кампанато в области $Q'_{\delta,T}$:

$$\fint\limits_{Q_\rho(z_0)} |u - (u)_{z_0,\rho}|\,dxdt \;\le\; c\,K\,\rho^\mu, \qquad \forall\, z_0 \in Q'_{T,\delta}, \qquad \forall\, 0 < \rho < R_0$$

где

$$K \;:=\; \frac{1}{R_0^\mu}\Big(\fint\limits_{Q_{2R_0}(z_0)} |u|^2\,dz\Big)^{1/2}$$

Теперь из критетрия Кампанато вытекает, что

$$u \in C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q}'_{\delta,T}), \qquad \|u\|_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q}'_{\delta,T})} \;\le\; c\Big(K + \|u\|_{L_2(Q_T)}\Big) \;\le\; c_0\,\|u\|_{L_2(Q_T)}$$

с постоянной $c_0 > 0$, зависящей от $R_0 > 0$, которое, в свою очередь, зависит от n, μ, ν_0, ν_1, Ω, Ω', T, δ и от модуля непрерывности функции a.

9. Замечания и возможные обобщения

- Изложенный метод также позволяет установить непрерывность по Гельдеру слабых решений параболических *систем*.
- Для *скалярных* уравнений непрерывность по Гельдеру имеет место даже в случае измеримых ограниченных коэффициентов $a \in L_\infty(Q_R)$ (теорема Де Джорджи-Нэша).
- Полученные результаты можно также обобщить на случай уравнений с ненулевой правой частью и младшими коэффициентами.

3.7 Непрерывность по Гельдеру градиента слабых решений

1. **Основной результат**

   Теорема. Пусть $a \in C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q}_T)$, $\mu \in (0,1)$, и $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое решение уравнения

   $$\partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) \ = \ 0 \qquad \text{в} \quad Q_T \tag{$*$}$$

   Тогда для любого $\lambda \in (0,\mu)$ справедливо включение

   $$\nabla u \in C_{loc}^{\lambda,\frac{\lambda}{2}}(Q_T),$$

   и для любых $\Omega' \Subset \Omega$, $\delta \in (0,T)$, $Q'_{T,\delta} := \Omega' \times (\delta, T]$, справедлива оценка

   $$\|u\|_{C^{\lambda,\frac{\lambda}{2}}(Q'_{\delta,T})} \ \le \ c\,\|u\|_{L_2(Q_T)}$$

   где постоянная $c > 0$ зависит только от n, μ, ν_0, ν_1, Ω, Ω', T, δ, μ, λ и $\|a\|_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q}_T)}$.

2. **"Замораживание" коэффициентов**

   Возьмем произвольный цилиндр $Q_R(z_0) \subset Q_T$. Представим слабое решение $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ задачи $(*)$ в виде

   $$u \ = \ w \ + \ v,$$

   где $w \in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое (но при этом локально-гладкое) решение задачи сравнения

   $$\begin{cases} \partial_t w - \operatorname{div}(a(z_0)\nabla w) \ = \ 0 \qquad \text{в} \quad Q_R(z_0) \\ w|_{\partial' Q_R(z_0)} \ = \ u|_{\partial' Q_R(z_0)} \end{cases}$$

   Тогда $v \in W_2^{1,0}(Q_T)$ является слабым решением начально-краевой задачи

   $$\begin{cases} \partial_t v - \operatorname{div}(a(z_0)\nabla v) \ = \ \operatorname{div}\Big((a(z) - a(z_0))\nabla u\Big) \qquad \text{в} \quad Q_R(z_0) \\ v|_{\partial' Q_R(z_0)} \ = \ 0 \end{cases}$$

3. **Оценка разности решений исходной задачи и задачи сравнения**

   Для решения $v \in W_2^{1,0}(Q_T)$ начально-краевой задачи имеет место энергетическая оценка

   $$\int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla v|^2\,dxdt \ \le \ \omega^2(z_0,R) \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\,dxdt$$

   где $\omega(z_0,R) := \sup\limits_{z\in Q_R(z_0)} |a(z) - a(z_0)|$. Поскольку $a \in C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q}_T)$, мы получаем

   $$\omega^2(z_0,R) \ \le \ \langle a\rangle^2_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(Q_T)}\,R^{2\mu}$$

   мы приходим к оценке

   $$\int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla v|^2\,dxdt \ \le \ c_a\,R^{2\mu} \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\,dxdt$$

4. **Decay estimate**

Теорема. Пусть $a \in C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q}_T)$ и $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое решение уравнения

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) \ = \ 0 \qquad \text{в} \quad Q_T$$

Тогда для любого $Q_R(z_0) \subset Q_T$ и любого $0<\rho<R$ справедливы неравенства

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u|^2\,dz \ \le \ c\left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} + R^{2\mu}\right]\int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\,dz$$

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{z_0,\rho}|^2\,dz \ \le \ c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+4}\int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{z_0,R}|^2\,dz + c\,R^{2\mu}\int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\,dz$$

где $c>0$ зависит только от n, ν_0, ν_1 и $\|a\|_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q}_T)}$.

Доказательство. Поскольку $w \in W_2^{1,0}(Q_R(z_0))$ является слабым решением однородного параболического уравнения с постоянными коэффициентами, мы имеем $w \in C^\infty_{loc}(Q_T)$. Более того, для любого $k=1,\dots,n$ функция $w_{,k} = \frac{\partial w}{\partial x_k}$ также является слабым решением того же самого уравнения, и поэтому для нее и справедливы decay estimates:

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla w|^2\,dxdt \ \le \ c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2}\int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla w|^2\,dxdt, \qquad 0<\rho<R$$

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla w - (\nabla w)_{z_0,\rho}|^2\,dxdt \ \le \ c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+4}\int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla w - (\nabla w)_{z_0,R}|^2\,dxdt, \qquad 0<\rho<R$$

Следовательно, для $u=v+w$ мы имеем

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} \underbrace{|\nabla u|^2}_{\le 2|\nabla w|^2+2|\nabla v|^2}\,dz \ \le \ c\left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} + R^{2\mu}\right]\int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\,dz$$

(такую оценку мы уже выводили в прошлом параграфе), а также

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} \underbrace{|\nabla u - (\nabla u)_{z_0,\rho}|^2}_{\le 2|\nabla w-(\nabla w)_{z_0,\rho}|^2+2|\nabla v-(\nabla v)_{z_0,\rho}|^2}\,dz \ \le$$

$$\le \ 2\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla w - (\nabla w)_{z_0,\rho}|^2\,dz \ + \ 2\int\limits_{Q_\rho(z_0)} \underbrace{|\nabla v - (\nabla v)_{z_0,\rho}|^2}_{\le 2\,|\nabla v|^2+2\,|(\nabla v)_{z_0,\rho}|^2}\,dz \ \le$$

$$\le \ 2\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+4}\int\limits_{Q_R(z_0)} \underbrace{|\nabla w - (\nabla w)_{z_0,R}|^2}_{\le 2|\nabla w-(\nabla w)_{z_0,R}|^2+2|\nabla v-(\nabla v)_{z_0,R}|^2}\,dz \ +$$

$$+ \ 4\int\limits_{Q_\rho(z_0)\subset Q_R(z_0)} |\nabla v|^2\,dz \ + \ 4\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |(\nabla v)_{z_0,\rho}|^2\,dz$$

$$\le \ c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+4}\int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{z_0,R}|^2\,dz \ + \ c\int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla v|^2\,dz \ +$$

$$+ \ c\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |(\nabla v)_{z_0,\rho}|^2\,dz \ + \ c\int\limits_{Q_R(z_0)} |(\nabla v)_{z_0,R}|^2\,dz$$

