Математическкая теория уравнений Навье–Стокса
Вопросы к промежуточному теорзачету и финальному экзамену
Тимофей Николаевич Шилкин
Весна 2022

Часть I. Параболические уравнения

1. Пространства банаховозначных функций: классы непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций, классы Лебега, их свойства.

2. Распределения со значениями в банаховых пространствах. Классы Соболева банаховозначных функций, формула Ньютона–Лейбница.

3. Функции, имеющие слабую производную по времени. Свойства решений уравнения $\partial_t u = \operatorname{div} f$.

4. Теорема о сильной непрерывности, ее следствия.

5. Теорема о слабой непрерывности, ее следствия.

6. Параболические пространства Соболева, формулировки теорем вложения и теорем о следах для них.

7. Слабые решения первой начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка. Эквивалентные определения, доказательство эквивалентности.

8. Энергетическое неравенство и единственность слабых решений.

9. Существование слабых решений первой начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка. Метод Галеркина.

10. Сильные решения первой начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка. Теорема существования в классе сильных решений.

11. Слабый принцип максимума для параболического уравнения второго порядка. Теорема сравнения.

12. Неравенство Харнака для уравнения теплопроводности, доказательство.

13. Оценка осцилляции и теорема Лиувилля для уравнения теплопроводности.

14. Локальная гладкость слабых решений параболических уравнений. Доказательство локальной L_2-оценки старших производных.

Часть II. Уравнения Навье–Стоска, “базовая” теория

1. Теорема о существании решения уравнения $\operatorname{div} u = f$.
2. Теорема о представлении ограниченных линейных функционалов, обращающихся в ноль на соленоидальных векторных полях.
3. Разложение Гельмгольца–Вейля.
4. Слабые и сильные решения стационарной задачи Стокса, теоремы существования.
5. Оператор Стокса, его свойства. Неравенство Каттабрига–Солонникова. Свойства собственных функций оператора Стокса.
6. Слабые и сильные решения нестационарной системы Стокса–Озина, теоремы существования для них.
7. Теорема единственности для задачи Стокса в классе “очень слабых” решений. Коэрцитивные оценки В.А. Солонникова (формулировка теоремы).
8. Теорема о компактности для функций со слабой производной по времени.
9. Принцип Лере-Шаудера.
10. Существование и свойства решений регуляризованных уравнений Навье-Стокса.
11. Мультипликативные неравенства О.А. Ладыженской.
12. Определение решений Лере-Хопфа уравнений Навье–Стокса и теорема существования для них.
13. Теорема единственности для уравнений Навье-Стокса в двумерном случае.
14. Существование у решений Лере-Хопфа суммируемых старших производных и существование давления.
15. Сильные решения уравнений Навье-Стокса, теорема единственности в классе сильных решений. Глобальное существование сильных решений уравнений Навье-Стокса при малых по норме начальных данных.
16. Локальное по времени существование сильных решений. Оценка промежутка существования сильных решений (время Лере).
17. “Weak–strong” теорема единственности для уравнений Навье-Стокса.
18. Решения Лере–Хопфа с ограниченной L_2–нормой градиента поля скоростей. Определение blow up time и поведение L_2–нормы градиента поля скоростей при приближении к blow up time.
19. Доказать, что решения Лере–Хопфа, принадлежащие классу Ладыженской–Проди–Серрина, являются сильными.
20. NSE Millennium problem: как связан вопрос о существовании сильных решений уравнений Навье-Стокса с проблемой глобальной однозначной разрешимости этой задачи?