Отметим, что по неравенству Гельдера для любого $r \le R$ мы имеем

$$\int\limits_{Q_r(z_0)} \underbrace{|(\nabla v)_{z_0,r}|^2}_{const}\, dz \;=\; |Q_r|\,|(\nabla v)_{z_0,r}|^2 \;\underset{\text{Гельдер}}{\le}\; |Q_r|\,\left(|\nabla v|^2\right)_{z_0,r} \;=\; \int\limits_{Q_r(z_0)\subset Q_R(z_0)} |\nabla v|^2\, dz$$

Следовательно,

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{z_0,\rho}|^2\, dz \;\le\; c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+4} \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{z_0,R}|^2\, dz \;+\; \underbrace{c\int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla v|^2\, dz}_{\le c\, R^{2\mu} \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\, dz}$$

5. **Первое применение Useful Lemma**

Теорема. Пусть $a \in C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar Q_T)$, и пусть $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое решение уравнения

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) \;=\; 0 \qquad \text{в} \quad Q_T$$

Тогда для любого $\delta \in (0,1)$ существует $R_0 > 0$, такое что для любого $Q_{R_0}(z_0) \subset Q_T$ и любых $0 < \rho < R \le R_0$ справедливы оценки

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u|^2\, dz \;\le\; c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2\delta} \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\, dz$$

где постоянная $c > 0$ зависит только от n, μ, ν_0, ν_1, μ и $\|a\|_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar Q_T)}$.

Доказательство. Из пункта Decay estimate мы знаем, что для любого $Q_R(z_0) \subset Q_T$ справедлива оценка

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u|^2\, dz \;\le\; c_*\left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} + R^{2\mu}\right] \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2\, dz, \qquad 0 < \rho < R$$

Пусть $\delta \in (0,1)$. Обозначим

$$\phi(\rho) \;:=\; \int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u|^2\, dz, \qquad \alpha = n+2, \qquad \beta = n + 2\delta, \qquad A = c_*, \qquad B = 0,$$

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ — постоянная из Useful Lemma, построенная для данных A, α, β, и пусть $R_0 > 0$ удовлетворяет оценке

$$R_0^{2\mu} \;<\; \varepsilon_0.$$

Тогда для ϕ справедлива оценка

$$\phi(\rho) \;\le\; A\left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha} + \varepsilon_0\right]\phi(R), \qquad \forall\, \rho,\; R: \quad 0 < \rho < R \le R_0$$

откуда при помощи Useful Lemma вытекает неравенство

$$\phi(\rho) \;\le\; c_{A,\alpha,\beta}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\beta}\phi(R), \qquad \forall\, \rho,\; R: \quad 0 < \rho < R \le R_0$$

что дает нам требуемую оценку.

6. **Второе применение Useful Lemma**

Теорема. Пусть $a \in C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q}_T)$, и пусть $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ — слабое решение уравнения

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a\nabla u) \; = \; 0 \qquad \text{в} \quad Q_T$$

Тогда для любого $\lambda \in (0,\mu)$ существует $R_0 > 0$, такое что для любого $Q_{R_0}(z_0) \subset Q_T$ и любых $0 < \rho < R_0$ справедлива оценка

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{z_0,\rho}|^2 \, dz \; \le \; c\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{n+2+2\lambda} \int\limits_{Q_{R_0}(z_0)} |\nabla u|^2 \, dz$$

где постоянная $c > 0$ зависит только от n, μ, ν_0, ν_1, μ, λ и $\|a\|_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q}_T)}$.

Доказательство. Мы уже знаем, что для любого $\delta \in (0,1)$ существует $R_0 > 0$, такое что при любых $0 < R < R_0$ справедлива оценка

$$\int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2 \, dz \; \le \; c\left(\frac{R}{R_0}\right)^{n+2\delta} \int\limits_{Q_{R_0}(z_0)} |\nabla u|^2 \, dz$$

Фиксируем $\delta = 1 - (\mu - \lambda)$. Тогда из decay estimate

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{z_0,\rho}|^2 \, dz \; \le \; c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+4} \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{z_0,R}|^2 \, dz \; + \; c\,R^{2\mu} \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^2 \, dz$$

при любых $0 < \rho < R \le R_0$ вытекает оценка

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{z_0,\rho}|^2 \, dz \; \le \; c_*\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+4} \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{z_0,R}|^2 \, dz + c_{**}\frac{R^{n+2+2\lambda}}{R_0^{n+2\delta}} \int\limits_{Q_{R_0}(z_0)} |\nabla u|^2 \, dz$$

Обозначим

$$\phi(\rho) \; := \int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{z_0,\rho}|^2 \, dz, \qquad \alpha = n+4, \qquad \beta = n+2+2\lambda,$$

$$A = c_*, \qquad B \; = \; \frac{c_{**}}{R_0^{n+2\delta}} \int\limits_{Q_{R_0}(z_0)} |\nabla u|^2 \, dz$$

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ — постоянная из Useful Lemma, построенная для данных A, α, β. Тогда для ϕ справедлива оценка

$$\phi(\rho) \; \le \; A\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha} \phi(R) \; + \; B\,R^{\beta}, \qquad \forall\ \rho,\ R: \quad 0 < \rho < R \le R_0$$

откуда при помощи Useful Lemma вытекает неравенство

$$\phi(\rho) \; \le \; c_{A,\alpha,\beta}\,\rho^{\beta}\left(\frac{\phi(R)}{R^{\beta}} + B\right), \qquad \forall\ \rho,\ R: \quad 0 < \rho < R \le R_0$$

что дает нам оценку

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{z_0,\rho}|^2 \, dz \; \le \; c\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2+2\lambda} \int\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{z_0,R}|^2 \, dz + c\,\frac{\rho^{n+2+2\lambda}}{R_0^{n+2\delta}} \int\limits_{Q_{R_0}(z_0)} |\nabla u|^2 \, dz$$

Полагая $R = R_0$, мы получаем оценку

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{z_0,\rho}|^2\, dz \;\le\; c\, K_1\, \rho^{n+2+2\lambda}, \qquad \forall\, Q_{R_0}(z_0) \subset Q_T, \quad \forall\, 0 < \rho < R_0,$$

где

$$K_1 \;:=\; \frac{c}{R_0^{n+2+2\lambda}} \Big(1 + R_0^{2(\mu-\lambda)} \Big) \int\limits_{Q_{R_0}(z_0)} |\nabla u|^2\, dz$$

Если мы также предположим, что $Q_{2R_0}(z_0) \subset Q_T$, то при помощи неравенства Каччиопполи мы можем заработать в правой части слабую норму функции u:

$$\int\limits_{Q_{R_0}(z_0)} |\nabla u|^2\, dz \;\le\; \frac{c}{R_0^2} \int\limits_{Q_{2R_0}(z_0)} |u|^2\, dz$$

Поскольку по неравенству Гельдера мы имеем

$$⨍\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{z_0,\rho}|\, dz \;\le\; \Big(⨍\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{z_0,\rho}|^2\, dz \Big)^{1/2}$$

мы получаем условие Кампанато непрерывности по Гельдеру для ∇u

$$\int\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{z_0,\rho}|\, dz \;\le\; c\, K\, \rho^{n+2+\lambda}, \qquad \forall\, Q_{2R_0}(z_0) \subset Q_T, \quad \forall\, 0 < \rho < R_0,$$

где

$$K \;:=\; c_{R_0}\, \|u\|_{L_2(Q_T)}$$

4 Компактность параболических вложений

4.1 Мультипликативные неравенства

1. **Неравенства О.А. Ладыженской**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — произвольная (огр. или неогр.). Тогда

$$\|u\|^4_{L_4(\Omega)} \ \le\ 2\ \|u\|^2_{L_2(\Omega)}\ \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\ u \in C_0^\infty(\Omega)$$

Доказательство.

$$|u(x_1,x_2)|^2 \ \le\ 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1,s)|\,|u_{,2}(x_1,s)|\,ds \ \le\ 2\ \underbrace{\|u(x_1,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}}_{=:F_1(x_1)}\ \underbrace{\|u_{,2}(x_1,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}}_{=:G_1(x_1)}$$

$$|u(x_1,x_2)|^2 \ \le\ 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(s,x_2)|\,|u_{,1}(s,x_2)|\,ds \ \le\ 2\ \underbrace{\|u(\cdot,x_2)\|_{L_2(\mathbb{R})}}_{=:F_2(x_2)}\ \underbrace{\|u_{,1}(\cdot,x_2)\|_{L_2(\mathbb{R})}}_{=:G_2(x_2)}$$

Перемножим эти неравенства и результат проинтегрируем по $\mathbb{R}^2$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u(x_1,x_2)|^4\,dx_1dx_2 \ =\ 4 \int\limits_{\mathbb{R}^2} F_1(x_1)G_1(x_1)F_2(x_2)G_2(x_2)\,dx_1dx_2 \ =$$

$$=\ 4 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1(x_1)G_1(x_1)\,dx_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_2(x_2)G_2(x_2)\,dx_2 \ \le$$

$$\le\ 4\ \underbrace{\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1^2(x_1)\,dx_1\Big)^{1/2}}_{=\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}} \underbrace{\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_1^2(x_1)\,dx_1\Big)^{1/2}}_{=\|u_{,2}\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}} \underbrace{\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_2^2(x_2)\,dx_2\Big)^{1/2}}_{=\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}} \underbrace{\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_2^2(x_2)\,dx_2\Big)^{1/2}}_{=\|u_{,1}\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}} \ =$$

$$=\ 4\,\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}\|u_{,1}\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}\|u_{,2}\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \ \le\ 2\,\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}\Big(\|u_{,1}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} + \|u_{,2}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}\Big) \ =$$
$$=\ 2\,\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}\,\|\nabla u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}$$

□

2. **Вложение энергетического класса в 2D**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — произвольная область. Тогда если

$$u \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)),$$

то

$$u \in L_4(Q_T), \qquad \|u\|^4_{L_4(Q_T)} \ \le\ \|u\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)}$$

Доказательство. По неравенству О.А. Ладыженской при п.в. $t \in (0,T)$ получаем

$$\|u(t)\|^4_{L_4(\Omega)} \ \leq \ 2\ \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\ \|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\ u(t) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$$

Интегрируя эту оценку по $t \in (0,T)$, мы выводим

$$\|u\|^4_{L_4(Q_T)} \ = \ \int\limits_0^T \|u(t)\|^4_{L_4(\Omega)}\,dt \ \leq \ 2 \int\limits_0^T \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\ \|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt \ \leq$$

$$\leq \ 2\ \underbrace{\operatorname*{esssup}_{t\in(0,T)} \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}}_{=\ \|u\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}}\ \underbrace{\int\limits_0^T \|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt}_{=\ \|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)}}$$

3. **Общее мультипликативное неравенство**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная, $p \in [1,n)$, $q \in \Big[1, \frac{np}{n-p}\Big)$, $s \in \Big[q, \frac{np}{n-p}\Big]$. Тогда

$$\|u\|_{L_s(\Omega)} \ \leq \ c\ \|u\|^{1-\lambda}_{L_q(\Omega)}\ \|\nabla u\|^{\lambda}_{L_p(\Omega)}, \qquad \forall\ u \in C_0^\infty(\Omega).$$

где $\lambda \in [0,1]$, $\frac{1}{s} = \frac{1-\lambda}{q} + \lambda\,\frac{n-p}{np}$.

Доказательство. По неравенству Гельдера

$$\|u\|_{L_s(\Omega)} \ \leq \ \|u\|^{1-\lambda}_{L_q(\Omega)}\ \|u\|^{\lambda}_{L_{\frac{np}{n-p}}(\Omega)}, \qquad \forall\ u \in C_0^\infty(\Omega).$$

По теореме вложения

$$\|u\|_{L_{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \ \leq \ c_{n,p}\,\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}, \qquad \forall\ u \in C_0^\infty(\Omega),$$

где постоянная $c_{n,p} > 0$ зависит только от n и p.

4. **Вложение энергетического класса в многомерном случае**

Теорема. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ — произвольная область. Тогда если

$$u \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)),$$

то

$$u \in L_{2+\frac{4}{n}}(Q_T), \qquad \|u\|_{L_{2+\frac{4}{n}}(Q_T)} \ \leq \ c_n\,\|u\|^{\frac{2}{n+2}}_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\|\nabla u\|^{\frac{n}{n+2}}_{L_2(Q_T)}$$

Доказательство. По мультипликативному неравенству при $\frac{1}{s} = \frac{1-\lambda}{2} + \lambda\,\frac{n-2}{2n}$

$$\|u(t)\|^s_{L_s(\Omega)} \ \leq \ c\ \|u(t)\|^{s(1-\lambda)}_{L_2(\Omega)}\ \|\nabla u(t)\|^{s\lambda}_{L_2(\Omega)}, \qquad u(t) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \quad \text{при п.в.} \quad t \in (0,T)$$

Найдем $s \in \Big[2, \frac{2n}{n-2}\Big]$ и $\lambda \in [0,1]$, при которых выполняются соотношения

$$\begin{cases} \lambda s \ = \ 2 \\ \frac{1}{s} = \frac{1-\lambda}{2} + \lambda\,\frac{n-2}{2n} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad s \ = \ 2 + \frac{4}{n}, \qquad \lambda \ = \ \frac{n}{n+2}$$

Дальше все в точности как в двумерном случае.

4.2 Теорема о компактности

1. **Функции со значениями в банаховых пространствах**

   Пусть X — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, $I = (0, T)$ и $u : I \to X$

   - u наз. *простой*, если она принимает конечное число значений u на некотором измеримом разбиении множества I.
   - u наз. *измеримой*, если существует последовательность простых функций, сходящихся к u почти всюду.
   - u для простых функций естественно определяется *интеграл* по I
   - u наз. *суммируемой* на I, если существует последовательность простых g_k, такая что

   $$\int_I \|u(t) - g_k(t)\|_X \, dt \to 0, \qquad k \to +\infty$$

   - для суммируемой функции $u : I \to X$ определяется *интеграл Бохнера* $S \in X$

   $$S \ = \ \int_I u(t)\, dt \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big\| S \ - \ \int_I g_k(t)\, dt \Big\| \ \to \ 0$$

     где g_k — это последовательность простых из предыдущего пункта. Оказывается, что интеграл Бохнера не зависит от последовательности простых, аппроксимирующих u
   - Теорема (Бохнер) u суммируема по Бохнеру тогда и только тогда, когда u измерима и функция $t \mapsto \|u(t)\|_X$ суммируема на I, причем

   $$\Big\| \int_I u(t)\, dt \Big\| \ \le \ \int_I \|u(t)\|_X \, dt, \qquad \Big\langle f \, , \int_I u(t)\, dt \Big\rangle \ = \ \int_I \langle f, u(t) \rangle \, dt, \qquad \forall\, f \in X^*$$

   - Естественным образом определяются пространства банаховозначных функций $L_p(I; X)$, а также пространство непрерывных баноховозначнных функций $C(\bar{I}; X)$.

2. **Слабая производная по времени для банаховозначных функций**

   Определение. Пусть X, Z — банаховы и имеет место непрерывное вложение $X \hookrightarrow Z$. Будем говорить, что функция $u \in L_p(I; X)$, $p \in [1, +\infty)$, имеет *слабую производную по времени*, если существует функция $v \in L_q(I; Z)$, $q \in [1, +\infty)$, такая что

   $$\int_I u(t)\, \varphi'(t) \ dt \ = \ - \int_I v(t)\, \varphi(t) \ dt \qquad \text{в} \qquad Z, \qquad \forall \ \varphi \in C_0^\infty(I).$$

   Будем обозначать слабую производную по времени u' или $\frac{du}{dt}$. Для любых p, $q \in [1, +\infty)$ определим лин. пр–во

   $$\mathcal{W} \ := \ \Big\{ \ u \in L_p(I; X) : \ \exists \ \text{слабая производная по времени} \ \ \frac{du}{dt} \in L_q(I; Z) \ \Big\}$$

   Это пространство является банаховым относительно нормы

   $$\|u\|_{\mathcal{W}} \ := \ \|u\|_{L_p(I;X)} \ + \ \Big\| \frac{du}{dt} \Big\|_{L_q(I;Z)}$$

   причем если X, Z рефлексивны и p, $q \in (1, +\infty)$, то $\mathcal{W}$ также является рефлексивным.

3. **Формула Ньютона–Лейбница для функций со слабой производной по времени**

Теорема. Пусть у функции $u \in L_1(I;X)$ существует слабая производная $u' \in L_1(I;X)$. Тогда $u \in C(\bar{I};X)$

$$\forall\, s,t \in \bar{I} \qquad u(t) \,-\, u(s) \,=\, \int\limits_s^t u'(\tau)\; d\tau \qquad \text{в} \quad X.$$

В частности, существует $c > 0$, зависящее только от $I = (0,T)$, такое что

$$\|u\|_{C(\bar{I};X)} \;\le\; c\Big(\|u\|_{L_1(I;X)} + \|u'\|_{L_1(I;X)}\Big)$$

Доказательство.

1. Рассмотрим сначала случай $u \in C^1(\bar{I};X)$, то есть существует $v \in C(\bar{I};X)$, такая что

$$\forall\, t \in \bar{I} \qquad \Big\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - v(t) \Big\|_X \;\to\; 0 \quad \text{при} \quad h \to 0$$

Для таких функций нетрудно показать (так же, как и в скалярном случае), что

$$u' = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists\, u_0 \in X: \quad u(t) = u_0, \qquad \forall\, t \in \bar{I}$$

$$\forall\, s,t \in \bar{I} \qquad u(t) \,=\, \int\limits_s^t u'(\tau)\; d\tau \,+\, u(s) \qquad \text{в} \quad X.$$

2. Пусть у функции $u \in L_1(I;X)$ существует слабая производная $u' \in L_1(I;X)$. Тогда существуют функции $u_m \in C^\infty(\bar{I};X)$, такие что

$$u_m \to u \quad \text{в} \quad L_1(I;X), \qquad u_m' \to u' \quad \text{в} \quad L_1(I;X)$$

Доказательство полностью повторяет рассуждения в скалярном случае. Сначала “растянем” (определенную на симметричном интервале $I = (-T,T)$ и продолженную нулем) функцию $u_\lambda(t) = u(t/\lambda)$, $\lambda > 1$ и покажем, что оператор “растяжения” непрерывен в $W_1^1(I;X)$. А потом “усредним” по Соболеву “растянутую” функцию u_λ

$$u_{\lambda,\varepsilon}(t) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(t-\tau)u_\lambda(\tau)\, d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}$$

и покажем, что эти усреднения сходятся в нужном нам смысле на компактном подмножестве I промежутка $I_\lambda := (-T/\lambda, T/\lambda)$.

3. Пусть $u_m \in C^\infty(I;X)$, $u_m \to u$ в $L_p(I;X)$, $u_m' \to u'$ в $L_p(I;X)$. Тогда

$$u_m(t) \;=\; u_m(s) \;+\; \int\limits_s^t u_m'(\tau)\, d\tau, \qquad \forall\; s,\; t \in I$$

Выберем п/посл–ть $\{u_{m_k}\}$, такую что $u_{m_k}(t) \to u(t)$ для любого $t \in I \setminus \Sigma$ и $|\Sigma| = 0$. Тогда

$$u(t) \;=\; u(s) \;+\; \int\limits_s^t u'(\tau)\, d\tau, \qquad \forall\; t,s \in I \setminus \Sigma$$

Так как отображение $t \mapsto \int_s^t u'(\tau)\, d\tau$ непрерывно, получаем, что отображение $t \mapsto u(t)$ непрерывно и формула Ньютона–Лейбница справедлива для любых s, $t \in I$. $\square$

4. **Слабая сходимость на пространстве $\mathcal{W}$**

- Пусть $p \in (1, +\infty)$ и X релексивно. Тогда $(L_p(I; X))^* \simeq L_{p'}(I; X^*)$, где $p' = \frac{p}{p-1}$
- Пусть p, $q \in [1, +\infty)$ и X и Z релексивны. Тогда

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad \mathcal{W} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} u_k \rightharpoonup u & \text{в} \quad L_p(I; X) \\ u_k' \rightharpoonup u' & \text{в} \quad L_q(I; Z) \end{cases}$$

5. **Основной результат данного параграфа**

Теорема. X, Y, Z — банаховы, p, $q \in (1, +\infty)$. Предположим, что

1) $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$
2) X, Z — рефлексивны
3) вложение $X \hookrightarrow Y$ компактно

Тогда вложение $\mathcal{W}$ в пространство $L_p(I; Y)$ компактно, то есть для всякой последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{W}$

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad \mathcal{W} \qquad \Longrightarrow \qquad u_{k_j} \to u \qquad \textit{в} \qquad L_p(I; Y).$$

6. **Предварительные факты**

- если $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{W}$, $u \in L_p(I; X)$, $v \in L_q(I; Z)$ таковы, что

$$u_k \rightharpoonup u \quad \textit{в} \quad L_p(I; X), \qquad \frac{du_k}{dt} \rightharpoonup v \quad \textit{в} \quad L_q(I; Z),$$

то $u \in \mathcal{W}$ и $\frac{du}{dt} = v$ в Z.
- для любой $u \in \mathcal{W}$ и любых s, $t \in \bar{I}$

$$(t - s) u(t) \; = \; \int\limits_s^t u(\tau) \, d\tau \; + \; \int\limits_s^t (\tau - s) \frac{du}{d\tau}(\tau) \, d\tau \qquad \textit{в} \quad Z.$$

- пусть v_k, $v \in L_p(I; X)$ и t, $s \in I$ фиксированы. Определим элементы $a_k^{(t,s)}$, $a^{(t,s)} \in X$

$$a_k^{(t,s)} \; := \; \frac{1}{t - s} \int\limits_s^t v_k(\tau) \, d\tau, \qquad a^{(t,s)} \; := \; \frac{1}{t - s} \int\limits_s^t v(\tau) \, d\tau$$

Тогда если $v_k \rightharpoonup v$ в $L_p(I; X)$, то $a_k^{(t,s)} \rightharpoonup a^{(t,s)}$ в X при $k \to +\infty$.

7. **Компактность вложения в $L_p(I; Z)$**

Теорема. Пусть выполнены условия основной теоремы и пусть $u_k \in \mathcal{W}$ таковы, что

$$u_k \rightharpoonup 0 \quad \textit{в} \quad L_p(I; X) \qquad \text{и} \qquad \left\{ \frac{du_k}{dt} \right\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{ограничена в } L_q(I; Z).$$

Тогда $u_k \to 0$ в $L_p(I; Z)$.

Доказательство. Обозначим

$$\varphi_k(t) := \|u_k(t)\|_Z^p, \qquad t \in I.$$

Докажем, что $\varphi_k \to 0$ в $L_1(I)$. Мы хотим воспользоваться теоремой Лебега.

1. Равномерная ограниченность вытекает из вложения $\mathcal{W} \hookrightarrow C(\bar{I}; Z)$. Действительно,

$$\varphi_k(t) \ \le \ \sup_{t\in\bar{I}} \|u_k(t)\|_Z^p \ = \ \|u_k\|^p_{C(\bar{I};Z)} \ \le \ C\ \|u_k\|^p_{\mathcal{W}},$$

и поскольку $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ ограничена в $\mathcal{W}$, мы заключаем, что

$$0 \ \le \ \varphi_k(t) \ \le \ C\ M^p, \qquad \forall\, t \in \bar{I},$$

где мы обозначили $M := \sup\limits_k \|u_k\|_{\mathcal{W}}$.

2. Чтобы установить поточечную сходимость $\varphi_k(t) \to 0$, $\forall\ t \in I$, фиксируем произвольные $t \in I$ и $\varepsilon > 0$ и возьмем точку $s \in I$, $s \neq t$, $s = s(t, M, q, \varepsilon)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$C(q)\ M\ |t-s|^{1/q'} \ < \ \frac{\varepsilon}{2}, \qquad C(q) = (q'+1)^{-\frac{1}{q'}}, \qquad q' = \frac{q}{q-1}.$$

Воспользуемся следствием из формулы Ньютона–Лейбница для класса $\mathcal{W}_{p,q}$:

$$u_k(t) \ = \ \underbrace{\frac{1}{t-s}\int\limits_s^t u_k(\tau)\ d\tau}_{:=\ a_k^{(t,s)}} \ + \ \underbrace{\frac{1}{t-s}\int\limits_s^t (\tau - s)\ \frac{du_k}{d\tau}(\tau)\ d\tau}_{:=\ b_k^{(t,s)}}$$

3. Для последовательности $\{b_k^{(t,s)}\}_{k=1}^\infty \subset Z$

$$\|b_k^{(t,s)}\|_Z \ \le \ \frac{1}{|t-s|}\ \left| \ \int\limits_s^t (\tau - s)\ \left\|\frac{du_k}{d\tau}(\tau)\right\|_Z\ d\tau \ \right|$$

При помощи неравенства Гельдера получаем оценку

$$\|b_k^{(t,s)}\|_Z \ \le \ \frac{1}{|t-s|}\ \left\|\frac{du_k}{d\tau}\right\|_{L_q(I;Z)}\ \left(\ \frac{|t-s|^{q'+1}}{q'+1} \ \right)^{1/q'} \ \le \ C(q)\ M\ |t-s|^{1/q'}$$

С учетом нашего выбора точки $s \in I$ получаем

$$\sup_k \|b_k^{(t,s)}\|_Z \ \le \ \frac{\varepsilon}{2}.$$

4. Перейдем к оценке $\{a_k^{(t,s)}\}_{k=1}^\infty$. Так как $u_k \rightharpoonup 0$ в $L_p(I; X)$, в силу предварительных фактов мы заключаем, что

$$a_k^{(t,s)} \ \rightharpoonup \ 0 \qquad \text{в} \quad X.$$

Поскольку вложение $X \hookrightarrow Y$ компактно, мы заключаем, что $a_k^{(t,s)} \to 0$ в Y и, следовательно, $a_k^{(t,s)} \to 0$ в Z. Фиксируем $k_0 = k_0(\varepsilon, t, s)$ так, чтобы при всех $k \geq k_0$ выполнялись неравенства

$$\|a_k^{(t,s)}\|_Z \ < \ \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для любого $k \geq k_0$

$$0 \ \leq \ \|u_k(t)\|_Z \ \leq \ \|a_k^{(t,s)}\|_Z \ + \ \|b_k^{(t,s)}\|_Z \ < \ \frac{\varepsilon}{2} \ + \ \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon.$$

Следовательно, $\forall\, t \in I \ \ \varphi_k(t) = \|u_k(t)\|_Z^p \to 0$ при $k \to \infty$. $\square$

8. **Общий факт о компактных вложениях**

Теорема. Пусть банаховы пространства X, Y, Z таковы, что

1) $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$ (непрерывные вложения)
2) вложение $X \hookrightarrow Y$ компактно

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$, такая что

$$\|x\|_Y \ \leq \ \varepsilon \ \|x\|_X \ + \ C_\varepsilon \ \|x\|_Z, \qquad \forall\, x \in X.$$

9. **Доказательство основоного результата**

Теорема. Пусть выполнены условия основной теоремы и $u_k \in L_p(I;X)$ таковы, что

$$u_k \rightharpoonup 0 \quad \text{в} \quad L_p(I;X) \qquad u \qquad u_k \to 0 \quad \text{в} \quad L_p(I;Z).$$

Тогда $u_k \to 0$ в $L_p(I;Y)$.

Доказательство. $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, C_\varepsilon > 0$, такая что для п.в. $t \in I$

$$\|u_k(t)\|_Y \ \leq \ \varepsilon \ \|u_k(t)\|_X \ + \ C_\varepsilon \ \|u_k(t)\|_Z$$

Возводя это неравенство в степень p и интегрируя по t, получаем

$$\|u_k\|_{L_p(I;Y)} \ \leq \ \varepsilon \ \|u_k\|_{L_p(I;X)} \ + \ C_\varepsilon \ \|u_k\|_{L_p(I;Z)}$$

Поскольку $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ ограничена в $L_p(I;X)$ и $u_k \to 0$ в $L_p(I;Z)$, получаем

$$\limsup_{k\to\infty} \|u_k\|_{L_p(I;Y)} \ \leq \ M\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольное, получаем

$$u_k \ \to \ 0 \qquad \text{в} \quad L_p(I;Y).$$

4.3 Следствия теоремы о компактности

1. **Компактность в** $L_p(Q_T)$

Теорема. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченая липшицева, p, $q\in(1,+\infty)$ и пусть $u_m\in W_p^{1,0}(Q_T)$ имеют слабые производные $\partial_t u_m\in L_q(0,T;W_q^{-1}(\Omega))$, причем

1) $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ ограничена в $W_p^{1,0}(Q_T)$
2) $\{\partial_t u_m\}_{m=1}^\infty$ ограничена в $L_q(0,T;W_q^{-1}(\Omega))$

Тогда $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ предкомпактна в $L_p(Q_T)$.

Доказательство. Обозначим

$$X=W_p^1(\Omega),\qquad Y=L_p(\Omega),\qquad Z=W_q^{-1}(\Omega).$$

Поскольку p, $q\in(1,+\infty)$, пространства X и Z, равно как $L_p(0,T;X)$ и $L_q(0,T;Z)$ рефлексивны. Без ограничения общности можно считать, что $q\le p$. Тогда

$$X\overset{\text{comp}}{\hookrightarrow}Y\hookrightarrow Z\qquad\qquad\left\{\begin{array}{ll}\{u_m\}_{m=1}^\infty & \text{ограничена в}\quad L_p(0,T;X)\\ \{\partial_t u_m\}_{m=1}^\infty & \text{ограничена в}\quad L_q(0,T;Z)\end{array}\right.$$

Теперь результат прямо вытекает из теоремы о компактности в предыдущем параграфе.

2. **Компактность в** $W_p^{1,0}(Q_T)$

Теорема. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная липшицева, $p\in(1,+\infty)$. Тогда

$$\text{вложение}\quad W_p^{2,1}(Q_T)\hookrightarrow W_p^{1,0}(Q_T)\quad\text{компактно.}$$

Доказательство. Обозначим

$$X=W_p^2(\Omega),\qquad Y=W_p^1(\Omega),\qquad Z=L_p(\Omega).$$

Поскольку $p\in(1,+\infty)$, пространства X и Z, равно как $L_p(0,T;X)$ и $L_p(0,T;Z)$ рефлексивны. Тогда

$$X\overset{\text{comp}}{\hookrightarrow}Y\hookrightarrow Z\qquad\qquad\left\{\begin{array}{ll}\{u_m\}_{m=1}^\infty & \text{ограничена в}\quad L_p(0,T;X)\\ \{\partial_t u_m\}_{m=1}^\infty & \text{ограничена в}\quad L_p(0,T;Z)\end{array}\right.$$

Теперь результат прямо вытекает из теоремы о компактности в предыдущем параграфе.

3. **Неравенство Пуанкаре–Соболева**

Теорема. Для любого $p\in(1,+\infty)$ существует постоянная $c>0$, такая что для любого $R>0$ и любой функции $u\in W_p^{2,1}(Q_R)$ справедливо неравенство

$$\Big(\int\limits_{Q_R}|u-(\nabla u)_{Q_R}x-(u)_{Q_R}|^p\,dz\Big)^{\frac1p}\;+\;R\Big(\int\limits_{Q_R}|\nabla u-(\nabla u)_{Q_R}|^p\,dz\Big)^{\frac1p}\;\le$$

$$\le c\,R^2\Big(\int\limits_{Q_R}\big(|\nabla^2 u|^p+|\partial_t u|^p\big)\,dz\Big)^{\frac1p}$$

где $Q_R := B_R \times (-R^2, 0]$ и $(u)_{Q_R} := \fint\limits_{Q_R} u(z)\,dz \equiv \frac{1}{|Q_R|} \int\limits_{Q_R} u(z)\,dz$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $R = 1$. Будем рассуждать от противного. Предположим, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует функция $u_m \in W^{2,1}_p(Q_T)$, такая что

$$\Big(\int\limits_Q |u_m - (\nabla u_m)_Q x - (u_m)_Q|^p\,dz \Big)^{\frac{1}{p}} \ + \ \Big(\int\limits_Q |\nabla u_m - (\nabla u_m)_Q|^p\,dz \Big)^{\frac{1}{p}} \ \geq$$

$$\geq \ m \Big(\int\limits_Q \big(|\nabla^2 u_m|^p + |\partial_t u_m|^p \big)\,dz \Big)^{\frac{1}{p}}$$

Обозначим

$$v_m(x,t) \ := \ \frac{1}{M_m} \Big(u_m(x,t) - (\nabla u_m)_Q\, x - (u_m)_Q \Big), \qquad (x,t) \in Q$$

где

$$M_m \ := \ \Big(\int\limits_Q |\underbrace{u_m - (\nabla u_m)_Q\, x - (u_m)_Q}_{:=\, v_m}|^p\,dz \Big)^{\frac{1}{p}} \ + \ \Big(\int\limits_Q |\underbrace{\nabla u_m - (\nabla u_m)_Q}_{:=\, \nabla v_m}|^p\,dz \Big)^{\frac{1}{p}}$$

Тогда $v_m \in W^{2,1}_p(Q)$ обладает свойствами

$$\|v_m\|_{W^{1,0}_p(Q)} \ := \ \|v_m\|_{L_p(Q)} \ + \ \|\nabla v_m\|_{L_p(Q)} \ = \ 1,$$

$$(v_m)_Q \ = \ 0, \qquad (\nabla v_m)_Q \ = \ 0$$

По нашему предположению

$$1 \ = \ \|v_m\|_{W^{1,0}_p(Q)} \ \geq \ m \Big(\|\nabla^2 v_m\|_{L_p(Q)} + \|\partial_t v_m\|_{L_p(Q)} \Big)$$

откуда

$$\nabla^2 v_m \to 0 \quad \text{в} \quad L_p(Q), \qquad \partial_t v_m \to 0 \quad \text{в} \quad L_p(Q)$$

Кроме того,

$$\{v_m\}_{m=1}^\infty \ \text{ ограничена в } \ W^{1,0}_p(Q), \qquad \{\nabla^2 v_m\}_{m=1}^\infty, \ \{\partial_t v_m\}_{m=1}^\infty \ \text{ ограничены в } \ L_p(Q)$$

$$\Longrightarrow \quad \{v_m\}_{m=1}^\infty \ \text{ ограничена в } \ W^{2,1}_p(Q)$$

Поскольку при $p \in (1, +\infty)$ пространство $W^{2,1}_p(Q)$ рефлексивно,

$$\exists\, v \in W^{2,1}_p(Q): \qquad v_m \rightharpoonup v \ \text{ в } \ W^{2,1}_p(Q)$$

То тогда по свойству замкнутости оператора дифференцирования:

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla^2 v_m \rightharpoonup \nabla^2 v \ \text{ в } \ L_p(Q), & \nabla^2 v_m \to 0 \ \text{ в } \ L_p(Q) \\ \partial_t v_m \rightharpoonup \partial_t v \ \text{ в } \ L_p(Q), & \partial_t v_m \to 0 \ \text{ в } \ L_p(Q) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \nabla^2 v \ = \ 0 \ \text{ п.в. в } \ Q \\ \partial_t v \ = \ 0 \ \text{ п.в. в } \ Q \end{array}\right.$$

Поэтому

$$\exists\, c \in \mathbb{R}, \quad \exists\, b \in \mathbb{R}^n: \qquad v(x,t) \ = \ c + b \cdot x, \qquad (x,t) \in Q$$

С другой стороны,

$$(v_m)_Q = 0, \quad (\nabla v_m)_Q = 0, \quad v_m \rightharpoonup v \ \text{ в } \ W^{1,0}_p(Q) \qquad \Longrightarrow \qquad (v)_Q = 0, \quad (\nabla v)_Q = 0,$$

откуда для функции $v(x,t)=c+b\cdot x$ мы получаем

$$\left.\begin{array}{ccc} (v)_Q=0 & \Longrightarrow & c=0 \\ (\nabla v)_Q=0 & \Longrightarrow & b=0 \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad v\equiv 0 \ \text{ п.в. в } \ Q$$

Теперь мы используем компактность вложения $W^{2,1}_p(Q)\hookrightarrow W^{1,0}_p(Q)$:

$$v_m\rightharpoonup v \quad \text{в} \quad W^{2,1}_p(Q) \qquad \Longrightarrow \qquad v_m\to v \quad \text{в} \quad W^{1,0}_p(Q),$$

откуда в силу непрерывности нормы относительно сильной сходимости

$$\|v\|_{W^{1,0}_p(Q)} \ = \ \lim_{m\to\infty}\underbrace{\|v_m\|_{W^{1,0}_p(Q)}}_{=\,1} \ = \ 1$$

Это противоречит тому, что $v\equiv 0$ в Q.

Для функции $u\in W^{2,1}_p(Q_R)$ с произвольным $R>0$ требуемая оценка вытекает из оценки при $R=1$ при помощи стандартного масштабного преобразования и замены переменных:

$$u^R(x,t) \ = \ u(Rx,R^2t), \qquad (x,t)\in Q.$$

4. Еще одно условие непрерывности функции по Гельдеру

Теорема. Пусть $u\in W^{1,0}_1(Q_T)$. Для любого $Q_\rho(z_0)\subset Q_T$ обозначим

$$\Psi_u(z_0,\rho) \ := \ \fint\limits_{Q_\rho(z_0)} |u-(\nabla u)_{z_0,\rho}\,(x-x_0)-(u)_{z_0,\rho}|\,dxdt \ + \ \rho \fint\limits_{Q_\rho(z_0)} |\nabla u-(\nabla u)_{z_0,\rho}|\,dxdt$$

где, как обычно,

$$(u)_{z_0,\rho} \ := \ \fint\limits_{Q_\rho(z_0)} u(x,t)\,dxdt \ \equiv \ \frac{1}{|Q_\rho|}\int\limits_{Q_\rho(z_0)} u(x,t)\,dxdt$$

Предположим, что существуют $\mu\in(0,1)$ и $K>0$, такие что

$$\forall\, Q_\rho(z_0)\subset Q_T \qquad \Psi_u(z_0,\rho) \ \le \ K\rho^\mu$$

Тогда функция u непрерывна по Гельдеру с показателем $\mu\in(0,1)$ в параболической метрике локально в Q_T, т.е. для любых $\Omega'\Subset\Omega$ и $\delta\in(0,T)$ имеет место включение

$$u\in C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar Q'_{\delta,T}), \qquad Q'_{\delta,T}:=\Omega'\times(\delta,T].$$

При этом справедлива оценка

$$\|u\|_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar Q'_{\delta,T})} \ \le \ c\Big(K+\|u\|_{W^{1,0}_1(Q_T)}\Big),$$

в которой постоянная $c>0$ зависит только от n, Ω, Ω', T и δ.

Доказательство. Пусть $0<\rho<R$ и $Q_R(z_0)\subset Q_T$. Тогда

$$\big|(\nabla u)_{z_0,\rho}-(\nabla u)_{z_0,R}\big| \;=\; \Big|\;\fint\limits_{Q_\rho(z_0)}(\nabla u(x,t)-(\nabla u)_{z_0,R})\,dxdt\Big| \;\le$$

$$\le\;\frac{1}{|Q_\rho|}\underbrace{\int\limits_{Q_\rho(z_0)\subset Q_R(z_0)}|\nabla u(x,t)-(\nabla u)_{z_0,R}|\,dxdt}_{\le\;\frac{1}{R}\,|Q_R|\,\Psi_u(z_0,R)}\;\le\;\frac{1}{R}\,\frac{|Q_R|}{|Q_\rho|}\,\Psi_u(z_0,R)$$

откуда, используя условие $\Psi_u(z_0,R)\le KR^\mu$, мы приходим к оценке

$$|(\nabla u)_{z_0,\rho}-(\nabla u)_{z_0,R}|\;\le\;K\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2}R^{\mu-1} \qquad (*)$$

Обозначим теперь $R_k:=\frac{R}{2^k}$, $k=0,1,\dots$. Тогда

$$|(u)_{z_0,R_{k+1}}-(u)_{z_0,R_k}|\;\le\;c\,K\,2^{n+2}\,R_k^{\mu-1}\;=\;c_n\,K\,R_0^{\mu-1}\,2^{(1-\mu)k}$$

Зафиксируем $m=0,1,2,\dots$ так, что $R_{m+1}\le\rho\le R_m$. Тогда

$$|(\nabla u)_{z_0,R_m}-(\nabla u)_{z_0,R_0}|\;\le\;\sum_{j=0}^{m-1}|(\nabla u)_{z_0,R_{j+1}}-(\nabla u)_{z_0,R_j}|\;\le$$

$$\le\;c_n\,K\,R_0^{\mu-1}\sum_{j=0}^{m-1}2^{(1-\mu)j}\;\le\;c_{n,\mu}\,K\,\underbrace{R_0^{\mu-1}\,2^{(1-\mu)m}}_{=R_m^{\mu-1}}\;=\;\frac{c\,K}{R_m^{1-\mu}}\;\le\;\frac{c\,K}{\rho^{1-\mu}}$$

С другой стороны, из оценки $(*)$ мы получаем

$$|(\nabla u)_{z_0,\rho}-(\nabla u)_{z_0,R_m}|\;\le\;K\left(\frac{R_m}{\rho}\right)^{n+2}R_m^{\mu-1}\;=\;2^{n+2}\,K\underbrace{\left(\frac{R_{m+1}}{\rho}\right)^{n+2}}_{\le\,1}\underbrace{R_m^{\mu-1}}_{\le\,\rho^{\mu-1}}\;\le\;\frac{c\,K}{\rho^{1-\mu}}$$

и с учетом $R_0=R$ мы приходим к тому, что для любых $Q_R(z_0)\subset Q_T$ и $0<\rho<R$ выполняется неравенство

$$|(\nabla u)_{z_0,\rho}-(\nabla u)_{z_0,R}|\;\le\;\frac{c\,K}{\rho^{1-\mu}}$$

Пусть теперь $R_*=\mathrm{dist}_{par}\{\bar Q'_{\delta,T},\partial' Q_T\}$, то есть $Q_\rho(z_0)\subset Q_T$ для любой $z_0\in\bar Q'_{\delta,T}$ и любого $\rho\le R_*$. Тогда при любых $z_0\in Q'_{\delta,T}$ и $\rho\le R_*$ мы имеем

$$|(\nabla u)_{z_0,\rho}|\;\le\;\frac{c\,K}{\rho^{1-\mu}}\;+\;|(\nabla u)_{z_0,R_*}|,$$

Умножим обе части этого соотношения на $\rho>0$. Получим

$$\rho\,|(\nabla u)_{z_0,\rho}|\;\le\;c\,\rho^\mu\left(K+\underbrace{\rho^{1-\mu}}_{\le R_*^{1-\mu}}\,R_*^{-(n+2)}\,\|\nabla u\|_{L_1(Q_T)}\right) \qquad (**)$$

Обозначим

$$\Phi_u(z_0,\rho)\;:=\;\fint\limits_{Q_\rho(z_0)}|u-(u)_{z_0,\rho}|\,dxdt$$

Поскольку

$$\fint_{Q_\rho(z_0)} |u-(u)_{z_0,\rho}|\,dxdt \;\le$$

$$\le \fint_{Q_\rho(z_0)} |u-(\nabla u)_{z_0,\rho}(x-x_0)-(u)_{z_0,\rho}|\,dxdt \;+\; \fint_{Q_\rho(z_0)} |(\nabla u)_{z_0,\rho}|\,\underbrace{|x-x_0|}_{\le\,\rho}\,dxdt \;\le$$

$$\le \fint_{Q_\rho(z_0)} |u-(\nabla u)_{z_0,\rho}(x-x_0)-(u)_{z_0,\rho}|\,dxdt \;+\; \rho\,|(\nabla u)_{z_0,\rho}|$$

мы получаем

$$\Phi_u(z_0,\rho) \;\le\; \Psi_u(z_0,\rho) \;+\; \rho\,|(\nabla u)_{z_0,\rho}|$$

Теперь с учетом $(**)$ ясно, что функция u удовлетворяет в Q_T критерию Каманато локальной непрерывности по Гельдеру: для любых $z_0\in Q'_{T,\delta}$ и $0<\rho\le R_*$

$$\Phi_u(z_0,\rho) \;\le\; \underbrace{\Psi_u(z_0,\rho)}_{\le\, K\,\rho^\mu} \;+\; \underbrace{\rho\,|(\nabla u)_{z_0,\rho}|}_{\le\, c_{R_*}\,\rho^\mu\,\left(K+\|\nabla u\|_{L_1(Q_T)}\right)} \;\le\; c_{R_*}\,\rho^\mu\,\underbrace{\Big(K+\|\nabla u\|_{L_1(Q_T)}\Big)}_{=:\,K_1}$$

Следовательно,

$$\|u\|_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar Q'_{\delta,T})} \;\le\; c_{R_*}\Big(K_1+\|u\|_{L_1(Q_T)}\Big) \;\le\; c_{R_*}\Big(K+\|u\|_{W^{1,0}_1(Q_T)}\Big)$$

5. Параболические вложения в пространства Гельдера

Теорема. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $Q_T:=\Omega\times(0,T]$ и $u\in W^{2,1}_p(Q_T)$, $p\in[1,+\infty)$. Тогда

1) если $\frac{n+2}{2}<p<n+2$, то

$$u\in C^{\mu,\frac{\mu}{2}}_{loc}(Q_T), \qquad \mu=2-\tfrac{n+2}{p}>0,$$

и для любых $\Omega'\Subset\Omega$, $\delta\in(0,T]$ справедлива оценка

$$\|u\|_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(Q'_{\delta,T})} \;\le\; c\,\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T)},$$

в которой постоянная $c>0$ зависит только от n, p, Ω, Ω', T и δ.

2) если $p>n+2$, то

$$\nabla u\in C^{\mu,\frac{\mu}{2}}_{loc}(Q_T), \qquad \mu=1-\tfrac{n+2}{p}>0,$$

и для любых $\Omega'\Subset\Omega$, $\delta\in(0,T]$ справедлива оценка

$$\|\nabla u\|_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(Q'_{\delta,T})} \;\le\; c\,\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T)},$$

в которой постоянная $c>0$ зависит только от n, p, Ω, Ω', T и δ.

Доказательство. Начнем с доказательства пункта 1). Пусть $p\in\big(\frac{n+2}{2},n+2\big)$. Тогда для любого $Q_R(z_0)\subset Q_T$ по неравенству Гельдера мы имеем

$$\Psi_u(z_0,R) \;:=\; \fint_{Q_R(z_0)} |u-(\nabla u)_{z_0,R}\,(x-x_0)-(u)_{z_0,R}|\,dz \;+\; R\fint_{Q_R(z_0)} |\nabla u-(\nabla u)_{z_0,R}|\,dz \;\le$$

$$\le \Big(\fint_{Q_R(z_0)} |u-(\nabla u)_{z_0,R}(x-x_0)-(u)_{z_0,R}|^p\,dz\Big)^{\frac1p} \;+\; R\Big(\fint_{Q_R(z_0)} |\nabla u-(\nabla u)_{z_0,R}|^p\,dz\Big)^{\frac1p}$$

Оценивая правую часть по параболическому неравенству Пуанкаре-Соболева, мы получаем

$$\Psi_u(z_0,R) \;\le\; c\,R^2\Big(\;\fint\limits_{Q_R(z_0)} \big(|\nabla^2 u|^p+|\partial_t u|^p\big)\,dz\Big)^{\frac1p} \;=\; c\,R^{2-\frac{n+2}{p}}\Big(\|\nabla^2 u\|_{L_p(Q_T)}+\|\partial_t u\|_{L_p(Q_T)}\Big)$$

то есть

$$\Psi_u(z_0,R)\;\le\; c\,\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T)}\,R^{\mu}, \qquad \forall\,Q_R(z_0)\subset Q_T, \qquad \mu:=2-\tfrac{n+2}{p}\;\in\;(0,1)$$

Это есть условие локальной непрерывности по Гельдеру функции u, доказанное в этом параграфе.

Докажем теперь пункт 2). Пусть $p>n+2$. Тогда для любого $Q_R(z_0)\subset Q_T$ по неравенству Гельдера мы имеем

$$\Phi_{\nabla u}(z_0,R)\;:=\;\fint\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u-(\nabla u)_{z_0,R}|\,dz\;\le\;\Big(\;\fint\limits_{Q_R(z_0)} |\nabla u-(\nabla u)_{z_0,R}|^p\,dz\Big)^{\frac1p}$$

Оценивая правую часть по параболическому неравенству Пуанкаре-Соболева, мы получаем

$$\Phi_{\nabla u}(z_0,R) \;\le\; c\,R\Big(\;\fint\limits_{Q_R(z_0)} \big(|\nabla^2 u|^p+|\partial_t u|^p\big)\,dz\Big)^{\frac1p} \;=\; c\,R^{1-\frac{n+2}{p}}\Big(\|\nabla^2 u\|_{L_p(Q_T)}+\|\partial_t u\|_{L_p(Q_T)}\Big)$$

то есть

$$\Phi_{\nabla u}(z_0,R)\;\le\; c\,\|u\|_{W^{2,1}_p(Q_T)}\,R^{\mu}, \qquad \forall\,Q_R(z_0)\subset Q_T, \qquad \mu:=1-\tfrac{n+2}{p}\;\in\;(0,1)$$

Это есть условие Кампанато локальной непрерывности по Гельдеру функции ∇u.

К О Н Е Ц